فصل در یک نگاه

بازه‌ها

مفهوم: زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی.

اگر شاملِ ∞ نباشد:

بازه	$[a,b]$	(a,b)	$[a,b)$	$(a,b]$
نمایش روی محور				

اگر شاملِ ∞ باشد:

بازه	$[a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(-\infty,b)$	$(-\infty,b]$
نمایش روی محور				

بازه‌هایِ جدا از هم: این‌ها را به شکل اجتماعِ چند بازه بنویس.

بازه‌ی معروف: $\mathbb{R}-\{a\}=(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$

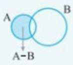
مجموعه

مجموعه‌های معروف

- **طبیعی:** $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$
- **حسابی:** $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$
- **صحیح:** $\mathbb{Z}=\{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,...\}$
- **گویا:** اعداد کسری که صورت و مخرج آن‌ها عدد صحیح است و مخرج، مخالف صفر. $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbb{Z},b\neq۰\}$
- **گنگ:** اعدادی که گویا نباشند. $\mathbb{Q}'=\{x|x\notin\mathbb{Q}\}$
- **حقیقی:** هر عددی که می‌شناسیم، در آن هست! $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$
- **رابطه‌ی بینِ مجموعه‌های معروف**
  - $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$
  - $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$
  - $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$

تفاضل دو مجموعه

- **شکل:**



- **مفهوم:** $A-B$ عضوهایی را شامل می‌شود که در A هستند ولی در B نیستند.
- **پیدا کردن:** از رویِ عضوهایِ A، عضوهای $A\cap B$ را خط بزنید...
- **تعداد اعضا:** $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
- **برای معروف‌ها:** $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

مرجع: هر عضوی که از آن در یک بحث، استفاده می‌کنیم عضوِ این U است!

متمم: متمم مجموعه‌ی A، می‌شود:
- **به فارسی:** اعضایی از U که در A نیستند.
- **به ریاضی:** $A'=U-A$

متناهی و نامتناهی
- **متناهی:** اعضایش قابل شمارش‌اند و محدود.
- **نامتناهی:** اعضایش قابل شمارش نیستند یا نامحدود عضو دارد.

عملیات با مجموعه‌ها

در حضور متمم

- **دبل** $(A')'=A$
- **دمورگان**
  - $(A\cap B)'=A'\cup B'$
  - $(A\cup B)'=A'\cap B'$
- **با اجتماع و اشتراک**
  - $A\cup A'=U$
  - $A\cap A'=\varnothing$
- **با منها**
  - $A-A'=A$
  - $A'-A=A'$
- **تهی و مرجع**
  - $\varnothing'=U$
  - $U'=\varnothing$

در حضور زیرمجموعه

- $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$
- $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$
- $A\subseteq B$:
  - $A\cup B=B$
  - $A\cap B=A$

تعداد اعضا

- **اجتماع:** (حداقل یکی از دو ویژگی) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

- **هیچ‌کدام از دوتا:** $n(A'\cap B')=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

- **منها:** $n(A-B)=n(A)-n\ A\cap B$

- **دقیقاً یک ویژگی از میانِ دو تا ویژگی:** $n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$

فصل در یک نگاه

دنباله

- **مفهوم:** تعدادی عدد که دنبالِ هم نوشته شده‌اند.
- **خطی**
  - مفهوم: تفاضلِ جمله‌های متوالیِ این دنباله، عددی ثابت است؛ ...,۵,۹,۱۳,۱۷
  - جمله‌ی عمومی: $t_n = an + b$ $\xrightarrow[a=\circ]{\text{حالت خاص}}$ دنباله ثابت است؛ ...,۳,۳,۳
- **درجه‌ی دو**
  - جمله‌ی عمومی: $t_n = an^۲ + bn + c$
  - به‌دست آوردن ضابطه: با داشتنِ حاصلِ سه جمله از دنباله و شماره‌ی آن‌ها، دُرست مثل تابع، در جمله‌ی عمومی دنباله، شماره‌ها را جای‌گذاری کرده و مساویِ مقدارِ جمله بگذارید. در آخر هم دستگاه حل کنید.
  - شناسایی: دنباله‌ای درجه دو است که اختلافِ جمله‌های متوالی آن، به‌صورت یک دنباله‌ی حسابی پیش بروند:

    ۵ , ۸ , ۱۳ , ۲۰ , ...

    +۳ +۵ +۷

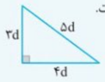
    +۲

    $a = \frac{d}{۲}$
- **معروف‌ها**
  - مضرب‌های عددِ ثابتِ k: $t_n = kn$
  - مربعی
    - جمله‌ی عمومی: $t_n = n^۲$
    - فرم: مربعِ عددهای طبیعی‌اند

    $\xrightarrow{\text{شکل}}$ 
  - مثلثی
    - جمله‌ی عمومی: $t_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$
    - فرم: ...,۱,۳,۶,۱۰

    $\xrightarrow{\text{شکل}}$ 
  - یک در میان + و - دارد
    - با منفی شروع می‌شود ← $(-۱)^n$ را در فرمِ کلیِ جمله‌ها ضرب کن.
    - با مثبت شروع می‌شود ← $(-۱)^{n+۱}$ را در فرمِ کلیِ جمله‌ها ضرب کن.
  - فیبوناتچی
    - دو جمله‌ی اول: همیشه ۱ و ۱ هستند.
    - جمله‌ی عمومی: از جمله‌ی سوم به بعد: $t_n = t_{n-۱} + t_{n-۲}$
    - به زبان فارسی: هر جمله می‌شود مجموعِ دو جمله‌ی قبلیِ آن.
    - جمله‌ها: ...,۱,۱,۲,۳,۵,۸

دنباله‌ی حسابی

- **شناسایی**
  - اختلافِ هر دو جمله‌ی متوالی دنباله، عددی ثابت است به نامِ d. $d = t_n - t_{n-۱}$
  - علامتِ d:
    - $d > \circ$: دنباله صعودی است.
    - $d < \circ$: دنباله نزولی است.
- **وقتی سه جمله، یک دنباله‌ی حسابی‌اند**
  - آن سه جمله داده شده‌اند $\xrightarrow{\text{واسطه‌ی حسابی}}$ اگر c ,b ,a دنباله‌ی حسابی باشند: $b = \frac{a+c}{۲}$
  - یک ویژگی از آن سه جمله داده شده است ← آن‌ها را a-d ,a ,a+d بگیرید $\xrightarrow{\text{بعد}}$ اعمالِ ویژگی
- **در مثلث**
  - سه زاویه، دنباله‌ی عددی‌اند ← زاویه‌ی وسطی °۶۰ است.
  - سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه، دنباله‌ی عددی‌اند $\xrightarrow{\text{شکل}}$ 

- **جمله‌ی عمومی**
  - فرمول: $t_n = t_۱ + (n-۱)d$
  - داده شده است.
    - فرم: بر حسبِ n، درجه‌ی اول است.
    - d: همان ضریبِ n است؛ $t_n = \boxed{۳}\, n - ۵$
    - $t_۱$: به جایِ n، بذار ۱.
- **تعداد اعداد موجود در دنباله‌ی عددی:** $n = \frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{d} + ۱$

- **فرمول دو جمله و شماره:** (وقتی دو جمله از دنباله و شماره‌ی آن‌ها را داری)
  - فرمول: $t_m - t_n = (m-n)d$
  - کاربرد:
    - d رو پیدا کن.
    - هر جمله‌ی دنباله رو با داشتن d و یک جمله‌ی دیگر بنویس.
  - شناسایی در تست: وقتی تفاضل دو جمله از دنباله‌ی عددی رو دارید، یادِ این فرمول بیفتید!
- **قانون اندیس‌ها**
  - حالت کلی: $m+n=r+s \Rightarrow t_m + t_n = t_r + t_s$
  - حالت خاص: جمع اندیس‌ها مضربی از تعداد جمله‌هاست
    - $m+n=2r \Rightarrow t_m + t_n = 2t_r$
    - $m+n+r=3s \Rightarrow t_m + t_n + t_r = 3t_s$
  - شناسایی در تست: وقتی جمع چند جمله از دنباله‌ی حسابی را دارید، یادِ این فرمول بیفتید!
- **درج واسطه:** اگر بخواهی بین a و b دقیقاً m تا واسطه‌ی حسابی بذاری، آن‌وقت: $d = \frac{b-a}{m+1}$

دنباله‌ی هندسی

- **شناسایی**
  - حاصل تقسیم هر جمله بر جمله‌ی قبلیِ خودش، عددی ثابت است به نامِ r.
  - وضعیت r
    - $r > 1$: دنباله صعودی است.
    - $0 < r < 1$: دنباله نزولی است.
    - $r < 0$: دنباله نه صعودی است، نه نزولی.
- **وقتی سه جمله، یک دنباله‌ی هندسی‌اند**
  - آن سه جمله داده شده‌اند ← واسطه‌ی هندسی
    - به زبان ریاضی: $a,b,c \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} b^2 = ac$
    - به فارسی: مجذورِ وسطی مساوی ضربِ دو تای دیگر
  - یک ویژگی از آن سه جمله داده شده است ← جمله‌ها را $ar, a, \frac{a}{r}$ بگیر و ویژگی را برایِ آن‌ها اعمال کن.
- **جمله‌ی عمومی**
  - فرمول: $t_n = t_1 r^{n-1}$
  - داده شده است
    - فرم: بر حسب n به‌صورت یک تابع با فرمِ نمایی است؛ $t_n = 2^n \times 3$.
    - r: پایه‌ی n است به شرطی که ضریبِ n در توان ۱ باشد.
    - t_1: به جایِ n، بذار ۱.
    - r از راهی دیگر: به جای n یک‌بار بذارید ۱ و یک‌بار هم ۲. وقتی t_1 و t_2 درآمد، آن‌وقت: $r = \frac{t_2}{t_1}$
- **فرمول دو جمله و شماره:** (وقتی دو جمله از دنباله را به همراهِ شماره‌ی آن‌ها دارید)
  - فرمول: $\frac{t_m}{t_n} = r^{m-n}$
  - کاربرد در تست
    - وقتی نسبتِ دو جمله را دارید، یادِ این فرمول بیفتید.
    - پیدا کردنِ r با داشتن دو جمله از دنباله
    - نوشتن هر جمله‌ی دنباله با داشتنِ r و یک جمله‌ی دیگر از دنباله
- **قانون اندیس‌ها**
  - حالت کلی: $m+n=r+s \Rightarrow t_m t_n = t_r t_s$
  - حالت خاص: وقتی جمعِ اندیس‌ها مضربی از تعداد جمله‌هاست
    - $m+n=2k \Rightarrow t_m t_n = t_k^2$
    - $m+n+k=3s \Rightarrow t_m t_n t_k = t_s^3$
  - شناسایی در تست: وقتی ضرب چند جمله از دنباله را دارید، یادِ این فرمول بیفتید!
- **درج واسطه:** اگر بخواهی بینِ a و b، دقیقاً m تا واسطه‌ی هندسی بذاری: $r^{m+1} = \frac{b}{a}$
  - توجه: اگر m فرد باشد، باید a و b هم علامت باشند و در این حالت برایِ r دو جواب قرینه داریم.

فصل در یک نگاه

دستگاه مختصات

- **ناحیه‌ها**
  - اول: $x, y > 0$
  - دوم: $x < 0, y > 0$
  - سوم: $x, y < 0$
  - چهارم: $x > 0, y < 0$
- **محورهای مختصات**
  - روی محور xها ← y صفر است.
  - روی محور yها ← x صفر است.
  - روی هر محوری باشی، متغیر دیگر صفر است.
- **نیمسازهای نواحی**
  - نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم
    - معادله: $\boxed{y = x}$
    - نقطه‌ی روی نیمساز: $\boxed{(a, a)}$
  - نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم
    - معادله: $\boxed{y = -x}$
    - نقطه‌ی روی نیمساز: $\boxed{(a, -a)}$

فاصله‌ی...

- نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ تا $B(x_2, y_2)$: $\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$
- نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ تا مبدأ: $\boxed{OA = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$
- نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ تا $B(x_1, y_2)$ $\xrightarrow{\text{دو نقطه‌ی هم‌طول}}$ $\boxed{AB = |y_2 - y_1|}$
- نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ تا $B(x_2, y_1)$ $\xrightarrow{\text{دو نقطه‌ی هم‌عرض}}$ $\boxed{AB = |x_2 - x_1|}$

مختصات نقطه‌های مهم

- وسطِ دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ $\xrightarrow[\text{میانگین‌بگیر}]{\text{نقطه M}}$ $\boxed{M = \frac{A + B}{2} = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})}$
- **مرکز دایره:** اگر A و B دو سرِ قطر دایره‌ای باشند؛ $\boxed{O = \frac{A + B}{2}}$ $\xrightarrow{\text{شعاع دایره}}$ $\boxed{r = \frac{AB}{2}}$
- **متوازی الاضلاع:** اگر ABCD ، اسمِ متوازی الاضلاع شما باشد، آن‌وقت: $\boxed{A + C = B + D}$

شیب خط

- **پیدا کردنِ شیب خط از رویِ**
  - معادله‌ی ضمنی: $ax + by + c = 0$ $\xrightarrow{\text{شیب}}$ $\boxed{-\frac{a}{b}}$
  - معادله‌ی صریح: $y = mx + h$ $\xrightarrow{\text{شیب}}$ $\boxed{m}$
  - با داشتن دو نقطه از خط: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ $\xrightarrow[x_1 \neq x_2]{\text{شیب}}$ $\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$
  - با داشتن p (طول از مبدأ) و q (عرض از مبدأ) $\xrightarrow{\text{شیب}}$ $\boxed{-\frac{q}{p}}$
- **مفهوم**
  - |شیب| زیاد شود یعنی خط به محورyها نزدیک‌تر می‌شود.
  - $\boxed{\tan\theta = m}$، θ زاویه‌ای است که خط با جهتِ +ِ محور x ها می‌سازد.

خط

- **نوشتن معادله**
  - با داشتن شیب و یک نقطه: $A(x_1, y_1)$ و m $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$
  - با داشتن دو نقطه از خط: $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ $\xrightarrow[x_1 \neq x_2]{\text{معادله}}$ $\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$
  - با داشتن طول از مبدأ (p) و عرض از مبدأ (q) $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1}$
    - طول از مبدأ (p): نقطه برخورد خط با محور xها
    - عرض از مبدأ (q): نقطه برخورد خط با محور yها
    - مساحت مثلث حاصل با محورها: $\boxed{\frac{1}{2}|pq|}$
- **خط‌های خاص**
  - موازی محور yها (قائم)
    - معادله: $\boxed{x=t}$
    - شیب: $\boxed{\infty}$
  - موازی محور xها (افقی)
    - معادله: $\boxed{y=k}$
    - شیب: صفر
- **رسم خط:** دو نقطه از خط را پیدا کن (با عدد دادن به x یا y و محاسبه‌ی دیگری)، آن‌ها را در دستگاه مشخص کن و به هم وصل کن.

حالت‌های دو خط نسبت به هم

- **معادله‌ی هر دو ضمنی است** $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$
  - موازی با هم: $\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}}$
  - منطبق با هم: $\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$
  - متقاطع با هم: $\boxed{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}}$
  - عمود بر هم: $\boxed{aa'+bb'=0}$
- **معادله‌ی صریح هر دو داده شده است** $\begin{cases} y=mx+h \\ y=m'x+h' \end{cases}$
  - موازی با هم: $\boxed{m=m'}$
  - منطبق با هم: $\boxed{m=m', h=h'}$
  - متقاطع با هم: $\boxed{m\neq m'}$ $\xrightarrow{\text{زاویه‌ی دو خط متقاطع}}$ $\boxed{\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|}$
  - عمود بر هم: $\boxed{mm'=-1}$ یا $\boxed{m'=-\frac{1}{m}}$
- **دو خطِ خاص** (t و 't و k و 'k همگی عددثابت‌اند.)
  - اگر خطی با خطِ x=t
    - موازی باشد، آن‌وقت: $\boxed{x=t'}$ است.
    - عمود باشد، آن‌وقت: $\boxed{y=k'}$ است.
  - اگر خطی با خط y=k
    - موازی باشد، آن‌وقت: $\boxed{y=k'}$ است.
    - عمود باشد، آن‌وقت: $\boxed{x=t'}$ است.
  - به جوردیگه
    - خط موازی با خطِ افقی، افقی است و خط موازی با خط قائم هم حتماً قائم است.
    - خط عمود بر خط افقی، حتماً قائم است و برعکس.
- **تلاقی دو خط:** معادله‌ی دو خط را در یک دستگاه قرار بده و حل کن...
  - **همرسی سه خط:** دو تا از خط‌ها را به دلخواه در دستگاه قرار بده و حل کن، در آخر نقطه‌ی حاصل را در معادله‌ی خطِ سوم، قرار بده...

نوشتن اجزاء فرعی مثلث

ارتفاع (با شیب و نقطه نوشته می‌شود.)
- **شیب:** شیبِ ارتفاع، عکس و قرینه‌ی شیب ضلعی است که بر آن وارد می‌شود؛ $m_{AH} = -\dfrac{1}{m_{BC}}$
- **نقطه:** نقطه‌ای که ارتفاع از آن می‌گذرد، رأسی است که ارتفاع از آنجا کشیده شده.

میانه (با دو نقطه نوشته می‌شود.)
- **نقطه‌ی اول:** رأسی از مثلث است که میانه از آنجا کشیده شده.
- **نقطه‌ی دوم:** وسطِ ضلعی است که میانه به آنجا وارد می‌شود؛ مثلاً در میانه‌ی نظیر BC، وسطِ C و B .

عمودمنصف (با شیب و نقطه نوشته می‌شود.)
- **شیب:** عکس و قرینه‌ی شیبِ ضلعی است که عمودمنصف بر آن وارد می‌شود، درست مثل ارتفاع.
- **نقطه:** وسطِ ضلعی که عمودمنصفِ آن کشیده شده.

فاصله‌ی...

- **نقطه از خط** $\xrightarrow{\text{خط را ضمنی کن}} ax+by+c=0\,,\ A(x_0,y_0) \xrightarrow{\text{فرمول فاصله}} \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- **دو خطِ موازی** $\xrightarrow[\text{ضریب x و y را هم یکی کن}]{\text{هر دو را ضمنی کن}} ax+by+c=0\,,\ ax+by+c'=0 \xrightarrow{\text{فرمول فاصله}} \dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- **خاص‌ها**
  - مبدأ تا خطِ ضمنی $ax+by+c=0$: $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  - نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ تا خطِ افقی $y=k$: $|y_0-k|$
  - نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ تا خطِ قائم $x=t$: $|x_0-t|$
  - نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ تا
    - محور xها: $|y_0|$
    - محور yها: $|x_0|$
- **اندازه‌ی ارتفاع AH در مثلث ABC:** معادله‌ی BC را بنویس و فاصله‌ی A را تا آن حساب کن...

فصل در یک نگاه

روش‌های حلِ معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$

- **تجزیه:** وقتی ضریبِ x^2، مساوی ۱ بوده و ریشه‌ها صحیح باشند: $x^2+mx+n=0 \Rightarrow (x+\ \ )(x+\ \ )=0$
  - جمعشان m
  - ضربشان n
- **مربع کامل:** اول از ضریبِ x^2 فاکتور بگیر و بعد عبارتِ درجه‌ی دوم رو مربع کامل کن...

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=0 \Rightarrow a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}]+c=0$$

نصف کن — به‌توان ۲

$$\Rightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c \rightarrow \text{حل کن}$$

- **روش Δ:** $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$
  - ریشه‌ها:
    - $\Delta>0$: $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$
    - $\Delta=0$: $\boxed{x=\frac{-b}{2a}}$
  - تعداد ریشه‌ها:
    - $\Delta>0$: دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
    - $\Delta=0$: یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
    - $\Delta<0$: ریشه‌ی حقیقی ندارد.
- **حالت‌های خاص**
  - جمع ضرایب، مساویِ صفر بشود $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+c+b=0 \rightarrow 1 \text{ و } \frac{c}{a}}$
  - ضریب اولی + ضریب آخری = ضریب وسطی $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+c=b \rightarrow -1 \text{ و } -\frac{c}{a}}$
  - عدد ثابت ندارد $\xrightarrow{\text{فاکتوربگیر}}$ $ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0$ $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{0 \text{ و } -\frac{b}{a}}$

سهمی $y=ax^2+bx+c$

- **مختصاتِ رأس**
  - $\boxed{-\frac{b}{2a}}$
  - $\boxed{-\frac{\Delta}{4a}}$
- **تلاقی با محورxها**
  - $\Delta>0 \leftarrow$ در دو نقطه محور را قطع می‌کند.
  - $\Delta<0$ (هیچ‌نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0 \leftarrow$ قطع نمی‌کند: همواره بالای محور
    - $a<0 \leftarrow$ قطع نمی‌کند: همواره پایین محور
  - $\Delta=0$ (یک‌نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0 \leftarrow$ مماس است و بالای محور
    - $a<0 \leftarrow$ مماس است و پایین محور
- **علامتِ a**
  - $a>0 \leftarrow$ سهمی رو به بالا است:
  - $a<0 \leftarrow$ سهمی رو به پایین است:
- **محور تقارن**
  - معادله: $\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$
  - تعداد: یکی
  - ویژگی: گذرنده از رأس سهمی
- **مماس بر**
  - محورxها: یعنی $\Delta=0$ بوده.
  - خطِ افقی $y=k$: یعنی $\boxed{-\frac{\Delta}{4a}=k}$ بوده.
  - خطِ کلی $y=mx+h$: دو ضابطه را برابرِ هم قرار دهید، یعنی $ax^2+bx+c=mx+h$ و معادله‌ی حاصل را ساده کنید و Δ ی آن را برابرِ صفر بگذارید.
- **تلاقی با محور yها**
  - تعداد $\leftarrow$ همواره یکی
  - مختصات: $(0,c)$

روابط بین ریشه‌ها

- **S و P**
  - **مقدار و مفهوم**
    - $\boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$
    - $\boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$ اگر منفی باشد ← حتماً معادله، دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
  - **فهمیدن علامت ریشه‌ها**
    - $P>0$ ← دو ریشه‌ی هم علامت دارد
      - $S>0$ ← ریشه‌ها مثبت‌اند.
      - $S<0$ ← ریشه‌ها منفی‌اند.
    - $P<0$ ← حتماً دو ریشه‌ی غیرهم‌علامت دارد
      - $S>0$ ← قدرمطلقِ ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تره: $-2, 4$
      - $S<0$ ← قدرمطلقِ ریشه‌ی منفی بزرگ‌تره: $1, -3$
  - **نوشتنِ معادله با داشتنِ S و P:** $\boxed{x^2-Sx+P=0}$
- **قرار است رابطه‌ای بین ریشه‌ها پیدا کنی**
  - **رابطه‌های معروف**
    - $\boxed{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P}$
    - $\boxed{\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP}$
    - $\boxed{|\alpha-\beta|=\sqrt{S^2-4P}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$
    - $\boxed{\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm2\sqrt{P}}}$ با شرط $\alpha,\beta>0$
  - **رابطه‌های غیر معروف:** عبارت داده‌شده را با مخرج مشترک‌گیری و... ساده کن تا به عبارت‌های معروف برسد...
- **رابطه‌ای بین ریشه‌ها داده شده است**
  - **حالت کلی:** S و P رو بر حسبِ α و β بنویس و مقدارشون رو هم پیدا کن، بعد هم رابطه‌ی داده شده رو بر حسب α و β بنویس، حالا همه‌ی این‌ها رو با هم دستگاه کن...
  - **حالت‌های خاص**
    - یکی از ریشه‌ها k برابر دیگری است ← $\boxed{\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}}$
    - یکی از ریشه‌ها، k واحد از دیگری بزرگ‌تر است ← $\boxed{\Delta=k^2a^2}$
- **اخطار جدی** ← در همه‌ی تست‌هایِ S و P، بعد از پیدا کردن جواب، یادتان باشد Δ را کنترل کنید! اگر به ازای هر پارامتری $\Delta<0$ شود، یعنی ریشه نداشته‌اید و حرف درباره‌ی S و P غلط است!

معادله‌های ساده

- **درجه‌ی اول**
  - **فرم کلی:** $\boxed{ax+b=0}$ ، $a\neq0$
  - **جواب:** $\boxed{x=-\frac{b}{a}}$
  - **تعیین علامت:**

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

- **درجه‌ی دوم**
  - **فرم کلی:** $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ ، $a\neq0$
  - **جواب:** تجزیه کن یا روش Δ ← $\Delta\geq0$ $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$
  - **تعیین علامت**
    - $\Delta>0$:

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

    - $\Delta=0$:

x		$-\frac{b}{2a}$	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

    - $\Delta<0$: همواره موافق علامتِ a بوده و هیچ‌گاه هم صفر نمی‌شود.
- **$x^2=k$**
  - $k>0$ ← دو ریشه‌ی حقیقی دارد: $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{k}}$ ؛ مثل $x^2=4$.
  - $k=0$ ← یک ریشه‌ی مضاعفِ صفر دارد.
  - $k<0$ ← ریشه ندارد؛ مثل $x^2=-3$.
  - **حالت کلی‌تر** ← اگر $u^2=k$ و u عبارتی بر حسبِ x باشد هم، بررسی ریشه‌ها همین‌گونه است؛ مثل $(2x+1)^2=9$.
- **جمعِ چند جمله‌ی غیرمنفی، مساوی صفر شده است** ← هر کدام را تک تک، مساوی صفر بذار. بسته به توان زوج، رادیکال فرجه‌ی زوج و قدرمطلق، عبارت‌های غیرمنفی هستند: $|\bigcirc|$ ، $\sqrt[\text{زوج}]{\bigcirc}$ ، $(\bigcirc)^{\text{زوج}}$.
- **که با تغییر متغیر حل می‌شوند**
  - **حالت کلی:** عبارتی در معادله، مشترک است ← آن را A بگیر.
  - **حالت‌های خاص**
    - $\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}$ ← $\boxed{x^n=A}$ بگیر ← $aA^2+bA+c=0$
    - $\boxed{ax+b\sqrt{x}+c=0}$ ← $\boxed{\sqrt{x}=A}$ بگیر ← $aA^2+bA+c=0$

فصل در یک نگاه

معادله‌های گویا و گنگ

معادله‌ی گویا

- **مفهوم:** x در مخرج داریم ← معادله کسری است.
- **روش کلی حل:** همه‌ی جمله‌ها رو بیار یک طرف تساوی، بعدش مخرج مشترک بگیر و صورت کسر رو مساویِ صفر بذار...
- **میان‌بُر:** گاهی به یک تناسب می‌رسیم که با طرفین وسطین، حلش می‌کنیم.
- **بررسی:** حتماً باید xهای به‌دست آمده در دامنه باشند ←(به‌جوردیگه) مخرجِ هیچ کسری را صفر نکنند!
- **ساده کردن یک عامل**
  - از صورت و مخرج یک کسر ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم، قابل قبول نیست.
  - از صورت دو کسر مختلف در دو طرفِ تساوی ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم قبول است.
  - از مخرج دو کسر مختلف در دو طرف تساوی ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم قبول نیست.
- **نسبت طلایی**
  - فرم معادله‌ای: $x^2 = x + 1$ ، $\dfrac{x+1}{x} = x$
  - مقدار نسبت: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$
  - مقدار تقریبی: $1/618$

معادله‌ی گنگ

- **مفهوم:** x در زیر رادیکال داریم ← معادله رادیکال‌دار است.
- **روش کلی حل:** رادیکال رو یک طرفِ تساوی نگه دار و بقیه رو به سمت دیگه منتقل کن.حالا دو طرف رو به توان برسان (به توانِ فرجه) تا رادیکال حذف شود. بعدش معادله‌ی معمولی رو حل کن.
- **بررسی:** xهای به‌دست آمده باید عبارتِ زیر و مقابل هیچ رادیکالِ فرجه‌ی زوجی را منفی نکنند. ←(به‌جوردیگه) xهای به‌دست آمده باید درمعادله‌ی اصلی، قبل از توان رساندن، صدق کرده و مشکلی ایجاد نکنند.
- **چندرادیکالی‌ها:** هر بار باید رادیکال رو تنها کنی و به توان برسانی تا هیچ رادیکالی باقی نماند! آخرش هم بررسی!

نامعادله

درجه‌ی اول

- **فرم کلی:** $\boxed{ax+b \geq 0}$ یا $\boxed{ax+b \leq 0}$ یا $\boxed{ax+b > 0}$ یا $\boxed{ax+b < 0}$
- **روش حل:** عدد ثابت را به سمتِ دیگر منتقل کن. بعد هم دو طرف را بر ضریبِ x تقسیم کن.
  - ضریبِ $x > 0$ ← جهت حفظ می‌شود!
  - ضریبِ $x < 0$ ← جهت تغییر می‌کند!

درجه‌ی دوم

- **فرم کلی:** $\boxed{ax^2+bx+c \geq 0}$ یا $\boxed{ax^2+bx+c > 0}$ یا $\boxed{ax^2+bx+c \leq 0}$ یا $\boxed{ax^2+bx+c < 0}$
- **روش حل:** وقتی همه‌ی جمله‌ها را آوردی یک طرفِ نامساوی، عبارت درجه‌ی دوم حاصل را تعیین علامت کن و محدوده‌ی قابل قبول را اعلام کن ←(به‌جوردیگه) (همه‌ی جمله‌ها بیان یک طرف ← ریشه‌ها را پیداً کن ← جدول تعیین علامت ← محدوده)
- **همواره یک علامت دارد**
  - $ax^2+bx+c > 0 \leftarrow a > 0, \Delta < 0$
  - $ax^2+bx+c < 0 \leftarrow a < 0, \Delta < 0$
  - $ax^2+bx+c \geq 0 \leftarrow a > 0, \Delta \leq 0$
  - $ax^2+bx+c \leq 0 \leftarrow a < 0, \Delta \leq 0$

در حالت کلی

در حالت کلی: همه‌ی جمله‌ها را باید بیاورید یک طرف نامساوی. بعد هم عبارتِ حاصل را تعیین علامت کنید، آخر هم محدوده‌ی قابل قبول را پیدا کنید.

(!) موقع تعیین علامت، به بسته‌های توان زوج، رادیکال‌های فرجه‌ی زوج و قدرمطلق‌ها کاری نداشته باشید، این‌ها صفر می‌شوند؛ ولی منفی نه!

قدرمطلق‌دارها

- $|u| \geq k \xrightarrow{k>0} u \geq k$ یا $u \leq -k$
- $|u| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq u \leq k$

علامتِ مساوی‌ها، همه با هم هستند یا همه با هم نیستند!

نامساوی‌ها

- **عدد ثابتی را به دو طرفِ نامساوی**
  - **جمع و منها کنیم** ← ایرادی ندارد.
  - **ضرب و تقسیم کنیم**
    - مثبت باشد ← ایرادی ندارد.
    - منفی باشد ← جهت عوض می‌شود.
- **دو طرف نامساوی را**
  - **به توان یا فرجه‌ی فرد برسانیم** ← ایرادی ندارد: $\left.\begin{array}{l} a<b\Rightarrow a^{3}<b^{3} \\ a<b\Rightarrow \sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b} \end{array}\right\}$
  - **به توان زوج برسانیم**
    - هر دو مثبت باشد ← جهت حفظ می‌شود: $0<a<b\Rightarrow a^{2}<b^{2}$
    - هر دو منفی باشد ← جهت تغییر می‌کند: $a<b<0\Rightarrow a^{2}>b^{2}$
  - **فرجه‌ی زوج بگیریم** $\xrightarrow{\text{هر دو مثبت باشد}}$ ایرادی ندارد، فقط برای دو عددِ حاصل قدرمطلق بذار...
  - **معکوس کنیم**
    - هر دو مثبت‌اند / هر دو منفی‌اند ← جهت عوض می‌شود.
    - یکی مثبت و یکی منفی است. ← جهت حفظ می‌شود.
- **نامساوی دوگانه را قدرمطلق کنیم** $\boxed{a<x<b}$ یا $\boxed{x<a \text{ یا } x>b}$
  - میانگینِ a و b را از سه طرفِ نامساوی کم کنید...
  - **فرمولی**
    - $\boxed{a\le x\le b\Rightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\le \frac{b-a}{2}}$
    - $\boxed{x\le a \text{ یا } x\ge b\Rightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\ge \frac{b-a}{2}}$

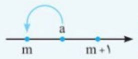
فصل در یک نگاه

تابع $f: A \to B$

- **مدل‌های نمایش**
  - **با بیانِ فارسی** $\xrightarrow{\text{بررسی تابع بودن در تست}}$ هیچ عضوِ اولی نباید به دو تا عضو از مجموعه‌ی دوم نسبت داده شود!
  - **با زوج مرتب** $\xrightarrow{\text{بررسی تابع بودن در تست}}$ اگر دو زوج، مؤلفه‌ی اولِ تکراری دارند، مؤلفه‌ی دومشان را مساوی هم بذار...
  - **با نمودار پیکانی** $\xrightarrow{\text{بررسی تابع بودن}}$ از هر عضوِ اولی، دقیقاً یک فلش خارج شده باشد.
  - **با نمودار مختصاتی** $\xrightarrow{\text{بررسی تابع بودن}}$ هیچ دو نقطه‌ای زیر هم نداشته باشد.
  - **با نمودار تابع** $\xrightarrow{\text{بررسی تابع بودن}}$ هر خط موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
- **ضابطه‌ی تابع**
  - **بررسی تابع بودن**
    - **اثبات در حالت کلی:** ضابطه‌ی داده‌شده را یک بار برای x و y_1 و بار دیگر برایِ x و y_2 می‌نویسیم و از این دو تا باید بتوانیم نتیجه بگیریم $y_1 = y_2$، وگرنه تابع نیست...
    - **نشان دادن تابع نبودن** $\xrightarrow{\text{بهترین راه}}$ **مثال نقض:** ارائه‌ی یک x که موجب به دست آمدنِ چندین y شود!
      - $\xrightarrow{\text{کاندیداهای تابع نبودن}}$ وقتی y در ضابطه‌ی داده شده
        - براکت دارد.
        - قدرمطلق دارد.
        - توان زوج دارد.
        - درگیر تابع‌های مثلثاتی است.
  - **کار با ضابطه**
    - $\boxed{(a,b) \in f}$ یعنی
      - $\boxed{f(a)=b}$
      - نقطه‌ی $\boxed{(a,b)}$ روی نمودار تابع است.
    - $\boxed{f(x)= \ldots}$ داده شده و $f(\alpha)$ خواسته شده $\leftarrow$ در تابع به جایِ تمامِ x ها بگذارید α.
  - **برخورد تابع**
    - **با محور xها** $\leftarrow$ تابع را مساویِ صفر بذار $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ اگر کسری است، فقط صورتش مساوی صفر باشد.
    - **با محور yها** $\leftarrow$ به جایِ تمام x ها بذار صفر.
    - **با تابعِ دیگر** $\leftarrow$ ضابطه‌ها را مساویِ هم بذار و معادله حل کن.

$\boxed{f(x)=g(x)}$
↓
برخورد تابعِ f با g

- **جزء صحیح** $\boxed{y=[x]}$ (حاصل این تابع همواره عدد صحیح است.)
  - **پیدا کردنِ جزء صحیحِ عددِ a**
    - $a \in \mathbb{Z} \rightarrow [a]=a$
    - $a \notin \mathbb{Z} \rightarrow [a]$ می‌شود اولین عدد صحیحِ قبلِ a.
    - **حالت کلی:** $\boxed{m \le a < m+1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} [a]=m}$

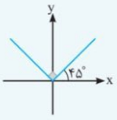


  - **ویژگی‌ها**
    - حاصلِ براکت را داریم
      - $\boxed{[u]=k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \le u < k+1}$
      - $\boxed{[u]=t \xrightarrow{t \notin \mathbb{Z}} \text{امکان ندارد}}$
    - عدد منهای جزء صحیح خودش: $\boxed{0 \le u-[u] < 1}$: صفر شدن یعنی $u \in \mathbb{Z}$.
    - خارج شدن عدد صحیح از براکت: $\boxed{[x+n]=[x]+n}$: $n \in \mathbb{Z}$
  - **رسم:** برای $y=[ax]$ و $a > 0$ از مبدأ با نقطه‌ی پُر شروع کن و یک نیم خط به طول $\frac{1}{a}$ به سمت راست بکش که اون سرش بازه، بعد یک واحد برو بالا و تکرار همین قضیه... برای $a < 0$ فقط سمتِ حرکت می‌شه چپ...

انواع تابع

- **چند جمله‌ای:** $\boxed{f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\ldots}$ که $n \in \mathbb{N}$ و ضرایب عددهای حقیقی‌اند.
- **ثابت:** $\boxed{f(x)=c}$ ؛ هر چی بهش می‌دی، خروجی‌اش عددِ ثابتِ c است $\xrightarrow{\text{نمودار}}$ خطی موازی محور xها
- **همانی:** $\boxed{f(x)=x}$ ؛ هر چی بهش می‌دی، خروجی‌اش همان عدد است $\xrightarrow{\text{نمودار}}$ نیمساز ربع اول و سوم
- **خطی:** $\boxed{f(x)=ax+b}$ ؛ عبارتی درجه اول بر حسب x است $\xrightarrow{\text{نمودار}}$ یک خطِ راست

- **قدرمطلق:** $f(x)=|u|$
  - **ضابطه:** $|u|=\begin{cases} u & u\geq 0 \\ -u & u<0 \end{cases}$
  - **شکل:** $y=|x|$ می‌شود



  - **مفهوم:** حاصلِ قدرمطلق همواره نامنفی است.
- **قطعه‌ای** $\xrightarrow{\text{فرم}}$ $f(x)=\begin{cases} g(x) & , \\ h(x) & , \end{cases}$ محدوده‌ی x
  - **بررسی تابع بودن:** اگرِ x مشترکی در محدوده‌ها هست باید به ازای هر ضابطه، خروجیِ یکسان داشته باشد.
  - **یافتن مقدار:** برای یافتن $f(\alpha)$، باید اول ببینی α در کدام محدوده صدق می‌کند، در هر کدام که بود α را به آن ضابطه بدهید...
- **فرمولی‌ها**
  - **مربع به ضلع a**
    - محیط $4a$
    - مساحت a^2
  - **دایره به شعاع r**
    - محیط $2\pi r$
    - مساحت πr^2
  - **کره به شعاع r** $\xrightarrow{\text{حجم}}$ $\frac{4}{3}\pi r^3$
  - **مجموع زوایای n ضلعی محدب:** $(n-2)180^\circ$

دامنه‌ی تابع D

- **مفهوم:** مجموعه‌ی تمام x هایی که تابع می‌تواند آن‌ها را قبول کند و به ازایِ آن‌ها یکِ y حقیقی تحویل دهد.
- **پیدا کردن دامنه از روی مدل‌های مختلف نمایش تابع** :نمایش با
  - **زوج مرتب:** همه‌ی مؤلفه‌هایِ اولِ زوج مرتب‌ها را بریز در یک مجموعه...
  - **پیکانی:** همه‌ی عضوهای موجود در دایره‌ی اول را بریز در یک مجموعه...
  - **نمودار مختصاتی:** همه‌ی طول نقطه‌های موجود را بریز در یک مجموعه...
  - **نمودار تابع:** شکل تابع را روی محور xها تصویر کن و بازه‌ی حاصل را اعلام کن...
- **پیدا کردن دامنه از روی ضابطه‌ی تابع**
  - **تابع کسری:** مخرج نباید صفر شود
    - $\frac{\square}{u} \xrightarrow{\text{دامنه}} \mathbb{R}-\{x\,|\,u=0\}$
    - **مثلثاتی‌ها**
      - $\tan u \xrightarrow{\text{دامنه}} u\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$
      - $\cot u \xrightarrow{\text{دامنه}} u\neq k\pi$
    - اخطار: برای یافتن دامنه، هیچ کسری را ساده نکنید، تغییر هم ندهید!
  - **تابع رادیکالی**
    - فرجه فرد است ← محدودیتی ندارد، اگر هر مشکلی هست مالِ زیر رادیکاله!
    - فرجه زوج است ← $\sqrt[\text{زوج}]{u} \xrightarrow{\text{دامنه}} u\geq 0$
  - **چندضابطه‌ای:** $y=\begin{cases} g(x) & , A \\ h(x) & , B \end{cases} \xrightarrow{\text{دامنه}} (D_g\cap A)\cup(D_h\cap B)$
  - **لگاریتمی:** $y=\log_B A \xrightarrow{\text{دامنه}} A,B>0,\ B\neq 1$

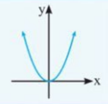
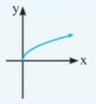
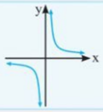
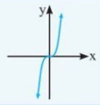
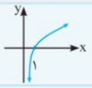
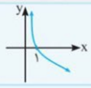
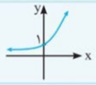
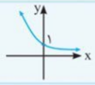
دامنه‌ی محدود شده توسط گفته‌ی تست

- **تابع کسری**
  - اگر گفت دامنه $\mathbb{R}$ است ← $\Delta<0$ مخرج
  - اگر گفت دامنه فقط یک عضو به نامِ k را ندارد
    - $\Delta=0$ مخرج
    - $x=k$، مخرج کسر را صفر می‌کند.
  - اگر گفت دامنه فقط دو عضوِ α و β را ندارد. ← $x=\alpha$ و $x=\beta$ مخرج کسر را صفر می‌کنند.
- **اگر گفت رادیکالیِ فرجه‌ی زوج:** دامنه $\mathbb{R}$ است
  - عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است.
  - حالت خاص: $\begin{matrix} \Delta\leq 0 \\ a>0 \end{matrix} \leftarrow \underbrace{y=\sqrt{ax^2+bx+c}}_{D=\mathbb{R}}$

بُرد تابع R

- **مفهوم:** مجموعه‌ی تمامیِ yهایی است که از xهایِ ورودی تابع، دریافت کرده‌ایم.
- **پیدا کردن برد از روی مدل‌های مختلف نمایش تابع**
  - **زوج مرتب:** همه‌ی مؤلفه‌های دومِ زوج مرتب‌ها را بریز در یک مجموعه...
  - **پیکانی:** همه‌ی عضوهای موجود در دایره‌ی دوم را بریز در یک مجموعه...
  - **نمودار مختصاتی:** همه‌ی عرض‌های نقطه‌های موجود را بریز در یک مجموعه...
  - **نمودار تابع:** شکل تابع را روی محور yها تصویر کن و بازه‌ی حاصل را اعلام کن...
- **برد تابع از روی ضابطه**
  - **تابع چندجمله‌ای**
    - درجه فرد: بُردش $\mathbb{R}$ است.
    - درجه دو: $y=ax^{۲}+bx+c$
      - $a>۰$ است. $R=[-\frac{\Delta}{۴a},+\infty)$
      - $a<۰$ است. $R=(-\infty,-\frac{\Delta}{۴a}]$
  - **عبارتِ مثبتِ کنار عددِ a**
    - عبارت‌های مثبت: $|u|$ و $u^{\text{زوج}}$ و $\sqrt[\text{زوج}]{u}$
    - عبارتِ مثبت، ضریب مثبت دارد: $a+$(عبارت مثبت) $\rightarrow R=[a,+\infty)$
    - عبارتِ مثبت، ضریب منفی دارد: $a-$(عبارت مثبت) $\rightarrow R=(-\infty,a]$
  - **تابع هموگرافیک**
    - ضابطه: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$
    - شرط: $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$
    - بُرد: $R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$
  - **معروف‌ها**
    - مثلثاتی‌ها
      - سینوس و کسینوس: $R=[-۱,۱]$
      - تانژانت و کتانژانت: $R=\mathbb{R}$
    - نمایی $y=a^x$: $R=\mathbb{R}^+$
    - لگاریتمی $y=\log_a x$: $R=\mathbb{R}$
  - **نیم خط:** بُرد $y=ax+b$ با شرطِ
    - $x>k$
      - $a>۰$: $(ak+b,+\infty)$
      - $a<۰$: $(-\infty,ak+b)$
    - $x<k$
      - $a>۰$: $(-\infty,ak+b)$
      - $a<۰$: $(ak+b,+\infty)$

شکل تابع‌های معروف

$y=x^{۲}$	$y=\sqrt{x}$	$y=\frac{۱}{x}$	$y=x^{۳}$	$y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$
				
$y=\cos x$ در $[۰,۲\pi]$	$y=\log_a x$ ، $a>۱$	$y=\log_b x$ ، $۰<b<۱$	$y=a^x$ ، $a>۱$	$y=b^x$ ، $۰<b<۱$
				

انتقال و کشش

- $f(x)+a$
  - $a>0$: $f(x)$ را a واحد ببَر بالا.
  - $a<0$: $f(x)$ را a واحد بیار پایین.
- $f(x+a)$
  - $a>0$: $f(x)$ را a واحد به سمت چپ منتقل کن.
  - $a<0$: $f(x)$ را a واحد به سمت راست منتقل کن.
- $kf(x)$ $\xrightarrow{k>0}$ بدون هیچ تغییری در xها، $f(x)$ را از بالا و پایین بکش یا فشرده کن تا بُرد آن k برابر شود.
- $-f(x)$: $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کن...
- $|f(x)|$
  - قسمت‌های بالایی $f(x)$ نسبت به محور xها: سرِ جای خود می‌مانند.
  - قسمت‌های پایینی $f(x)$ نسبت به محور xها: نسبت به محور xها قرینه کن.
- $f(kx)$ (طول نقطه‌ها همگی در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود.)
  - $k>0$: هر نقطه‌ای رویِ $y=f(x)$، از (a,b) می‌شود $(\frac{a}{k},b)$
    - $k>1$: انقباضِ $y=f(x)$ در راستای محور xها
    - $0<k<1$: انبساطِ $y=f(x)$ در راستای محور xها
  - $k<0$: در حالت $k>0$ رسم کن، آخر سر تقارن نسبت به محور yها بده.
- $f(|x|)$: هر بخشی از $y=f(x)$ که سمت چپ محور yهاست حذف کن و سمت راستِ تابع و قرینه‌ی آن نسبت به محور yها را به عنوان جواب اعلام کن.

تابع یک به یک

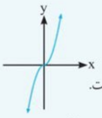
- **تشخیص با مدل‌های مختلف نمایش تابع**
  - زوج مرتب: در زوج‌های متفاوت، نه مؤلفه‌ی اولِ تکراری داشته باشیم و نه مؤلفه‌ی دومِ تکراری!
  - پیکانی
    - از هر عضو دایره‌ی اول، دقیقاً یک فلش خارج شود.
    - به هر عضو دایره‌ی دوم، دقیقاً یک فلش وارد شود.
  - نمودار مختصاتی (نقطه‌های هم‌طول و هم‌عرض ممنوع است!)
    - هیچ دو نقطه‌ای زیر هم نداشته باشیم.
    - هیچ دو نقطه‌ای روبه‌روی هم نداشته باشیم.
  - نمودار تابع
    - هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.
    - هر خط موازی محور yها، نمودار تابع را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.
- **روش کلیِ اثبات:** ضابطه‌ی داده‌شده را یک بار برای x_1 و y می‌نویسیم و یک بار هم برای x_2 و y و از این دو رابطه سعی می‌کنیم نتیجه بگیریم $x_1=x_2$. اگر تنها نتیجه این نباشد، یعنی تابع یک‌به‌یک نیست.
- **شناخت**
  - تابع‌های یک به یک
    - نمایی و لگاریتمی: $y=\log_c(ax+b)$ و $y=a^{mx+n}$
    - رادیکالی: $y=\sqrt{ax+b}$ و $y=\sqrt[3]{ax+b}$
    - هموگرافیک: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$.
  - تابع‌های غیر یک به یک
    - مثلثاتی‌ها: همه‌شون یک‌به‌یک نیستند!
    - چندجمله‌ای درجه ۲ $\xrightarrow{y=ax^2+bx+c}$ مگر بازه بدهند $\xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین بازه}}$ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ ، $[-\frac{b}{2a},+\infty)$
    - قدرمطلقی: $y=|ax+b|$ $\xrightarrow{\text{مگر}}$ بازه بدهند $\xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین بازه}}$ $(-\infty,-\frac{b}{a}]$ ، $[-\frac{b}{a},+\infty)$
    - براکتی: $y=[ax+b]$
- **روش هندسی:** تابع را رسم کن و از روی نمودار، یک‌به‌یک بودن یا نبودنش را تعیین کن!
- **یک‌به‌یک کردنِ تابع غیر یک‌به‌یک:** کافی است محدوده‌ای از دامنه‌ی $f(x)$ را در نظر بگیرید که تابع در آن محدوده یک‌به‌یک و بعد هم وارون‌پذیر گردد.

وارون تابع

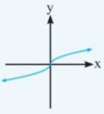
- **مفهوم**
  - **وارون تابع:** جایِ x و yها را عوض کنی...
  - **تابعِ وارون:** اگر وارونِ تابع، خودش تابع باشد، به آن تابع وارون می‌گوییم $\xrightarrow{\text{جوردیگه}}$ **اگر f وارون‌پذیر باشد، تابع وارون دارد.**
- **وارون از روی مُدل‌ها**
  - **زوج مرتب:** جای تمامِ مؤلفه‌های اول و دوم را با هم عوض کن. $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\boxed{R_f = D_{f^{-1}}}$ و $\boxed{D_f = R_{f^{-1}}}$
  - **پیکانی:** جهتِ تمامِ فلش‌ها را برعکس کن.
  - **نمودار مختصاتی:** جایِ طول و عرضِ همه‌ی نقطه‌های موجود را عوض کن و نقطه‌های جدیدِ حاصل را پررنگ کن!
  - **نمودار تابع:** شکل تابع را نسبت به خط $y = x$، قرینه کن...
- **شرط یک‌به یک‌بودن:** f باید یک‌به‌یک باشد $\xrightarrow{\text{جوردیگه}}$
  - نه xِ تکراری داشته باشیم و نه yِ تکراری!
  - هر خط موازی محور xها و yها نمودار تابع را در **حداکثر یک نقطه** قطع کند.
- **پیدا کردن ضابطه‌ی وارون** $\boxed{y = f(x)}$
  - **مرحله‌ی ۱:** جایِ x و y را عوض کنید.
  - **مرحله‌ی ۲:** y را بر حسبِ x پیدا کنید $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ y را تنها کن و معادله حل کن تا y دربیاد...
  - **مرحله‌ی ۳:** در معادله‌ی آخر، به جای y بذار $f^{-1}(x)$.
  - **مرحله‌ی ۴:** اگر برد f محدود است، بازه‌ی برد f را کنار ضابطه‌ی f^{-1} بذار.
- **معروف‌ها**
  - **تابع خطی:** $\boxed{y = ax + b} \xrightarrow{\text{وارون}} \boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}}$
  - **تابع هموگرافیک:** $\boxed{y = \dfrac{ax + b}{cx + d}} \xrightarrow[\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}]{\text{وارون}} \boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{dx - b}{-cx + a}}$
  - **دو خط وارون هم:** اگر $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ وارونِ هم باشند، آن‌وقت: $\boxed{\dfrac{a}{b'} = \dfrac{b}{a'} = \dfrac{c}{c'}}$.
  - **تابع خطی زیر رادیکال:** $\boxed{y = k \pm \sqrt{ax + b}}$
    - ضریب رادیکال مثبت است: $x \geq k$
    - ضریب رادیکال منفی است: $x \leq k$
    - $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{(x - k)^2 - b}{a}}$
  - **تابع درجه دو:** $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$
    - $a = 1$ ← $\boxed{y = x^2 + mx + n}$
      - $x \geq -\dfrac{m}{2} \xrightarrow{\text{وارون}} \boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{-m + \sqrt{\Delta + 4x}}{2}}$
      - $x \leq -\dfrac{m}{2} \xrightarrow{\text{وارون}} \boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{-m - \sqrt{\Delta + 4x}}{2}}$
    - $a \neq 1$ ← a را از کل عبارت فاکتور بگیر و با فرمول بالا وارون پیدا کن، آخر سر به جای x، بذار $\dfrac{x}{a}$.
- **روش تستی** (از روی $f(x)$...)
  - **$f^{-1}(\alpha)$ خواسته شده:** گزینه‌ای درست است که اگر آن را در $f(x)$ بگذاریم، بدهد α.
  - **ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ خواسته شده** ← به x در $f(x)$ عددی دلخواه بدهید تا β حاصل شود. حالا گزینه‌ای درست است که به ازای β به شما همان xِ دلخواه اولیه را بدهد.

تابع $y=x^3$

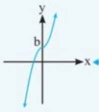
- **دامنه و بُرد:** $D=R=\mathbb{R}$
- **شکل تابع:** یک «لـ» که روی محور x ها در مبدأ نشسته است!
  - نمودار منحنی، نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.



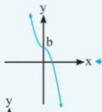
- **ویژگی‌های تابع**
  - یک‌به‌یک است.
  - وارون‌پذیر است. شکل $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$
  - صعودی اکید است.



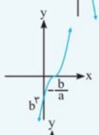
- **هم‌خانواده‌ها**
  - $y=ax^3+b$
    - $a>0$ شکل تقریبی



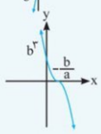
    - $a<0$ شکل تقریبی



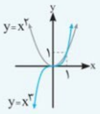
    - وارون $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-b}{a}}$
  - $y=(ax+b)^3$
    - $a>0$ شکل تقریبی



    - $a<0$ شکل تقریبی



    - وارون $f^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-b}{a}$
- **ارتباط با x^2** ← هر دو که از مبدأ شروع می‌شوند، x^3 از زیر x^2 حرکت می‌کند تا نقطه‌ی به طول ۱ که به هم برخورد می‌کنند، بعد x^3 می‌رود بالایِ x^2...



اعمال جبری روی f و g

- **تأثیر بر ضابطه**
  - $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$
  - $(f.g)(x)=f(x)g(x)$
  - $(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$
  - $(kf)(x)=kf(x)$
- **تأثیر بر دامنه** (تابع ترکیبی)
  - جمع و منها و ضرب: $D_{f\pm g}=D_{fg}=D_f\cap D_g$
  - تقسیم: $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$
    - x های مشترکِ دو تابع به جز آن‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند.
  - ضرب عدد: دامنه تغییر نمی‌کند. $D_{kf}=D_f$
  - مسیر در کنکور: بهتر است دامنه‌ی دو تابع را جداگانه پیدا کرده و سپس دامنه‌ی تابع ترکیبی را به‌دست آورید...
- **تابع ترکیبی به ازای عددِ α خواسته شده:** α را جداگانه به هر تابع بدهید و حاصل آن را جای‌گذاری کنید.
  - جوردیگه $(\dfrac{f+kg}{hg})(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)+kg(\alpha)}{h(\alpha).g(\alpha)}$
- **کشیدن نمودار تابعِ ترکیبی با داشتن f و g:** باید ضابطه‌ی f و g را پیدا کنید. عملیات خواسته‌شده را روی آن اجرا کرده و در آخر رسم کنید.
  - متداول‌ترین حالت f و g خط هستند ← اول شیب پیدا کن $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ بعد معادله بنویس $y-y_1=m(x-x_1)$.

مفاهیم ابتدایی تابع مرکب

شکل ماشینی تابع مرکب

$$(gof)(a)=b: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "gof"'] & f \arrow[r, "c"] & g \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

$$(fog)(a)=b: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "fog"'] & g \arrow[r, "c"] & f \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

شکل ماشین‌ها در تست داده شده: از آخر شروع کن و بیا عقب، هر ضابطه رو مساویِ مقدار قرار بده: $h \rightarrow k$ ، $h(x)=k$

مقداریابی تابع مرکب

$(fog)(a)=?$: a رو بده به g، هرچی دراومد، اونو بده به f و حاصل نهایی رو اعلام کن.

$(gof)(a)=?$: a رو بده به f، هرچی دراومد، اونو بده به g و حاصل نهایی رو اعلام کن.

ترتیب عمل‌کردن تابع‌ها: همیشه اول تابع سمت راستی عمل می‌کنه، بعد سمت چپی؛ در fog اول g بعد f...

پیدا کردن تابع مرکب

زوج‌مرتب‌هاشو می‌خوای: در fog، اول g رو به‌صورت نمودار پیکانی بکش و در ادامه f رو وارد کن، هر عضوی از دایره‌ی دوم که تصویر می‌شه قبوله و بقیه هیچ. در آخر بدون در نظر گرفتنِ دایره‌ی وسطی از اولی به سومی، زوج‌مرتب بنویس...

ضابطه‌اش رو می‌خوای

$\boxed{(fog)(x)=f(g(x))}$ ، در ضابطه‌ی f به جای همه‌ی xها، $g(x)$ رو بذار...

$\boxed{(gof)(x)=g(f(x))}$ ، در ضابطه‌ی g به جای همه‌ی xها، $f(x)$ رو بذار...

روش تستی: یک xِ دلخواه در نظر بگیر و با تابع مرکبِ خواسته‌شده مقداریابی کن، بعد همین x رو در گزینه‌ها بذار، هر کدوم جواب یکسان با مقدار تابع مرکب نده، غلطه!

کار با نمودار

اگر نمودار قابل پیاده‌کردنِ عضوهاست: عضوها رو به‌صورت زوج مرتب بنویس و مثلِ پیدا کردنِ زوج مرتب در تابع مرکب عمل کن...

اگر در نمودار، عضوها معلوم نباشند: ضابطه‌ی f و g رو بنویس (معمولاً معادله‌ی خط هستن) بعد با ضابطه‌ی تابع مرکب یا مقداریابی وارد شو...

داشتن عضوی در تابع مرکب

یه m بنداز وسط!

اگر $\boxed{(a,b)\in fog}$ باشد، آن‌وقت: $\boxed{(a,m)\in g,(m,b)\in f}$

اگر $\boxed{(a,b)\in gof}$ باشد، آن‌وقت: $\boxed{(a,m)\in f,(m,b)\in g}$

دامنه‌ی تابع مرکب

$\boxed{D_{fog}=\{x \mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}}$: دامنه‌ی f و g رو پیدا کن، بعد ضابطه‌ی g رو در محدوده‌ی دامنه‌ی f بذار و حل کن، جوابِ اینو با دامنه‌ی g اشتراک بگیر...

$\boxed{D_{gof}=\{x \mid x\in D_f, f(x)\in D_g\}}$: دامنه‌ی f و g رو پیدا کن، بعد ضابطه‌ی f رو در محدوده‌ی دامنه‌ی g بذار و حل کن، جوابِ اینو با دامنه‌ی f اشتراک بگیر...

روش تستی: یک xِ دلخواه در نظر بگیر و با تابع مرکبی که داری مقداریابی کن. اگر تابع مرکب با این x، مقدارِ حقیقی نده، هر گزینه‌ای که شاملِ این x باشد، غلطه و حذف می‌شه...

ضابطه‌ی تابع مرکب و یکی از دو تابع را داریم

f و fog معلوم‌اند (درونی مجهوله): $f(g(x))$ رو می‌سازی، یعنی به جای همه‌ی xهای f می‌ذاری $g(x)$، بعد مساویِ ضابطه‌ای که تست برای fog داده قرار می‌دی. $f(x)$ مجهوله که درمیاد...

f و gof معلوم‌اند (بیرونی مجهوله): $g(f(x))$ رو تشکیل می‌دی و به جای $f(x)$ ضابطه‌اش رو می‌ذاری: $f(x\text{عبارتی‌برحسبِ})=$ ، حالا عبارت داخل پرانتز رو t بگیر و x رو بر حسب t پیدا کن و در به جای xهای موجود، اونو بذار...

ترکیب f و f^{-1}

- **ضابطه**
  - $(fof^{-1})(x) = x$
  - $(f^{-1}of)(x) = x$
- **وضعیت زوج‌مرتب‌ها**
  - $f^{-1}of = \{(a,a) | a \in D_f\}$
  - $fof^{-1} = \{(b,b) | b \in R_f\}$
- **دامنه و برد**
  - $D_{f^{-1}of} = R_{f^{-1}of} = D_f$
  - $D_{fof^{-1}} = R_{fof^{-1}} = R_f$
- **نمودار**
  - برای $y = (f^{-1}of)(x)$، $y = x$ رو بکش و بخشی از اون رو که در محدوده‌ی xهای دامنه‌ی f می‌افته، بَردار و بقیه رو حذف کن...
  - برای $y = (fof^{-1})(x)$، $y = x$ رو بکش و بخشی از اون رو که در محدوده‌یxهای برد f می‌افته، بَردار و بقیه رو حذف کن...
- **ارتباط:** در حالت کلی: $fof^{-1} \neq f^{-1}of \xleftarrow{\text{شرط مساوی}} D_f = R_f$
- **دو تابع وارونِ هم:** اگر f و g بخواهند وارونِ هم باشند، باید $(fog)(x) = x$ یا $(gof)(x) = x$ باشد...

پخش شدنِ -1

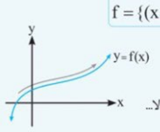
- $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ و $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$
- $(fog^{-1})^{-1} = gof^{-1}$ و $(f^{-1}og)^{-1} = g^{-1}of$

-1، روی هر دو تابع اثر می‌کنه؛ ولی از سمت راست به چپ...

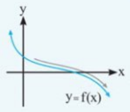
- **وجود عضو** (برای α مجهول و β معلوم)
  - $(fog)^{-1}(\alpha) = \beta$، نتیجه می‌دهد $(gof)(\beta) = \alpha$
  - $(fog^{-1})(\alpha) = \beta$، نتیجه می‌دهد $(gof^{-1})(\beta) = \alpha$
  - $(f^{-1}og)(\alpha) = \beta$، نتیجه می‌دهد $(g^{-1}of)(\beta) = \alpha$

مفاهیم اولیه‌ی یکنوایی

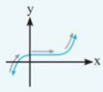
- **f صعودیِ اکید است.**
  - مفهوم فارسی: با افزایش مقدار x ها، y هایِ نظیر آن‌ها زیاد می‌شود.
  - زوج‌مرتب: $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a<b<c$
  - ریاضی: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - نمودار: از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، همش داره می‌ره بالا...

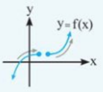


- **f نزولیِ اکید است.**
  - مفهوم فارسی: با افزایش مقدار xها، yهای نظیر آن‌ها کم می‌شود.
  - زوج‌مرتب: $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a>b>c$
  - ریاضی: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  - نمودار: از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، همش داره می‌ره پایین...



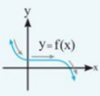
- **f صعودی است.**
  - مفهوم فارسی: با افزایش مقدار xها، yهای نظیر یا زیاد می‌شود یا مساوی همان مقدار قبل باقی می‌ماند (کم نمی‌شود).
  - زوج‌مرتب: $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a \leq b \leq c$
  - ریاضی: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - نمودار: از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، یا می‌ره بالا یا در مسیر مستقیم حرکت می‌کنه.

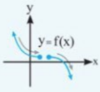




f نزولی است.

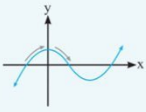
- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار xها، yهای نظیر یا کم می‌شود یا مساویِ همان مقدار قبل باقی می‌ماند (زیاد نمی‌شود).
- **زوج‌مرتب:** $f=\{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\}\xrightarrow{x_1<x_2<x_3}a\geq b\geq c$
- **ریاضی:** $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، یا می‌ره پایین یا در مسیر مستقیم حرکت می‌کنه.





مفهوم یکنوایی

- f یکنوای اکید است ← صعودی اکید یا نزولی اکید است.
- f یکنواست. ← صعودی یا نزولی است.
- غیریکنواست ← در بخشی از دامنه‌ی خود، صعودی و در بخشی نزولی است؛ رفتار ثابت ندارد.



تابع‌های صعودیِ اکید معروف

- **تابع خطی با شیب مثبت:** $a>0,\ y=ax+b$
- **تابع خطی با شیب مثبت، زیر رادیکال:** $a>0,\ y=\sqrt{ax+b}$
- **تابع نمایی** $y=a^{mx+n}$
  - با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و ضریبِ x مثبت: $a>1$ و $m>0$
  - با پایه‌ی بین صفر و ۱ و ضریبِ x منفی: $0<a<1$ و $m<0$
- **تابع لگاریتمی** $y=\log_c(ax+b)$
  - با ضریبِ x مثبت و مبنای بزرگ‌تر از ۱: $a>0$ و $c>1$
  - با ضریبِ x منفی و مبنای بین صفر و ۱: $a<0$ و $0<c<1$
- **تابع درجه‌ی دوم** $y=ax^2+bx+c$
  - با $a>0$ و بعد از x رأس: $x\geq -\frac{b}{2a}$
  - با $a<0$ و قبل از x رأس: $x\leq -\frac{b}{2a}$
- **تابع درجه‌ی سه و هم‌خانواده‌هاش با ضریبِ x^3 مثبت:** $y=(ax+b)^3,\ y=ax^3+b,\ y=x^3$ با شرطِ $a>0$
- **تابع قدرمطلقِ خطی:** بعد از ریشه‌ی عبارتِ داخل: $y=|ax+b|$ که $x\geq -\frac{b}{a}$، $a>0$
- **تابع هموگرافیک (گویا):** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{b}{d}\neq\frac{a}{c}$ و $ad-bc>0$، محدوده‌ای برایِ x که شاملِ ریشه‌ی مخرج نباشد
- **جزء صحیح خطی با شیب مثبت:** $a>0,\ y=[ax+b]$ ولی اکید نیست!

تابع‌های نزولی اکید معروف

- **تابع خطی با شیب منفی:** $a<0,\ y=ax+b$
- **تابع خطی با شیب منفی، زیر رادیکال:** $a<0,\ y=\sqrt{ax+b}$
- **تابع نمایی** $y=a^{mx+n}$
  - با پایه‌ی بین صفر و ۱ و ضریبِ x مثبت: $0<a<1$ و $m>0$
  - با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و ضریبِ x منفی: $a>1$ و $m<0$
- **تابع لگاریتمی** $y=\log_c(ax+b)$
  - با ضریب x منفی و مبنای بزرگ‌تر از ۱: $a<0$ و $c>1$
  - با ضریبِ x مثبت و مبنای بین صفر و ۱: $a>0$ و $0<c<1$
- **تابع درجه‌ی دوم** $y=ax^2+bx+c$
  - با $a>0$ و قبل از x رأس: $x\leq -\frac{b}{2a}$
  - با $a<0$ و بعد از x رأس: $x\geq -\frac{b}{2a}$

- **تابع درجه‌ی سه و هم‌خانواده‌هاش با ضریبِ x^3 منفی:** $y=(ax+b)^3 , y=ax^3+b , y=x^3$ با شرط $a<0$
- **تابع قدرمطلقِ خطی:** قبل از ریشه‌ی عبارتِ داخل: $y=|ax+b|$ که $x\le -\frac{b}{a}$, $a<0$
- **تابع هموگرافیک (گویا):** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ و $ad-bc<0$ ، محدوده‌ای برای x که شامل ریشه مخرج نباشد.
- **جزء صحیح خطی با شیب منفی:** $y=[ax+b]$ و $a<0$ ولی اکید نیست!

راه‌های تشخیص یکنوایی

- **تابع داده‌شده آلیاژی است از تابع‌های معروف**
  - **جمعِ دو تابعِ هم‌رفتار می‌شود تابعی با همان رفتار**
    - صعودی = صعودی + صعودی
    - نزولی = نزولی + نزولی
  - **ترکیب**
    - **دو تابع هم‌رفتار می‌شود صعودی**
      - صعودی = صعودی o صعودی
      - صعودی = نزولی o نزولی
    - **دو تابع غیر هم‌رفتار می‌شود نزولی** ← نزولی = نزولی o صعودی
  - **ضریبِ منفی** ← رفتار را عوض می‌کند؛ ولی ضریبِ مثبت نه!
    - $\left.\begin{matrix} f \text{ صعودی} \\ f \text{ نزولی} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{k<0} \left\{\begin{matrix} kf \text{ نزولی} \\ kf \text{ صعودی} \end{matrix}\right.$
    - نتیجه:
      - اگر f نزولی و g صعودی باشد، $f-g$ نزولی است.
      - اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی است.
- **تعریف ریاضی:** قرار بده $x_1<x_2$ و سعی کن ضابطه‌ی تابع رو در دو طرفِ تساوی بسازی...
- **از طریق یک‌به‌یک بودن**
  - **اگر f یک‌به‌یک باشد،** آن‌گاه یکنوای اکید است.
  - **اگر f یک‌به‌یک نباشد،** درباره‌ی صعودی یا نزولی بودنِ f نمی‌توان اظهار نظرِ کلی کرد!
  - **اگر f یکنوا نباشد،** یک‌به‌یک هم نخواهد بود.
- **رسم تابع:** برای قدرمطلقی‌ها، جزءصحیح‌دارها و چند ضابطه‌ای‌ها بهترین راه است...
- **با مشتق**
  - اگر در فاصله‌ای $f'>0$ باشد، f صعودی‌اکید بوده است.
  - اگر در فاصله‌ای $f'<0$ باشد، f نزولی‌اکید بوده است.

کاربرد تابعِ یکنوا

- **یافتن بُردِ تابع با دامنه‌ی محدود:** فقط اول و آخرِ دامنه رو در تابع جای‌گذاری کن تا اول و آخرِ برد دربیاد... $D=[a,b]$
  - f صعودی‌اکید: $R=[f(a),f(b)]$
  - f نزولی‌اکید: $R=[f(b),f(a)]$
- **تلاقی f و f^{-1}**
  - **f صعودی اکید است** ← f را با $y=x$ قطع بده...
  - **f نزولی اکید است** ← f را با $y=-x$ قطع بده...

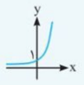
رفتار f و f^{-1}

- **رفتار موافقِ هم دارند**
  - f صعودی‌اکید $\Leftrightarrow$ f^{-1} صعودی‌اکید
  - f نزولی‌اکید $\Leftrightarrow$ f^{-1} نزولی‌اکید
- **دامنه و بُرد:** $D_f=R_{f^{-1}}$
- **اگر f یک‌به‌یک باشد، f^{-1} هم یک‌به‌یک خواهد بود.**
- **بازه‌ی یکنوایی:** اگر f روی بازه‌ی $[a,b]$
  - **صعودی اکید باشد** ← f^{-1} روی $[f(a),f(b)]$ صعودی اکید است.
  - **نزولی اکید باشد** ← f^{-1} روی $[f(b),f(a)]$ نزولی اکید است.

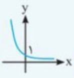
فصل در یک نگاه

تابع نماییِ $f(x)=a^x$

- **دامنه و برد:** $R=\mathbb{R}^+ , D=\mathbb{R}$ ←(نتیجه) a^x، هیچ‌گاه منفی و صفر نمی‌شود.
- **تلاقی با محورها:**
  - محور xها را قطع نمی کند.
  - محور yها را در نقطه‌ی ۱ قطع می‌کند.
- **یک به یک است** ←(ضابطه‌ی وارون) $\boxed{f^{-1}(x)=\log_a x}$
- **نمودار:**
  - $a>1$:



←(رفتار) صعودی است.
  - $0<a<1$:

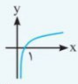


←(رفتار) نزولی است.
- **ضربِ منفی:** تابع $-a^x$
  - **نمودار:** شکلِ a^x را بکش و نسبت به محور xها قرینه کن...
  - **رفتار:** برعکس a^x است.
    - ◂ $a>1$: نزولی است.
    - ◂ $0<a<1$: صعودی است.
- **شناسایی تابع نمایی:** در جدولِ داده‌های x و y :
  - xها دنباله‌ی حسابی
  - yها دنباله‌ی هندسی

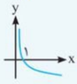
  ←(پایه‌ی تابع نمایی) $a^d=r$

تابع لگاریتمی $f(x)=\log_a x$

- **دامنه و برد:** $D=\mathbb{R}^+$ و $R=\mathbb{R}$ ←(نتیجه) $x,a>0,a\neq 1$
- **تلاقی با محورها:**
  - محور xها را در ۱ قطع می‌کند ←(نتیجه) $\log_a 1=0$
  - محور yها را قطع نمی‌کند ←(نتیجه) نامعین $=\log_a 0$
- **نمودار:**
  - $a>1$:



←(رفتار) صعودی است.
  - $0<a<1$:



←(رفتار) نزولی است.

  ←(ضرب منفی) $-\log_a x$ نسبت به محور xها قرینه کن...
- **علامت:**
  - $a>1$:
    - ◂ $u>1$ آن‌گاه: $\log_a u>0$.
    - ◂ $0<u<1$ آن‌گاه: $\log_a u<0$.
  - $0<a<1$:
    - ◂ $u>1$ آن‌گاه: $\log_a u<0$.
    - ◂ $0<u<1$ آن‌گاه: $\log_a u>0$.

Scanned with CamScanner

قوانین لگاریتم

- **چرخش:** $\log_a u = k \Rightarrow u = a^k$ $\xrightarrow{\text{مناسب برای}}$ زمانی که از بین اعدادِ u، a و k تنها یکی، مجهول باشد...
- **ویژگی‌ها**
  - $\boxed{\log_a a = 1}$
  - $\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$: ضرب را جمع می‌کند!
  - $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$: تقسیم را منها می‌کند!
  - $\boxed{\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x}$: انتقالِ توان!
  - $\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$: تغییر مبنا $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\boxed{\log_a x = \frac{1}{\log_x a}}$ ، $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\boxed{\log_a x \log_b a = \log_b x}$
- **یکی کردنِ لگاریتم‌ها**
  - جمع شده‌اند: $\boxed{m\log_c a + n\log_c b = \log_c a^m b^n}$
  - منها شده‌اند: $\boxed{m\log_c a - n\log_c b = \log_c \frac{a^m}{b^n}}$
- **در مبنای ۱۰**
  - مبنا نوشته نمی‌شود: $\boxed{\log a = \log_{10} a}$
  - $\boxed{\log 2 + \log 5 = 1}$
- **لگاریتم در توان است**
  - جایِ پایه و عددِ مقابلِ log را عوض کن: $\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$
  - $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

معادلات و نامعادلاتِ توانی

- **معادله‌ی نمایی**
  - عاملِ اولِ تمامِ پایه‌ها یکی است $\xrightarrow{\text{روش حل}}$ پایه‌ها را یکی کن $\xrightarrow{\text{آخرش}}$ $\boxed{a^u = a^v \Rightarrow u = v}$
    - $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\quad a^{mn} = (a^m)^n$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - عبارتِ نماییِ تکراری می‌بینی $\xrightarrow{\text{روش حل}}$ تغییر متغیر $\xrightarrow{\text{به‌خصوص}}$ $a^{2x} = A^2, a^x = A$ $\xrightarrow{\text{آخرش}}$ معادله‌ی درجه ۲ حل کن.
  - عددِ نمایی را مساوی با یک عدد پیدا کردی، ولی x، قابل فهمیدن نیست! $\xrightarrow{\text{روش حل}}$ از دو طرفِ تساوی، log بگیر در مبنایِ پایه!
- **نامعادله‌ی نمایی:** تمام پایه‌ها را یکی کن بعدش
  - $\boxed{a^x \ge a^y \xrightarrow{a>1} x \ge y}$ ، حفظ جهت!
  - $\boxed{b^x \ge b^y \xrightarrow{0<b<1} x \le y}$ ، تغییر جهت!

معادلات و نامعادلات لگاریتمی

- **معادله‌ی لگاریتمی**
  - روش حل: تمام logها را به یکی تبدیل کن، بعدش:
    - logها را خط بزن: $\boxed{\log_a u = \log_a v \Rightarrow u = v}$
    - چرخش بده: $\boxed{\log_a u = b \Rightarrow u = a^b}$
  - بررسیِ جواب‌ها: x های به‌دست آمده باید در دامنه‌ی لگاریتم‌ها باشند $\xrightarrow{\text{یعنی}}$
    - مبنا و مقابل هیچ لگاریتمی منفی نشود.
    - مبنا هم، هیچ‌گاه ۱ نشود!
- **نامعادله‌ی لگاریتمی**
  - روش حل: تمام logها را به یکی تبدیل کن، بعدش:
    - $a>1$: $\boxed{\log_a u \ge b \Rightarrow u \ge a^b}$
    - $0<a<1$: $\boxed{\log_a u \ge b \Rightarrow u \le a^b}$
    - خط زدن logها
      - $a>1$: $\boxed{\log_a A \ge \log_a B \Rightarrow A \ge B}$
      - $0<b<1$: $\boxed{\log_b A \ge \log_b B \Rightarrow A \le B}$
  - قدم آخر: دامنه‌ی تمام logها را پیدا کن و با محدوده‌ای که بالا درآوردی، اشتراک بگیر...

فصل در یک نگاه

زاویه‌ها

- **دو زاویه‌ی متمم:** $\alpha+\beta=90^\circ$
- **دو زاویه‌ی مکمل:** $\alpha+\beta=180^\circ$
- **دو زاویه‌ی متقابل به رأس:** شکل

ویژگی $\alpha=\beta$

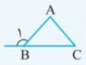
- **زاویه‌ها در خطوط موازی مورب**
  - **حاده‌ها:** مساوی‌اند:

  - **تمامیِ زاویه‌های باز:** مساوی‌اند:

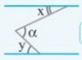
  - **هر حاده با یک باز:** مکمل‌اند:

  - توجه: از نقطه‌ی شکست، موازیِ دو خط موازی خطی رسم کن...

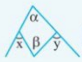
- **زاویه‌ی خارجی در مثلث**
  - **به‌وجود آمدن:** با امتدادِ ضلعِ مثلث به‌وجود می‌آید.
  - **اندازه:** مجموع دو زاویه‌ی داخلیِ غیر مجاور $\hat{B}_1=\hat{A}+\hat{C}$



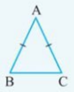
- **زاویه‌ی اسیر بین دو خط موازی:** $\alpha=x+y$



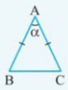
- **زاویه‌های بادبادک:** $\alpha+\beta=x+y$



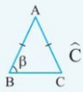
- **در مثلث متساوی‌الساقین** (دو ضلعِ مساوی دارد)



  - زوایای مجاور به قاعده $\hat{B}=\hat{C}$



  - $\hat{B}=\hat{C}=\dfrac{180^\circ-\alpha}{2}$



  - $\hat{C}=\beta\ ,\ \hat{A}=180^\circ-2\beta$
  - نیمساز و ارتفاع و میانه‌ی نظیر قاعـده‌اش بر هم منطبق‌اند.

هم‌نهشتی دو مثلث

- **دو مثلث در حالت کلی**
  - ض ز ض
  - ز ض ز
  - ض ض ض
  - فایده: اجزاء نظیرِ دو مثلث با هم مساوی‌اند.
  - شناخت تست: شکلِ تست شامل چند مثلث است و تعدادی پاره‌خطِ مساوی هم می‌بینیم...
- **دو مثلث قائم‌الزاویه**
  - وتر و یک ضلع
  - وتر و یک زاویه‌ی حاده

دربارهٔ n ضلعی

- **مجموع زوایای داخلی:** $(n-2)180^\circ$ $\xrightarrow{\text{یک زاویه‌ی داخلی n ضلعی منتظم}}$ $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$
- **تعداد قطرها:** $\frac{n(n-3)}{2}$
- **مجموع زوایای خارجی:** 360° $\xrightarrow{\text{یک زاویه‌ی خارجی n ضلعی منتظم}}$ $\frac{360^\circ}{n}$

استدلال

آوردن دلیل

- **گزاره**
  - **مفهوم:** جمله‌ی خبری که وضعیت درستی یا نادرستیِ آن کاملاً معلوم یا قابلِ مشخص کردن باشد.
  - **چه جملاتی گزاره نیستند:** جملاتِ سؤالی، امری، تعجبی، x دار و آن‌هایی که قیدِ مبهم دارند.
  - **نقیض گزاره:** از خودِ گزاره ساخته می‌شود؛ با گذاشتنِ کلماتِ «این‌طور نیست که...» در ابتدای گزاره.
    - به‌جور دیگه ← گزاره درست باشد، نقیضش غلطه...
- **انواع استدلال**
  - **استقرایی**
    - از مشاهده‌ی چند موردِ جزئی، نتیجه‌ی کلی بگیری.
    - رسیدن از جزء به کل.
  - **استنتاجی:** با نتایج درستِ قبلی، چیزی را ثابت کنیم.
  - **برهان خلف:** فرض می‌کنیم حکم غلط باشد و با کمک فرض و قضایای قبلی به یک تناقض آشکار می‌رسیم...
  - **مثال نقض:** این برای اثبات کردن نیست! آوردن یک مثال است که ویژگیِ مورد نظر را ندارد؛ این‌طوری کلیتِ حکم نقض می‌شود!
  - **استدلال‌های درست:** استنتاجی و برهان خلف نتیجه‌شان همواره درست است.
    - جمله‌ی درستِ کاربردی ←
      - **فرم:** $A \Rightarrow B$
      - **فرض و حکم:** A را فرض و B را حکم می‌گوییم.
      - **عکس قضیه:** در قضیه‌ی $A \Rightarrow B$ ، عکس می‌شود: $B \Rightarrow A$
      - اگر عکسِ قضیه هم درست باشد، قضیه می‌شود **دو شرطی**: $A \Leftrightarrow B$

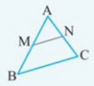
ترسیم

- **با کمک ویژگیِ نقطه:** مجموعه‌ی تمامی نقاطی که
  - تا نقطه‌ی ثابتِ A ، فاصله‌ی k دارند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ دایره‌ای به مرکز A و شعاع k
  - تا خطِ ثابتِ L ، فاصله‌ی k دارند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ دو خط موازی با L در طرفین آن و به فاصله‌ی k از آن
  - از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ عمودمنصفِ پاره‌خطِ AB
  - از دو خط متقاطعِ L و L' ، به یک فاصله‌اند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ نیمساز زاویه‌ی بین L و L'
  - روش حل تست ← نقطه‌ای که از شما می‌خواهند، دو ویژگی از چهارتای بالا را دارد، جوابِ هر کدام از آن دو تا را بکشید و تلاقی دهید...
- **ترسیم‌های هندسی**
  - **وسایل ترسیم:** خط‌کشِ غیر مدرج و پرگار
  - **ترسیم‌های ساده** $\xrightarrow{\text{این‌ها پایه‌ی هر رسم دیگری هستند}}$
    - عمودمنصفِ AB $\xrightarrow{\text{جوردیگه}}$ پیدا کردنِ وسطِ پاره‌خط
    - نیمساز زاویه
    - کشیدنِ عمود
      - از نقطه‌ی روی خط
      - از نقطه‌ی بیرون خط
    - خط موازی از نقطه‌ی خارج خط
    - رسم مثلث با داشتن اندازه‌ی سه ضلع آن
  - **حل تستِ رسم مثلث**
    - یک ضلع را داده $\xrightarrow{\text{برای پیدا کردن رأس سوم}}$
      - میانه را داده ← به مرکز وسطِ ضلع و شعاعِ میانه کمان بزن.
      - ارتفاع را داده ← خط موازی ضلع و به فاصله‌ی ارتفاع از آن بکش.
    - یک مثلث کوچکِ داخل شکل با معلوم بودنِ سه ضلعش داریم ← آن را بکش و با آن مثلث را کامل کن.

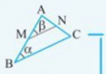
Scanned with CamScanner

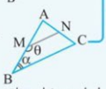
نسبت و تناسب

- **ویژگی‌های حاصل از ترسیم**
  - **عمودمنصف‌های هر مثلث دلخواه، در یک نقطه همرس‌اند.**
    - اسم نقطه: مرکز دایره محیطی
    - ویژگی نقطه: از هر سه رأس به یک فاصله است.
  - **نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث دلخواه در یک نقطه همرس‌اند.**
    - اسم نقطه: مرکز دایره محاطی
    - ویژگی نقطه: از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.
- **معنای نسبت:** به کسرِ $\frac{a}{b}$ می‌گوییم نسبت؛ $b \neq 0$.
- **خواص تناسب:** اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، آن‌گاه
  - $ad = bc$
  - **عملیات ترکیب**
    - در صورت: $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
    - در مخرج: $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$
  - **عملیات تفضیل**
    - در صورت: $\frac{|a-b|}{b}=\frac{|c-d|}{d}$
    - در مخرج: $\frac{a}{|a-b|}=\frac{c}{|c-d|}$
  - **جمع صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم:** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=k$
  - کارباتناسب: اگر $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ بود، به‌طوری که m و n دو عددِ معلوم بودند، بگویید: $a = mk$ و $b = nk$
    - ببین: $\frac{x}{y}=\frac{۳}{۴}$ نتیجه می‌دهد $x = ۳k$ و $y = ۴k$.
- **تالس**
  - **قضیه‌ی تالس**
    - شرط: باید خطی در مثلث، موازیِ یک ضلع آن کشیده شده باشد.
    - تالس نویسی (رأس را پیدا کن)
      - تالس جزء به جزء: $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$
      - تالس جزء به کل: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

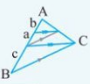


      - فایده: اگر اندازه‌ی خطِ موازی برایتان مهم است، باید تالس را این‌طوری بنویسید...
    - تالس در حضور زاویه‌ها



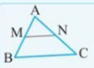


      - $\alpha=\beta$ ، $\alpha+\theta=۱۸۰^\circ$ یعنی $MN \parallel BC$
  - **میان خط**
    - مفهوم: خطی است که وسط‌هایِ دو ضلع مثلثی را به هم، وصل می‌کند.
    - ویژگی
      - موازی ضلع روبه‌رویی خود است.
      - نصف ضلع روبه‌رویی خود است.
  - **تو در تو**
    - شناسایی: با علامتِ zoro در مثلث مواجه هستیم:



    - نوشتن رابطه: بروید سراغ ضلعی که سه قسمت شده؛ بعدش $a^2 = bc$
  - **در ذوزنقه:** یکی از قطرها را بکش و تالس بنویس:

  - **عکس تالس:** اگر خطی یکی از تناسب‌هایِ تالس را در مثلث برقرار کرده باشد، با ضلع روبه‌رویی خودش موازی است.

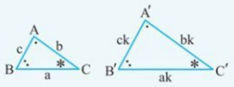


$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC},\quad \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \longrightarrow MN \parallel BC$$

تشابه

مفهوم
- **تمام زوایا:** نظیر به نظیر مساوی‌اند.
- **تمام اضلاع:** نظیر به نظیر، ضریبی از هم هستند $\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}}$ نسبتِ اضلاعِ متناظر در دو مثلث است. (k)

شکل هندسیِ تشابه دو مثلث:



$$\boxed{\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k}$$

حالت‌های تشابه دو مثلث
- **زز** ← دو زاویه‌ی مساوی $\xrightarrow{\text{یادت باشه}}$ این اصلی‌ترین حالتِ اثبات تشابه دو مثلث است.
- **ض ز ض** ← دو ضلع متناسب و زاویه‌ی بین آن‌ها مساوی
- **ض ض ض** ← سه ضلع متناسب

فایده‌ی اثباتِ تشابه دو مثلث
- اضلاعِ متناظر را از روی زاویه‌ها شناسایی کن و تناسبِ حاصل را بنویس.
- زاویه‌های متناظر، مساوی‌اند.

کنکوری‌ترین حالت‌های (زز)
- **مثلث پاپیونی داریم**
  - دو تا پاپیونی قائم الزاویه

  - دو تا پاپیونی که ضلع رو به روی موازی دارند.

  - دو تـا پاپیونی کـه دارای یک زاویه‌ی مساوی هستند.

- **مثلث گوشه‌نشین**
  - مثلث گوشه‌نشین شما قائم الزاویه است و در گوشه‌ی مثلث قائم‌الزاویه هم نشسته است!

  - مثلث گوشه‌نشین شما دارای یک زاویه‌ی مساوی با مثلث اصلی است:

دو مثلث توسطِ خود تست گفته شده
- **اضلاع را می‌توان از کوچک به بزرگ مرتب کرد:** $\frac{\text{ضلع کوچک اولی}}{\text{ضلع کوچک دومی}}=\frac{\text{ضلع متوسط اولی}}{\text{ضلع متوسط دومی}}=\frac{\text{ضلع بزرگ اولی}}{\text{ضلع بزرگ دومی}}$
- **اضلاع را نمی‌توان از کوچک به بزرگ مرتب کرد** ← همه‌ی حالت‌های ممکن برای تشابه را در نظر بگیر.

تشابهِ اجزای فرعی در مثلث

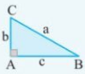
نسبت اضلاع k است
- **نسبت میانه‌های نظیر:** $\boxed{k}$
- **نسبت نیمسازهای نظیر:** $\boxed{k}$
- **نسبت ارتفاع‌های نظیر:** $\boxed{k}$
- **نسبت محیط‌های نظیر:** $\boxed{k}$

هر کـدام از این‌هـا را داده بود، انگار نسبت تشابه داده.

- **نسبت مساحت‌های نظیر:** $\boxed{k^2}$ $\xrightarrow{\text{حل تست}}$ اگر نسبت مساحت‌ها را داده بود جذر بگیر و نسبت تشابه را گیر بیار...

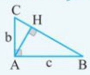
ویژگی‌های مثلث قائم الزاویه

فیثاغورس:



$$\boxed{\widehat{A}=90^\circ} \Leftrightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2}$$

ارتفاعِ وارد بر وتر کشیده شده



- **مثلث‌های متشابهِ موجود**
  - $\boxed{\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ABC}}$
  - $\boxed{\overset{\triangle}{AHC}\sim\overset{\triangle}{ABC}}$
  - $\boxed{\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{AHC}}$
- **روابط طولی**
  - با اندازه‌ی ارتفاع و قطعه‌ها کار داری: $\boxed{AH^2=BH.CH}$
  - با اضلاع و قطعه‌های حاصل روی وتر کار داری: $\boxed{AB^2=BH.BC}$ ، $\boxed{AC^2=CH.BC}$
  - با ارتفاع و اضلاع کار داری: $\boxed{AH=\frac{bc}{a}}$

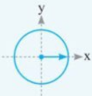
فصل در یک نگاه

در موردِ زاویه

- **طولِ کمان:** $\boxed{\ell = R\theta}$ ، یعنی طولِ کمان، می‌شود ضربِ شعاع دایره در زاویه‌ی مرکزیِ روبه‌رویش بر حسب رادیان.
- **تبدیلِ واحدهای زاویه به همدیگر**
  - **از درجه به رادیان:** در $\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}$ ضرب کن.
  - **از رادیان به درجه:** در $\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$ ضرب کن.

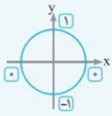
دایره‌ی مثلثاتی

- **مفاهیم ابتدایی دایره**
  - **شعاع:** ۱ است.
  - **مرکز:** مبدأ مختصات است.
  - **جهتِ مثلثاتی:** خلافِ حرکت عقربه‌های ساعت.
  - **شروع کمان‌ها:** شعاعی از دایره که روی جهتِ + محور x هاست:

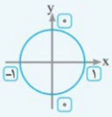


- **sinα و cosα**
  - **در دایره:** از انتهایِ کمانِ α بر دو محور عمود کن.
  - **حدود:** $\boxed{-۱ \le \sin\alpha \le ۱, -۱ \le \cos\alpha \le ۱}$
- **علامتِ نسبت‌های مثلثاتی**
  - **در ناحیه‌ی اول:** همه + اند.
  - **در ناحیه‌ی دوم:** فقط sin، + است.
  - **در ناحیه‌ی سوم:** tan (و cot)، + است.
  - **در ناحیه چهارم:** فقط cos، + است.

  به‌ترتیب در ناحیه‌ها، **هستک** مثبت است.
- **مقدار نسبت‌های مثلثاتی در مرزهایِ دایره**
  - **سینوس:**



  - **کسینوس:**



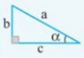
  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

نسبت‌های مثلثاتی

- **زوایای معروف:**

α	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\alpha$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

- **در مثلث قائم‌الزاویه**



  - **سینوس:** ضلع مقابل به وتر: $\boxed{\sin\alpha = \frac{b}{a}}$
  - **کسینوس:** ضلع مجاور به وتر: $\boxed{\cos\alpha = \frac{c}{a}}$
  - **تانژانت:** ضلع مقابل به مجاور: $\boxed{\tan\alpha = \frac{b}{c}}$
  - **کتانژانت:** ضلع مجاور به مقابل: $\boxed{\cot\alpha = \frac{c}{b}}$

رابطه‌های تکمیلی مثلثات

پیدا کردن همه‌ی نسبت‌ها

با داشتن یکی از آن‌ها و انتهای کمان

استفاده از اتحادهای:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{یا} \quad \cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

راه حلِ شیک: کشـــیدن مثلثِ قائم‌الزاویه‌ای که برایِ یک زاویه‌اش، نســبتِ مثلثاتیِ فرض برقراره ← بعدش فیثاغورس ← بعدش پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتیِ دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه

روابط مقدماتی

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{و} \quad \cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\tan\alpha \,.\, \cot\alpha=1$$

روابط فرعی

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin^3\alpha\pm\cos^3\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)(1\mp\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=\cos^2\alpha$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \quad \text{و} \quad \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

منفی در کمان

- کسینوس: منفی را می‌خورد: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
- نسبت‌های دیگر غیر از کسینوس: منها را می‌دهند بیرون
  - $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
  - $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
  - $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

2π در کمان: به جای 2π، بذار صفر

انگار هر مضربِ زوجی از π، صفره.

$$\sin(2\pi\pm\alpha)=\sin(\pm\alpha)$$

$$\cos(2\pi\pm\alpha)=\cos(\pm\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(2\pi\pm\alpha)=\tan(\pm\alpha)$$

$$\cot(2\pi\pm\alpha)=\cot(\pm\alpha)$$

π در کمان

- فرم کمان: $(\pi\pm\ )$
- تعیین ناحیه
  - $\pi+\alpha$: ناحیه‌ی سوم است.
  - $\pi-\alpha$: ناحیه‌ی دوم است.
- پیدا کردن جواب: در کمان، $(\pi\pm\ )$ است: شما فقط را نگه دارید با نسبت پشتِ آن. علامتِ نسبت مثلثاتی را طبق ناحیه‌ی بالا، پشتِ آن بذارید.
- صورتِ ریاضی:

	sin	cos	tan	cot
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

$\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ در کمان

- **فرمِ کمان:** $(\frac{3\pi}{2} \pm$ ☁ $)$ یا $(\frac{\pi}{2} \pm$ ☁ $)$
- **تعیین ناحیه**

کمان	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم

- **پیدا کردن جواب:** نسبت مثلثاتی رو هم‌نوا و مخالف بنویس. کمان هم همیشه α و علامتِ نسبت مثلثاتیِ اولیه رو طبق ناحیه‌ی بالا بذار پشت.
- **صورت ریاضی**

	sin	cos	tan	cot
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

	sin	cos	tan	cot
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

زوایایِ متمم و مکمل

- **مکمل‌ها:** sinِ مساوی دارند و cosِ قرینه.
- **متمم‌ها:** هر نسبت می‌شود هم‌نوا و مخالفِ دیگری.

فرمول‌های 2α

برای سینوس

- **فرمول سینوسِ 2α:** $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$
- **حالت کلی‌تر:** این فرمول را برای هر کمانی که باز کنی، در سمت راست، نصف می‌شود: $\boxed{\sin 2u = 2\sin u\cos u}$
  - یه حالت کنکوری: $\boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$
- **کاربرد در تست:** ضربِ سینوس و کسینوس یک کمان را دیدی...! $\boxed{\sin u\cos u = \frac{1}{2}\sin 2u}$
- **مجموع سینوس و کسینوس یک کمان:** $\boxed{(\sin u \pm \cos u)^2 = 1 \pm \sin 2u}$

برای کسینوس

- **فرمول کسینوسِ 2α**
  - بر حسب سینوس و کسینوس: $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$
  - فقط بر حسب کسینوس: $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$
  - فقط بر حسب سینوس: $\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$
- **در حالت کلی:** برای هر کمانی، این فرمول را باز کنی، در سمت راست نصف می‌شود:
  $\boxed{\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u}$
- **فرمول‌های طلایی:** $\begin{cases} 1+\cos 2u = 2\cos^2 u \\ 1-\cos 2u = 2\sin^2 u \end{cases}$: $\boxed{1 \pm \cos}$ ☁ دیدی یادِ طلایی بیفت!

کاربردها

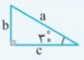
- پیدا کردن نسبت مثلثاتیِ زاویه‌های غیر معروفی که دو برابرشان معروف است: $\boxed{75^\circ, 67/5^\circ, 22/5^\circ, 15^\circ}$
- با داشتن یک نسبت مثلثاتیِ α، نسبت‌های 2α را پیدا کنی $\xleftarrow{\text{ترتیب}}$ اول حتما $\cos 2\alpha$ را پیدا کن...
  اول فرمول‌های مقدماتی مثلثات را برای α می‌نویسی بعداً همین فرمول‌ها را برای 2α...

نتیجه‌ها

- جمع یا تفاضل تانژانت و کتانژانت دیدی، یادِ این‌ها بیفت! $\begin{cases} \cot u + \tan u = \frac{2}{\sin 2u} \\ \cot u - \tan u = 2\cot 2u \end{cases}$
- فرمول تانژانت 2α: $\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

مثلثات در لباس هندسه

- **در مثلث قائم‌الزاویه:** ضلع مقابل به زاویه‌ی 30°، نصف وتر است. صورت ریاضی $b = \frac{a}{2}$

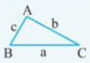


- **در مثلث متساوی الاضلاع**
  - ارتفاع: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
  - مساحت: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

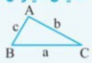
- **در شش ضلعی منتظم**
  - مساحت: $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$
  - قطر کوچک: $d_1 = \sqrt{3}a$
  - قطر بزرگ: $d_2 = 2a$

هر زاویه‌ی داخلی: 120°

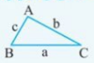
- **در مثلث دلخواه:** مساحت می‌شود
  - $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$
  - $S = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$
  - $S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$



- **قضیه‌ی سینوس‌ها:** در هر مثلث دلخواه داریم: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$



- **قضیه‌ی کسینوس‌ها:** در هر مثلث دلخواه داریم:
  - $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$
  - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$



دوره‌ی تناوب

- **تعریف**
  - مفهوم تابع متناوب: اگر عدد مثبت c موجود باشد به‌طوری که: $f(x+c) = f(x)$، f می‌شود متناوب.
  - دوره‌ی تناوب: کوچک‌ترین عددِ c در تعریف بالا، دوره‌ی تناوب است $\xrightarrow{\text{نماد}}$ T.
- **پیدا کردنِ T**
  - نسبت‌های مثلثاتی معروف
    - سینوس: $y = k\sin(ax+b)+t$ $\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}}$ $T = \frac{2\pi}{|a|}$
    - کسینوس: $y = k\cos(ax+b)+t$ $\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}}$ $T = \frac{2\pi}{|a|}$
    - تانژانت: $y = k\tan(ax+b)+t$ $\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}}$ $T = \frac{\pi}{|a|}$
  - بی‌تأثیرها: ضریب نسبت مثلثاتی، عددِ ثابت جمع و منها شده با کمان یا با نسبت مثلثاتی در یافتنِ T بی‌اثرند! **فقط ضریبِ x کمان مهمه ...!**
  - مجموع چند عبارت
    - اگر عبارت قابل ساده شدن است ← اول ساده کن با اتحادهای مثلثاتی و بعد T پیدا کن...
    - اگر عبارت ساده نمی‌شود ← تک تک، دوره تناوب بگیر و بعد بین دوره تناوب‌ها کـ.مـ.م حساب کن.
      - کـ.مـ.م کسری‌ها: $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}] = \frac{[a,c]}{(b,d)}$

تغییر در دوره‌ی تناوب

- **توان فرد نسبت مثلثاتی:** تأثیری بر T ندارد. مثل $y=\sin^{3}2x, T=\pi$
- **توانِ زوجِ نسبت مثلثاتی:** دوره تناوب را نصف می‌کند. مثل $y=\sin^{2}2x, T=\frac{\pi}{2}$
- **قدر مطلق دورِ نسبتِ مثلثاتی:** دوره تناوب را نصف می‌کند. مثل $y=|\sin 2x|, T=\frac{\pi}{2}$

کاربرد

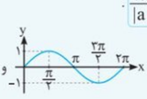
- **موج سینوسی:** $\boxed{f(t)=a\sin(bt)+c}$
- **موج کسینوسی:** $\boxed{f(t)=a\cos(bt)+c}$

دامنه‌ی موج: $\boxed{a=\frac{Max-Min}{2}}$

$\boxed{c=\frac{Max+Min}{2}}$

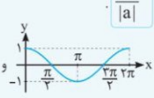
$\boxed{|b|=\frac{2\pi}{T}}$

y=Sin u

- **دامنه:** $\boxed{D=\mathbb{R}}$ ، مگر این‌که u محدودیتی داشته باشد!
- **بُرد:** $\boxed{y=\sin x \Rightarrow R=[-1,1]}$ $\xleftarrow{\text{حالت کاربردی}}$ $\boxed{[-a,a]\xleftarrow{\text{برد}} y=a\sin(bx+c)}$
- **ماکسیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ تا مقدار $\sin$، بشود ۱.
- **مینیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi-\frac{\pi}{2}}$ تا مقدار $\sin$، بشود ۱- .
- **تلاقی با محورXها:** قرار دهید $\boxed{u=k\pi}$ تا مقدار $\sin$، بشود صفر.
- **دوره‌ی تناوب:** برای تابعِ $\boxed{y=k\sin(ax+b)+t}$ عبارت است از $\boxed{\frac{2\pi}{|a|}}$.
- **کشیدنِ تابع:** کافی است $\boxed{y=\sin x}$ را در یک دوره تناوب آن بلد باشیم: 

و در فاصله‌های به طولِ 2π، همین‌طوری تکرارش کنیم!

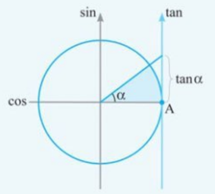
y=Cos u

- **دامنه:** $\boxed{D=\mathbb{R}}$، مگر این‌که u محدودیتِ خاصی داشته باشد!
- **بُرد:** $\boxed{y=\cos x \Rightarrow R=[-1,1]}$ $\xleftarrow{\text{حالت کاربردی}}$ $\boxed{[-a,a]\xleftarrow{\text{برد}} y=a\cos(bx+c)}$
- **ماکسیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi}$ تا مقدار $\cos$، بشود ۱.
- **مینیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi+\pi}$ تا مقدار $\cos$، بشود ۱- .
- **تلاقی با محورXها:** قرار دهید $\boxed{u=k\pi+\frac{\pi}{2}}$ تا مقدار $\cos$، بشود صفر.
- **دوره‌ی تناوب:** برای تابعِ $\boxed{y=k\cos(ax+b)+t}$ عبارت اســت از $\boxed{\frac{2\pi}{|a|}}$.
- **کشیدنِ تابع:** کافی است $\boxed{y=\cos x}$ را در یک دوره تناوب آن بلد باشیم: 

و در فاصله‌های به طولِ 2π، همین‌طوری تکرارش کنیم!

تانژانت

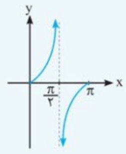
در دایره مثلثاتی



- **محور تانژانت:** خطی مماس بر دایره، سمت راستِ آن و موازی محور sin
- **مبدأ محور تانژانت:** نقطه‌ی A
  - بالایِ A: tan مثبت است.
  - پایین A: tan منفی است.
- **مشخص کردن تانژانت:** انتهای کمان را ادامه بده تا محورش را قطع کند از مبدأ تا نقطه‌ی تلاقی، می‌شود tanِ زاویه.
- **علامت:** در ناحیه اول و سوم مثبت است، در دوم و چهارم منفی.

تابع تانژانت

- **دامنه:** $f(x)=\tan u \xrightarrow{\text{دامنه}} D=\mathbb{R}-\{x \mid u=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$
- **تعریف نشده:** هر کمانی به‌صورت $\frac{k\pi}{2}$، که k صحیح و فرد باشد، تانژانتِ تعریف نشده دارد.
- **برد:** $\mathbb{R}$
- **ماکسیمم و مینیمم:** $y=\tan x$ ماکسیمم و مینیمم ندارد!
- **تلاقی با محور xها** $\xleftarrow{\text{جوردیگه}}$ جایی که تانژانت صفر می‌شود: $y=\tan u \xrightarrow{\text{صفرشدن}} u=k\pi$
- **دوره‌ی تناوب:** اگر $f(x)=k\tan(ax+b)+t$ باشد؛ $T=\frac{\pi}{|a|}$.
- **رفتار:** غیر یکنواست، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هم نیست!
- **نمودار:** در بازه‌ی $[0,\pi]$ بلد باش و در بازه‌هایی با این طول، عیناً شکل تابع را ادامه بده...



- **محدوده‌ای برای x داریم که شامل $x=\frac{k\pi}{2}$ (k فرد و صحیح) نیست**
  - رفتار تانژانت: در این‌صورت، صعودی اکید بوده و یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هم هست.
  - برد: در این‌صورت برای دامنه‌ی $[a,b]$ برد می‌شود $[\tan a,\tan b]$.

معادله‌های مثلثاتی

الفبای معادله

- **حالت کلی**
  - $\sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$
  - $\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi\pm\alpha$
  - کمتر کاربردی: $\tan x=\tan\alpha \Rightarrow x=k\pi+\alpha$
- **حالت خاص:** وقتی جواب سینوس و کسینوس صفر و ±۱ شود:

	۰	۱	-۱
sinx	$k\pi$	$2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$2k\pi-\frac{\pi}{2}$
cosx	$2k\pi$	$k\pi+\frac{\pi}{2}$	$2k\pi+\pi$

- **اگر کمانِ سینوس و کسینوس، x نبود:** کمان، عبارتی بر حسبِ x بود، مثل u، آن‌وقت u را مساویِ این‌ها بذار...
- **قالب آماده:** یعنی سینوس یا کسینوس را بی‌ضریب و بی‌توان، مساوی یک عدد پیدا کنی که آن عدد معروف است...
  - $\sin u=$
  - $\cos u=$

رسیدن به قالب آماده

- **در ابتدا لازم است ساده کنی**
  - اتحادهای $(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$ را در کمان‌ها می‌بینی...
  - اتحادهای مقدماتی مثلثات را باید به‌کار ببری...
  - اتحادهای 2α (sin۲α یا cos۲α رو وارد کن)
    - sin cos می‌بینی...
    - طلایی $1\pm\cos$ داری...
    - $2\cos^2 -1$ و $1-2\sin^2$ داری...

با منفی چه کنیم؟

- **برای کسینوس:** منفیِ ضریبِ کسینوس را بَردار و در عوض کمان را مکمل کن. $\boxed{\square = -\cos u \Rightarrow \square = \cos(\pi - u)}$
- **برای سینوس و تانژانت:** منفی را بَردار و در عوض کمان را قرینه کن. $\boxed{\square = -\sin u \Rightarrow \square = \sin(-u)}$ ⟵ منفی رو بده به کمان!

با بازه چه کنیم؟ اگر تعداد جواب‌های معادله در یک بازه، خواسته شده است:

1. معادله را حل کن و x را پیدا کن.
2. x را بر حسبِ k بذار توی محدوده.
3. نامعادله را ساده کن، k رو تنها کن و محدوده‌ی k رو پیدا کن.
4. عددهای صحیح محدوده‌ی k را اعلام کن.

با معادله‌ی کسری چه کنیم؟ حواستان باشد، xای که پیدا کرده‌اید باعث صفر شدن مخرج نشود! $\xleftarrow{\text{جور دیگه}}$ اگر دسته جوابی باعث صفر شدن مخرج می‌شود، حذفش کن...

روش حل معادله مثلثاتی

به دو نسبتِ هم‌نامِ مساوی می‌رسی

- $\boxed{\sin u = \sin v} \xrightarrow{\text{جواب‌ها}} \boxed{\begin{cases} u = 2k\pi + v \\ u = 2k\pi + \pi - v \end{cases}}$
- $\boxed{\cos u = \cos v} \xrightarrow{\text{جواب‌ها}} \boxed{u = 2k\pi \pm v}$

به دو نسبت غیر هم‌نامِ مساوی می‌رسی: کمانِ یکی را متمم کن تا بشود حالت بالا.

- $\boxed{\sin u = \cos v \Rightarrow \sin u = \sin(\frac{\pi}{2} - v)}$
- $\boxed{\sin u = \cos v \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \cos v}$

معادله‌ی درجه دو داری

خودش معادله‌ی درجه دو داره

- $\boxed{a\sin^2 u + b\sin u + c = 0}$
- $\boxed{a\cos^2 u + b\cos u + c = 0}$

با روشِ Δ حل کن و سینوس یا کسینوس را پیدا کن...

باید بفهمی معادله‌ی درجه دو می‌شود

- $\sin^2 u$ کنار $\cos u$ داری: $\boxed{\sin^2 u = 1 - \cos^2 u}$
- $\cos^2 u$ کنار $\sin u$ داری: $\boxed{\cos^2 u = 1 - \sin^2 u}$
- $\cos 2u$ کنار $\sin u$ داری: $\boxed{\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u}$
- $\cos 2u$ کنار $\cos u$ داری: $\boxed{\cos 2u = 2\cos^2 u - 1}$

فصل در یک نگاه

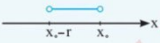
بخش‌پذیری و تقسیم

- **فرمِ الگوریتم تقسیم** $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$
  - **اسامی:** باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم
  - **درجه‌ها**
    - **مقسوم:** m
    - **مقسوم‌علیه:** n طوری‌که $n<m$
    - **خارج‌قسمت:** $m-n$
    - **باقی‌مانده:** حداکثر $n-1$
- **باقی‌مانده صفر شد** $\xrightarrow{\text{اسم خاص}}$ $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است.
- **پیداکردن باقی‌مانده**
  - باقی ماندهٔ $f(x)$ بر $ax+b$ می‌شود $r=f(-\frac{b}{a})$ $\xrightarrow{\text{فارسی}}$ ریشه‌ی مقسوم‌علیه را بذار توی مقسوم...
  - شرط بخش‌پذیریِ $f(x)$ بر $ax+b$ می‌شود $f(-\frac{b}{a})=0$
- **ارتباط عامل‌ها و عبارت:** اگر $x=a$ یک ریشه‌ی عبارت $f(x)$ باشد
  - **یک عاملِ** $f(x)$: می‌شود $x-a$
  - **عامل‌های دیگرِ** $f(x)$ $\xrightarrow{\text{روش یافتن}}$ $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کن.
  - **معنای عامل:** $f(x)$ بر آن بخش‌پذیر است...

تعمیم اتحاد چاق و لاغر

- **صورت اتحاد**
  - **n طبیعی:** $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$
  - **n فرد و طبیعی:** $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1})$
- **ویژگی‌های اتحاد**
  - مجموع توان‌هایِ a و b داخل پرانتزِ چاق در هر جمله $n-1$ است.
  - علامت ضریبِ جملات چاق در a^n+b^n زمانی که توانِ b فرد است، منفی می‌شود.
  - **به شکل بخش‌پذیری**
    - a^n-b^n برای هر n طبیعی بر $a-b$ بخش‌پذیر است.
    - a^n+b^n برای هر n طبیعی و فرد بر $a+b$ بخش‌پذیر است.
  - **حالت خاص**
    - **n طبیعی:** $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\dots+1)$
    - **n طبیعیِ فرد:** $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-\dots+1)$
  - **کاربرد در گویا کردن و حذف رادیکال در حد**
    - **n طبیعی:** $(\sqrt[n]{x}-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{x^{n-3}}+\dots+1)=x-1$
    - **n طبیعی و فرد:** $(\sqrt[n]{x}+1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{x^{n-3}}-\dots+1)=x+1$
- **حالت کلیِ رادیکال**
  - **n طبیعی:** $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\dots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$
  - **n طبیعیِ فرد:** $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}-\dots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b$

مفاهیم اولیه‌ی حد

- **میل کردن**
  - **از سمت راست**
    - نماد: $\boxed{x \to a^+}$
    - مفهوم: $\boxed{x > a}$ و البته بسیار نزدیک به a.
  - **از سمت چپ**
    - نماد: $\boxed{x \to a^-}$
    - مفهوم: $\boxed{x < a}$ و از هر چه فکر کنید به a نزدیک‌تر است ...!
  - **دو طرفه**
    - نماد: $\boxed{x \to a}$
    - مفهوم: $\boxed{x \to a^+ \text{ یا } x \to a^-}$
  - (در هر سه حالت $\boxed{x \neq a}$)
  - **وضعیتِ $-x$**
    - اگر $x \to a^+$ آن‌وقت $-x \to (-a)^-$
    - اگر $x \to a^-$ آن‌وقت $-x \to (-a)^+$
    - مقدار x را قرینه کن و علامت همسایگی را عوض کن.
- **همسایگی**
  - **تعریف:** بازه‌ی بازِ شاملِ x_0 را همسایگیِ x_0 می‌گوییم. $\boxed{x_0 \in (a,b) \to (a,b) \text{ همسایگیِ } x_0}$
  - **انواع همسایگی**
    - همسایگی چپ x_0
      - فرم: $\boxed{(x_0 - r, x_0)}$ ؛ پایان بازه x_0 است.
      - شکل:  ، بازه‌ای شامل اعداد کوچک‌تر از x_0.
    - همسایگی راست x_0
      - فرم: $\boxed{(x_0, x_0 + r)}$ ؛ شروع بازه x_0 است.
      - شکل:  ، بازه‌ای شامل اعداد بزرگ‌تر از x_0.
    - همسایگی محذوف x_0
      - فرم
        - $\boxed{(a,b) - \{x_0\}}$
        - $\boxed{(a,x_0) \cup (x_0,b)}$
      - مفهوم: هم اعداد کوچک‌تر از x_0 در آن هستند و هم بزرگ‌تر، ولی خودِ x_0 نیست.
      - شکل: 
  - **اگر گفتند بازه‌ی (a,b) همسایگیِ**
    - چپِ x_0 است؛ آن‌وقت: $\boxed{a < x_0 , b = x_0}$
    - راستِ x_0 است، آن‌وقت: $\boxed{b > x_0 , a = x_0}$
    - $(a,b) \cup (c,d)$ همسایگی محذوف x_0 است، آن‌وقت $\boxed{b = c = x_0}$ و $\boxed{a < x_0 < d}$

مقدماتِ حد تابع در $x \to a$

- **وجود حدِ f در $x \to a$**
  - **شرایط**
    - ① f در سمت چپ و راستِ a تعریف شده باشد.
    - ② حد چپ و راست f در همسایگی a مساوی باشد.
  - **به ریاضی:** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ و سمت چپ و راستِ $x = a$ در تابع، خالی نباشد.
  - **روی نمودار:** در نقطه‌ی $x = a$ تابع، پرش نداشته باشد و یک سمتِ آن هم خالی نباشد.
  - **یافتن حدها** ← روی محور x ها، و سمت چپ و راستِ a علامتِ کوچکی بزن و بعد عرضِ این علامت‌ها را روی تابع پیدا کن...
- **حد و مقدار:** حدِ تابع در $x = a$، با مقدار تابع در این نقطه هیچ ربطی به هم ندارند!
  - **مقدار**
    - نماد: $f(a)$
    - روی شکل: نقطه‌ی توُپر روی تابع به ازای $x = a$ (در صورت وجود)
- **حفره**
  - شکل: 
  - **مفهوم و کاربرد:** اگر تابع کسری در $x = a$ حفره داشته باشد، $x = a$ ریشه‌ی مشترکِ صورت و مخرج بوده است.
- **قوانین حد**
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ آن‌وقت برای $x \to a$ حدِ
    - جمع و منها: $f \pm g = \ell \pm m$
    - ضرب: $fg = \ell m$
    - تقسیم: $\frac{f}{g} = \frac{\ell}{m}$ $(m \neq 0)$
    - توان: $f^k = \ell^k$ $(k \in \mathbb{N})$

تابع‌های چالش‌دار در حد

- **تابع قطعه‌ای**
  - $f(x) = \begin{cases} & x > a \\ & x < a \end{cases}$
    - حد راست از شاخه‌ای که مقابلش $x > a$ دارد، حساب می‌شود.
    - حد چپ از شاخه‌ای که مقابلش $x < a$ دارد، حساب می‌شود.
    - $x = a$ در هر شاخه‌ای باشد، برای حدِ تابع مهم نیست!
  - $f(x) = \begin{cases} & x \neq a \\ & x = a \end{cases}$
    - حد راست و چپ از شاخه‌ای که مقابلش $x \neq a$ دارد، حساب می‌شود.
    - به‌جوردیگه ← برای محاسبه‌ی حد تابع در a، شاخه‌ای را که $x = a$ دارد، نادیده بگیر...

لازم است حد تابع را به حدهای راست و چپ، جدا کنی و هرکدام را جداگانه حساب کنی.

- **تابع قدر مطلقی در $x \to a$**
  - $x = a$، داخل قدرمطلق را صفر نمی‌کند ← عددگذاریِ معمولی کن
  - $x = a$، داخل قدرمطلق را صفر می‌کند $\xrightarrow{\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد}}$ حد چپ و راست را جداگانه حساب کن.
  - **روش رفع چالش:** عبارت را تعیین علامت کنید و به‌طور مناسب از قدرمطلق خارج کنید.
  - **ریاضی:** $|u| = \begin{cases} u & u > 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$

تابع براکتی در $x \to a$

- $x=a$، داخل براکت را عددی صحیح نمی‌کند ← عددگذاریِ معمولی کن.
- $x=a$، داخل براکت را عددی صحیح می‌کند ← حد راست و چپ را جداگانه حساب کن.
- **روش رفع چالش**
  - برای $x \to a^+$ به x، عددی کوچک اضافه کن و بعد جای‌گذاری کن.
  - برای $x \to a^-$ از x، عددی کوچک کم کن و بعد جای‌گذاری کن.
  - $\boxed{x \to a^+ \Rightarrow x \simeq a + 0/001}$
  - $\boxed{x \to a^- \Rightarrow x \simeq a - 0/001}$
- **تابع معروف $[kx]$**
  - $x \to a^+$
    - $k>0$ حدش می‌شود $\boxed{ka}$
    - $k<0$ حدش می‌شود $\boxed{ka-1}$
  - $x \to a^-$
    - $k>0$ حدش می‌شود $\boxed{ka-1}$
    - $k<0$ حدش می‌شود $\boxed{ka}$
  - $x \to a$ و $ka \in \mathbb{Z}$ $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ حد ندارد

$\boxed{\underset{x\to a}{f(x)} = \dfrac{\quad \neq 0}{x-a}}$ مخرج باید با توجه به حد چپ و راست تعیین علامت شود...

محاسبه‌ی حد تابعِ مبهم

- **مسیر اصلی:** تابع در $x \to a$ چالش دارد؟
  - بله: چالش را رفع کن، تابع بدون قدرمطلق و جزء صحیح باشد...
  - خیر: عددگذاری کن $\xrightarrow{\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد؟}}$
    - بله: ابهام را رفع کن.
    - خیر: تمام است، جواب حد در آمده...
- **$\frac{0}{0}$ جبری**
  - عاملِ $x-a$ را در صورت و مخرج ایجاد کن و ساده کن $\xrightarrow{\text{روش‌ها}}$
    - ① اتحادها و فاکتور
    - ② تقسیمِ صورت و مخرج بر $x-a$ و گذاشتن خارج قسمتِ تقسیم به جای هر کدام
  - **هوپیتال بزن**
    - ریاضی: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'}{g'}}$
    - فارسی: به‌جای صورت، مشتق آن و به جای مخرج هم مشتق آن را بذار و بعد عددگذاری کن.
- **$\frac{0}{0}$ رادیکالی**
  - **ضربِ لنگه‌ی مناسب**
    - برای $\sqrt{x} \mp \sqrt{a}$، مزدوجش یعنی $\sqrt{x} \pm \sqrt{a}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
    - برای $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{a}$، عبارتِ $\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
    - برای $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}$، عبارت $\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + \sqrt[n]{x^{n-3}a^2} + \cdots + \sqrt[n]{a^{n-1}}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
  - **اتحادی که استفاده می‌شود**
    - برای فرجه دو: $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$
    - برای فرجه سه: $\boxed{(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3}$
    - برای فرجه n: $\boxed{(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) = a^n - b^n}$
  - **روشِ با مشتق:** هوپیتال بزن... $\boxed{\sqrt[n]{u} \xrightarrow{\text{مشتق}} \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}$

- $\frac{0}{0}$ مثلثاتی
  - عامل صفرکننده را ایجاد کن و از صورت و مخرج خط بزن ← مهم‌ترین اتحادها
    - $\sin^2 u = 1-\cos^2 u = (1-\cos u)(1+\cos u)$
    - $\cos^2 u = 1-\sin^2 u = (1-\sin u)(1+\sin u)$
    - $\sin^3 u \pm \cos^3 u = (\sin u \pm \cos u)(1 \mp \sin u\cos u)$
    - طلایی
      - $1+\cos u = 2\cos^2 \frac{u}{2}$
      - $1-\cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$
    - 2α: $\sin 2u = 2\sin u\cos u$
  - استفاده از هم‌ارزی
    - وقتی $0 \to$ کمان
    - برای سینوس: $\sqrt[n]{\sin^m u} = \sqrt[n]{u^m}$
    - برای کسینوس: $\sqrt[n]{\cos^m u} = 1-\frac{u^2 m}{2n}$

حد نامتناهی

- مفاهیم
  - تعریف: حد نامتناهی، یعنی جوابِ حد تابع برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$
  - تعبیر فارسی
    - $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ؛ در همسایگی a، مقدار تابع از هر چه فکر کنید بیشتر است...
    - $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ؛ در همسایگی a، مقدار تابع منفی و عدد آن بسیار بزرگ است...
- قوانین
  - چه حدی، نامتناهی می‌شود: کسری که صورتش غیرصفر و مخرجش حدِ صفر داشته باشد: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\text{عددغیرصفر}}{\text{صفر}}=\infty$
  - محاسبه‌ی حد نامتناهی: مخرج کسر را تعیین علامت کن
    - جبری‌ها ← جدول تعیین علامت
    - مثلثاتی‌ها ← ببین x در کدام ناحیه می‌افتد
    - صورت کسر مثبت است
      - $\frac{\quad}{0^+}=+\infty$
      - $\frac{\quad}{0^-}=-\infty$
    - صورت کسر منفی است
      - $\frac{\quad}{0^+}=-\infty$
      - $\frac{\quad}{0^-}=+\infty$
    - مخرج همواره مثبت است

      فقط علامت صورت و ضریب مهمه! مخرج تعیین علامت نمی‌خواد
      - جبری‌ها
        - $\frac{\quad}{|u|}$
        - $\frac{\quad}{u^{2k}}$
        - $\frac{\quad}{\sqrt[2k]{u}}$
        - Δ مخرج صفره... ← باعلامت a ← علامت مخرج معلومه
      - مثلثاتی‌ها
        - $1\pm\sin u \geq 0$
        - $1\pm\cos u \geq 0$

- ریخت‌شناسی
  - حدِ یک‌طرفه نامتناهی شود
    - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$
    - $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$
    - $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$
  - هر دو حدِ راست و چپ نامتناهی می‌شوند
    - انفصال مضاعف
      - حد راست و چپ هر دو $+\infty$
      - حد راست و چپ هر دو $-\infty$
    - حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$
    - حد راست $-\infty$ و حد چپ $+\infty$

کسر در همسایگیِ a در کنکور

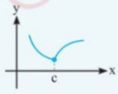
- وضعیت $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ell}{m}$
  - حد صورت و مخرج صفر است ← رفع ابهام کن: $\text{مبهم} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$
  - فقط مخرج صفر است ← حد نامتناهی است ← مخرج را تعیین علامت کن: $\infty = \dfrac{\text{غیرصفر}}{\text{صفر}}$
  - مخرج صفر نیست ← عددگذاری معمولی کن: $\text{عدد} = \dfrac{\text{هر عددی}}{\text{غیرصفر}}$
- کسرِ نامتناهی معروف
  - شرایط
    - مخرجش عبارتی درجه‌ی دو است: $\dfrac{☁}{ax^2+bx+c}$
    - x به‌صورت یک‌طرفه به عددی میل نمی‌کند؛ همسایگیِ x راست و چپ ندارد! $\boxed{x\to m}$
    - جوابِ حد، شده $+\infty$ یا $-\infty$. $\lim\limits_{x\to m} \dfrac{☁}{ax^2+bx+c}=\pm\infty$
  - نتیجه‌گیری
    - مفهومی: $x=m$ ریشه‌ی مضاعف مخرج بوده است.
    - اجرا در تست
      - $-\dfrac{b}{a}=2m$
      - $\dfrac{c}{a}=m^2$

حد در بی‌نهایت

- **مفاهیم**
  - $x \to +\infty$ یعنی x عدد مثبتِ خیلی بزرگی است $\xleftarrow{\text{لازمه}}$ تابع در بازه‌ی $(\quad , +\infty)$ تعریف شده باشد.
  - $x \to -\infty$ یعنی x عددِ منفی است ولی قدر مطلقش بزرگ است $\xleftarrow{\text{لازمه}}$ تابع در بازه‌ی $(-\infty , \quad)$ تعریف شده باشد.
- **جواب حد تابع در بی‌نهایت**
  - $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell}$؛ $f(x)$ می‌تواند به هر مقدار که بخواهید به ℓ نزدیک شود به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی بزرگ کرده باشید.
  - $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty}$؛ با بزرگ شدنِ x، مقدار تابع هم بزرگ می‌شود...
  - $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\text{تعریف نشده}}$؛ دامنه‌ی تابع از دو طرف محدود بوده است.
- **روش محاسبه**
  - حد بی‌نهایت فقط در مخرج: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{k}{x^r}=0}$ $(r>0)$
  - پر توان
    - روش استفاده: به جای هر عبارتِ جبری، فقط جمله‌ای که بزرگ‌ترین توان را دارد با ضریبش نگه‌دار و بقیه را حذف کن...
      $\boxed{ax^n+bx^{n-1}+\cdots \xrightarrow{x\to\infty} ax^n}$
    - کجا قابل استفاده است: چند جمله‌ای در موقعیتِ $\boxed{x\to\infty}$
      - توان: $\boxed{2^{x^2+x}=2^{x^2}}$
      - پایه: $\boxed{(x^2+x)^3=(x^2)^3}$
      - زیر رادیکال: $\boxed{\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2}}$
      - توی قدرمطلق: $\boxed{|x^2+x|=|x^2|}$
    - چند جمله‌ای کنارِ رادیکال: $\boxed{\underset{x\to\infty}{ax^m+\sqrt[n]{bx^p+\cdots}}}$
      - می‌شود $\boxed{ax^m}$، اگر $\boxed{\dfrac{p}{n}<m}$
      - می‌شود $\boxed{\sqrt[n]{bx^p}}$، اگر $\boxed{\dfrac{p}{n}>m}$
  - **برای عبارت گویا:** در کسری که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند، با شرط
    - درجه‌ی مخرج < درجه‌ی صورت ← جواب حد می‌شود: بی‌نهایت
    - درجه‌ی مخرج = درجه‌ی صورت ← جواب حد می‌شود: ضریبِ پر توانِ صورت به ضریبِ پر توانِ مخرج
    - درجه‌ی مخرج > درجه‌ی صورت ← جواب حد می‌شود: صفر

پیوستگی

- **در نقطه $\boxed{x=c}$**
  - روی نمودار: اگر از کمی قبلِ $x=c$ روی تابع به سمتِ کمی بعد آن حرکت کنیم، مجبور به برداشتن قلم از روی کاغذ نشویم...



  - به زبان ریاضی: حد چپ و راست و مقدار مساوی باشند: $\boxed{\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)}$
- **در بازه‌ی...**
  - (a,b): تابع در محدوده‌ی x های این بازه هیچ نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد:
  - $[a,b)$: در (a,b) پیوسته است و در a پیوستگی راست دارد:
  - $(a,b]$: در (a,b) پیوسته است و در b پیوستگی چپ دارد:
  - $[a,b]$: در (a,b) پیوسته است و در a پیوستگی راست دارد و در b پیوستگی چپ دارد:

حالت‌های ناپیوستگی تابع در نقطه‌ی $x = c$

انواع پیوستگی
- **راست:** حد راست و مقدار مساوی‌اند $\boxed{\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)}$: 
- **چپ:** حد چپ و مقدار مساوی‌اند $\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)}$: 
- **کامل:** حد راست و چپ و مقدار هر سه تا مساوی‌اند $\boxed{\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)}$: 

روی $\mathbb{R}$
- **تابع کسری است** $\xrightarrow{\text{شرط}}$ Δ مخرج را کوچک‌تر از صفر قرار دهید: $\boxed{\Delta_u < 0 \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} \frac{☁}{u}}$
- **تابع رادیکالی است** $\xrightarrow{\text{شرط}}$ زیر رادیکالِ فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید: $\boxed{u \geq 0 \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} \sqrt[2k]{u}}$
- **تابع چند ضابطه‌ای است** $\xrightarrow{\text{شرط}}$ شرط پیوستگی را برای تمامِ نقطه‌های شکست دامنه بنویس...

$$\boxed{y = \begin{cases} f(x) & x > c \\ g(x) & x \leq c \end{cases} \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} f(c) = g(c)}$$

تابع در این نقطه تعریف نشده
- **کسرها روی ریشه‌ی مخرج خود:** مثل $y = \frac{x}{x+1}$ در $x = -1$.
- **مثلثاتی‌ها**
  - $\boxed{\tan u}$ هر جا که $\boxed{u = k\pi + \frac{\pi}{2}}$ شود.
  - $\boxed{\cot u}$ هر جا که $\boxed{u = k\pi}$ شود.
- **تابع لگاریتمی:** $\boxed{y = \log u}$ وقتی $\boxed{u = 0}$ شود. مثل $y = \log(x+1)$ در $x = -1$.

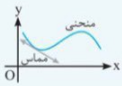
این نقطه ابتدا یا انتهای بازه است (شروع و پایان دامنه)
- **اگر برای x محدوده داده‌اند:** 
- $y = \sqrt{ax+b}$ **در ریشه‌ی زیر رادیکال:** مثل $y = \sqrt{x+1}$ روی $x = -1$.

این نقطه حفره‌ی تابع است
- **مفهوم:** تابع در این نقطه حد دارد ولی مقدارش یا وجود ندارد یا با حدها مساوی نیست.
- **شکل:** 
- **کجا اتفاق می‌افتد**
  - در کسری که $x = c$ ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج است.
  - در تابع چند ضابطه‌ای که $x = c$ یک شاخه‌ی مجزا باشد، از این حالت بترسید...!

$$\boxed{y = \begin{cases} f(x) & x > c \\ g(x) & x < c \\ k & x = c \end{cases} \quad \text{یا} \quad y = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ k & x = c \end{cases}}$$

تابع براکتی: $\boxed{y = [ax]}$ در نقاطی با فرم $\boxed{(k \in \mathbb{Z})\ x = \frac{k}{a}}$ ناپیوسته است.

فصل در یک نگاه



مماس

- **تعریف:** خطی بر منحنی مماس است که
  - ① تنها یک نقطه‌ی مشترک با منحنی داشته باشد و در همسایگی آن نقطه تابع را قطع نکند!
  - ② در نقطه‌ی تماس، منحنی نقطه‌ی گوشه‌ای نشود.
  - ③ نقطه‌ی تماس خط و منحنی عضو دامنه‌ی f باشد (توخالی نباشد).
- **انواع مماس**
  - **مماس افقی** ←(وضعیت) موازی محور x ها با شیب صفر ←(شکل)  یا ←(مشتق) $f' = 0$
  - **مماس قائم** ←(وضعیت) موازی محور y ها با شیب $\pm\infty$ ←(شکل)  یا ←(مشتق) $f' = \pm\infty$
  - **مماس مایل** ←(وضعیت) نه موازی محور x ها و نه موازی محور y ها ←(شکل)  ←(مشتق) عددی حقیقی و غیرصفر
    - مشتق مثبت 
    - مشتق منفی 
- **نیم‌مماس**
  - **نیم‌مماس راست:** سمت راستِ نقطه، یک نیم‌خطِ مماس بکش ←(نماد مشتق) $\boxed{f'_{+}(c) = \text{شیب نیم‌مماس راست}}$ ←(شکل) 
  - **نیم‌مماس چپ:** سمت چپِ نقطه، یک نیم‌خطِ مماس بکش ←(نماد مشتق) $\boxed{f'_{-}(c) = \text{شیب نیم‌مماس چپ}}$ ←(شکل) 
- **خط مماس**
  - **شیب:** در هر نقطه می‌شود مشتق در آن نقطه
    - ریاضی: $\boxed{f'(a) = \text{شیب مماس در نقطه‌ای به طول } a \text{ روی منحنی}}$
    - نموداری: m مماس ← f' ← a
    - نحوه‌ی اجرا: از تابع مشتق بگیر و به جای x های آن بذار a، این می‌شود $f'(a)$ یا شیب مماس.
  - **معادله‌ی مماس**
    - فرمول: $\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$ ←(حالت خاص $f'(a) = \pm\infty$) $\boxed{x = a}$
    - نحوه‌ی اجرا: $x = a$ را به
      - خود تابع بده ←(دریافتی) $f(a)$
      - مشتق تابع بده ←(دریافتی) $f'(a)$
      - ←(جای گذاری) فرمول بالا...

مفاهیم ابتدایی مشتق

- **تعریف مشتق در a**
  - در همسایگی صفر: $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$
  - در همسایگی خود a: $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$
  - حدِ f دار: $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \dfrac{m-n}{k} f'(a)}$
- **ارتباط با مماس:** مشتق در نقطه‌ی $x = a$، همان شیب مماس بر تابع در نقطه‌ای با طول a است...
- **وجود مشتق**
  - تابع در $x = a$ پیوسته باشد.
  - جوابِ تعریف مشتق، عددی حقیقی و متناهی باشد.
  - ←(هندسی) بتوان در $x = a$ یک خط مماسِ غیر قائم بر تابع کشید.

مشتق‌گیری

- **در چه تابعی از تعریف مشتق استفاده کنیم**
  - $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ k & x=a \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{در } x=a}$ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-k}{x-a}$
  - $f(x)=(x-a)g(x)$
    - با تعریف: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)g(x)-0}{x-a}$
    - راه تستی: $x-a$ را نادیده بگیر و حدِ g را در همسایگی a پیدا کن $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$
- **مشتق‌های یک‌طرفه**
  - مشتق راست
    - نماد: $f'_{+}(a)$
    - مفهوم: شیب نیم‌مماس راست در نقطه‌ای به طول a
    - تعریف ریاضی: $f'_{+}(a)=\lim\limits_{x\to a^{+}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
  - مشتق چپ
    - نماد: $f'_{-}(a)$
    - مفهوم: شیب نیم‌مماس چپ در نقطه‌ای به‌طول a
    - تعریف ریاضی: $f'_{-}(a)=\lim\limits_{x\to a^{-}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
  - $\underbrace{f'_{+}(a)=f'_{-}(a) \text{ و } f \text{ در } a \text{ پیوسته}}_{\text{شرط مشتق‌پذیری در } a}$
- **مرتبه‌های بالاتر:** $f\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f'\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f''\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f'''$ برای رسیدن به مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر، پشتِ سر هم مشتق بگیر...
- **تابع‌های بیسیک**
  - $y=x^n$ با فرضِ $n\in\mathbb{Q}$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=nx^{n-1}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$
    - ① $y=x\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=1$
    - ② $y=k\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=0$
  - $y=\sqrt{ax+b}$ ، تابع خطیِ زیر رادیکال $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
  - $y=\sqrt[3]{ax+b}$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=\dfrac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt[3]{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- **قالب‌ها**
  - ضریب عددی: $mf\xrightarrow{\text{مشتق}}mf'$
  - جمع و منها: $f\pm g\xrightarrow{\text{مشتق}}f'\pm g'$
  - نتیجه: $mf\pm ng\xrightarrow{\text{مشتق}}mf'\pm ng'$
  - ضرب: $fg\xrightarrow{\text{مشتق}}f'g+g'f$ ؛ مشتق اولی در دومی + مشتق دومی در اولی
  - تقسیم: $\dfrac{f}{g}\xrightarrow{\text{مشتق}}\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$ ؛ مشتق صورت در مخرج، منهای مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر مجذور مخرج...
    - حالت خاص هموگرافیک: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ آن‌گاه $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- **ترکیبی‌ها**
  - عبارتِ توان‌دار در حالت کلی: اگر $y=u^m$ باشد، آن‌گاه $y'=mu^{m-1}u'$
  - عبارتِ فرجه‌دار در حالت کلی: اگر $y=\sqrt[m]{u}$ باشد، آن‌گاه $y'=\dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$
- **ترتیبِ عملیات:** اول ساده کردنِ ضابطه‌ی تابع، دوم مشتق‌گیری و سوم عددگذاری $f\xrightarrow{\text{ساده کن}}\bigcirc\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}$ عدد بده
- **از تابعی که عامل صفرساز دارد:** $y=f(x)g(x)\xrightarrow{f(a)=0}y'(a)=f'(a)g(a)$ ؛ فقط از عامل صفرسازِ ضرب‌شده، مشتق بگیر و ضریب را عیناً بنویس، آخر سر عددگذاری کن...

مشتق‌ناپذیری

- **از تابع چند ضابطه‌ای** $\xrightarrow{\text{به شرط پیوستگی}}$ $y=\begin{cases} f(x) & x\ge a \\ g(x) & x<a \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\begin{cases} f'(x) & x>a \\ g'(x) & x<a \end{cases}$ ؛ از هر شاخه مشتق بگیر و تساویِ موجود در دامنه را حذف کن.
  - $\xrightarrow[x>a]{\text{مشتق راست}} y'_+(a)=f'(a)$
  - $\xrightarrow[x<a]{\text{مشتق چپ}} y'_-(a)=g'(a)$
  - شرط مشتق‌پذیری: $f'(a)=g'(a)$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$
- **از تابع قدرمطلق دار:** عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنید و قدرمطلق را به‌طور مناسب بردارید ← چند ضابطه‌ای می‌شود ← مشتق بگیر:

$$y=|u|=\begin{cases} u & u\ge 0 \\ -u & u<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\begin{cases} u' & u>0 \\ -u' & u<0 \end{cases}$$

- **از تابع جزء صحیح دار**
  - اگر عدد داده‌شده، عبارت داخل براکت را صحیح نمی‌کند ← عددگذاری معمولی کن ← مشتق بگیر
  - اگر عدد داده‌شده، عبارت داخل براکت را صحیح می‌کند ← به مشتق‌های راست و چپ تفکیک کن و جداگانه حساب کن...

- **دامنه‌ی مشتق:** مجموعه xهایی از دامنه‌ی f که تابع در آن‌ها پیوسته بوده و مشتق راست و چپِ برابر دارد...
- **ارتباط با پیوستگی**
  - اگر طراح گفت f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، نتیجه بگیر پیوسته هم بوده است.
  - اگر f در نقطه‌ی a ناپیوسته باشد، حتماً مشتق‌ناپذیر است.
  - یادت باشه

- **کاندیداهای مشتق‌ناپذیری**
  - **تابع کسری:** روی ریشه‌ی مخرج قطعاً! $\dfrac{\square}{u} \xrightarrow{\text{مشتق‌ناپذیری}} u=0$
  - **تابع قدرمطلقی:** روی ریشه‌ی عبارتِ داخل، شاید!
    - $|u| \xrightarrow{\text{کاندید مشتق‌ناپذیری}} u=0$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=|ax+b|$ در $-\dfrac{b}{a}$ حتماً مشتق ندارد
  - **تابع رادیکالی**
    - رادیکال فرجه ۲: $\sqrt{u} \xrightarrow{\text{کاندید مشتق‌ناپذیری}} u=0$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt{ax+b}$ در $-\dfrac{b}{a}$ حتماً مشتق ندارد
    - رادیکال فرجه ۳: $\sqrt[3]{(ax+b)^2(cx+d)} \xrightarrow{\text{کاندیدای مشتق‌ناپذیری}} x=-\dfrac{b}{a},-\dfrac{d}{c}$
  - **تابع قطعه‌ای**
    - $y=\begin{cases} f(x) & x\ge a \\ g(x) & x<a \end{cases}$ در $x=a$ شاید مشتق‌پذیر نباشد. (شاخه‌ی $x=a$ هرجا می‌تواند باشد!)
    - $y=\begin{cases} f(x) & x\ne a \\ k & x=a \end{cases}$ در $x=a$ شاید مشتق‌پذیر نباشد.
    - یادت باشه: اول پیوستگی و بعد مشتق‌پذیری را بررسی کن...
  - **تابع جزء صحیح:** $y=[u]$، هر نقطه‌ای که $u\in\mathbb{Z}$ شود شاید مشتق نداشته باشد. $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $[ax]$ روی نقاط $x=\dfrac{k}{a}$ $(k\in\mathbb{Z})$ مشتق ندارد

- **ریخت‌شناسی:** در نقطه‌ی مشتق ناپذیری، یا خط مماس نمی‌توان کشید یا دوتاست یا عمودی است:

- **مشتق‌پذیری روی بازه**
  - (a,b): در تمام نقاط بازه پیوسته بوده و در این بازه هیچ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری نداشته باشد.
  - $[a,b)$: روی (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در $x=a$ مشتق راست هم داشته باشد.
  - $(a,b]$: روی (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در $x=b$ مشتق چپ هم داشته باشد.
  - $[a,b]$: روی (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در $x=a$ مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.
- **روی $\mathbb{R}$**
  - **مفهوم:** یعنی هیچ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری ندارد.
  - **نحوه‌ی اجرا:** حواست به دو تابع باشه
    - ◄ نقطه‌ی شکست دامنه در تابع چند ضابطه‌ای $\xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}}$ حد چپ و راست و مشتق چپ و راستِ نقطه‌ی مرزی را برابر بذار... $\xrightarrow{\text{ریاضی}}$ $y=\begin{cases} f(x) & x \ge a \\ g(x) & x < a \end{cases} \xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} g(x) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$ $\xleftarrow{\text{دقت کن}}$ تمامی نقطه‌های مرزی را بررسی کن
    - ◄ مخرج کسر $\xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}}$ $\boxed{\Delta < 0 \text{ مخرجِ}}$

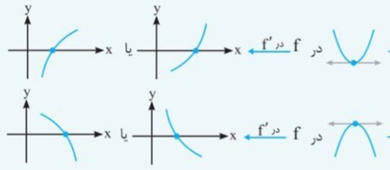
مشتق تابع مرکب

- **فرمول**
  - $y=(fog)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y' = g'(x)f'(g(x))$
  - $y=(gof)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y' = f'(x)g'(f(x))$
  - $y=(fof)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y' = f'(x)f'(f(x))$
- **به فارسی:** از تابع سمت راستی در نقطه‌ی a مشتق بگیر، ضربدر از تابع چپی مشتق بگیر در نقطه‌ی عرضِ a به‌ازای اولی...
  - $(fog)'(a) = g'(a)f'(g(a))$
  - $(gof)'(a) = f'(a)g'(f(a))$
- **تیپ‌بندی تست**
  - $\boxed{u=g(x)\,,\, y=f(u)}$: y تابعی از u داده شده و u هم عبارتی بر حسب x است.
    - $y' = ?$ بر حسب x
    - ◄ **روش اول:** به جای u در تابع y، مقدارش را که بر حسب x است بگذارید، حالا تابع f فقط بر حسب x است و آماده‌ی مشتق‌گیری.
    - ◄ **روش دوم:** از تابع y بر حسب u مشتق بگیرید و از تابع u هم بر حسب x و این دو عبارت را در هم ضرب کنید...
  - $\boxed{\text{مشتقِ } f(u)} \xrightarrow{u \text{ عبارتی بر حسب } x \text{ است}} \boxed{u'f'(u)}$: مشتق کمان ضربدر مشتق تابع به ازای کمان قبلی...
  - $\boxed{\text{مشتقِ } f^m(u)} \xrightarrow[m\in\mathbb{N}]{u \text{ عبارتی بر حسب } x \text{ است}} \boxed{mf^{m-1}(u)\cdot u' \cdot f'(u)}$: برای علاقه‌مندان به ۱۰۰٪...!

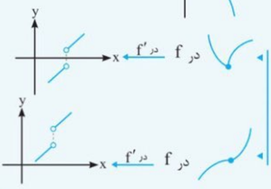
مقایسه‌ی نمودار f و f′

رفتار
- در f، فاصله‌هایی که صعودی است $\xrightarrow{f'\text{ در}}$ بالای محور xها قرار دارد.
- در f، فاصله‌هایی که نزولی است $\xrightarrow{f'\text{ در}}$ پایین محور xها قرار دارد.

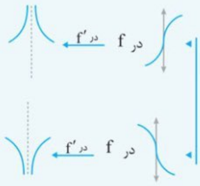
نقطه‌های حساس



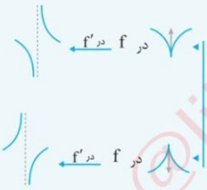
- **گوشه‌ای در f** $\xrightarrow{f'\text{ در}}$ نقطه‌ی انفصال است، ببین:



- **عطف قائم در f** $\xrightarrow{f'\text{ در}}$ شبیه حد نامتناهی با انفصال مضاعف می‌شود.



- **بازگشتی در f** $\xrightarrow{f'\text{ در}}$ شبیه حد نامتناهی با انفصال غیرمضاعف می‌شود.



هوپیتال

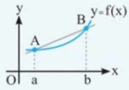
- **کاربرد در:** حدهایی که دارای ابهامِ $\frac{0}{0}$ هستند.
- **روش کار:** به جای صورت، مشتق آن و به جای مخرج هم مشتق آن را گذاشته، بعد همسایگی داده‌شده را عددگذاری کنید.

$$\lim_{x\to a}\frac{A}{B}\xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد}}\lim_{x\to a}\frac{A'}{B'}$$

- **دفعات استفاده از هوپیتال:** تا هر چند باری که کسر با ابهامِ $\frac{0}{0}$ مواجه شود می‌توانید هوپیتال را به کار ببرید تا بالاخره به جوابِ حد برسید.
- **فرق هوپیتال‌گیری با مشتق کسر**
  - مشتق کسر: $\frac{A}{B}\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}\frac{A'B-B'A}{B^2}$
  - هوپیتال: $\frac{A}{B}\xrightarrow{HOP}\frac{A'}{B'}$

آهنگ تغییر

- **آهنگ متوسط**
  - در بازه‌ی $[a,b]$ ← فرمول: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  - مفهوم: شیب پاره‌خطی که دو نقطه به طول‌های a و b را روی نمودار تابعِ f، به هم وصل می‌کند.
  - شکل:



- **آهنگ لحظه‌ای**
  - در نقطه‌ی $x=c$ ← فرمول: $f'(c)$
  - جور دیگه:
    - $c \rightarrow \boxed{f'} \rightarrow$ mِ مماس
    - $c \rightarrow \boxed{f'} \rightarrow$ آهنگ لحظه‌ای
  - فارسی: از تابع مشتق بگیر و به جای x ها بذار c، این می‌شود آهنگ لحظه‌ای...

- **در فیزیک**
  - x به‌صورت تابعی از زمان داده می‌شود: $\boxed{x=f(t)}$
  - مشتقِ تابعِ x (همان جابه‌جایی) می‌شود سرعت. $\boxed{x \xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}} v}$
  - **دو مفهومِ مهم**
    - توقف: یعنی سرعت صفر شده.
    - برخورد با زمین: یعنی جابه‌جایی صفر شده.

فصل در یک نگاه

یکنوایی و رفتار تابع

- **مفهوم:** تابعِ f در بازه‌ی (a,b)
  - **صعودی اکید است**
    - با افزایش x در بازه، y های نظیر هم زیاد می‌شوند.
    - در کلِ بازه $\boxed{f'>0}$ و امکان دارد در تعدادی از نقاط $f'=0$ هم بشود...
  - **نزولی اکید است**
    - با افزایش x در بازه، مقدار y های آنها کمتر می‌شود.
    - در تمام بازه $\boxed{f'<0}$ و امکان دارد در چند نقطه از این بازه، $f'=0$ هم بشود...
  - **صعودی غیراکید است**
    - با افزایش x، y ها زیاد شده و در بخشی هم تابع ثابت می‌شود.
    - $\boxed{f'>0}$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$؛ $\boxed{f'\geq 0}$
  - **نزولیِ غیراکید است**
    - با افزایش x، y ها کم شده و در بخشی از بازه، تابع ثابت می‌شود.
    - $\boxed{f'>0}$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$؛ $\boxed{f'\geq 0}$
- **ارتباط دقیق مشتق و رفتار**
  - **از مشتق به رفتارِ تابع برسیم**
    - اگر $\boxed{f'>0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **صعودی اکید** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'<0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **نزولی اکید** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'\geq 0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **صعودی** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'\leq 0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **نزولی** بوده است.
  - **از رفتار تابع به مشتقِ آن برسیم**
    - اگر f **صعودی یا صعودی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $\boxed{f'\geq 0}$.
    - اگر f **نزولی یا نزولی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $\boxed{f'\leq 0}$.
    - استثنایی کم کاربرد ← اگر تابع چند ضابطه‌ای با شاخه‌ی ثابت یا قدرمطلق‌دار باشد، برای اکیدها مساوی نذار...
- **تعیین رفتار**
  - **تابع پیوسته و بدون قدرمطلق است** $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق بگیر و آن را تعیین علامت کن و برای f فلش بزن
    - جدول ←

x		x_0	
f'	+	○	−
f	↗		↘

    - ریشه مضاعف ← قبل و بعد ریشه‌ی مضاعف علامت عوض نمی‌شود!
  - **تابع ناپیوسته است یا قدرمطلق دارد** $\xrightarrow{\text{روش}}$ رسم کن و از مفهومِ صعودی نزولی استفاده کن.
  - **تابع کسری**
    - مخرج کسر ریشه ندارد $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق
    - مخرج کسر ریشه دارد $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ قطعاً تابع یکنوا نیست $\xrightarrow{\text{بازه‌ای داده که ریشه‌ی مخرج در آن نیست}}$ روش مشتق
      - $\boxed{f'\geq 0 \text{ صعودی}}$
      - $\boxed{f'\leq 0 \text{ نزولی}}$
    - گفته شده که در یک بازه یکنوا است $\xrightarrow{\text{روش}}$ علامتِ مشتق را مطابقِ رفتارِ تابع تنظیم کنید و کاری کنید که ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی داده نشده نیفتد!

شناخت و معرفیِ نقطه‌های مهم در تابع

اکسترمم نسبی ($c \in D_f$)

- **مینیمم نسبی:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با عرض نقطه‌های چپ و راستِ آن کمتر یا مساوی است. ← شکل‌ها

- **ماکزیمم نسبی:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با عرض نقطه‌های چپ و راستِ آن بیشتر یا مساوی است. ← شکل‌ها

اکسترمم یعنی مینیمم یا ماکزیمم

اکسترمم مطلق ($c \in D_f$)

- **مینیمم مطلق:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با تمامی عرض‌های تابع و در کلِ دامنه از همه کمتر یا مساویِ بعضی است. ← نام‌دیگر: کمترین مقدار تابع
- **ماکزیمم مطلق:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با تمامی عرض‌های تابع و در کلِ دامنه از همه بیشتر یا مساوی بعضی است. ← نام‌دیگر: بیشترین مقدار تابع

بحرانی: نقطه‌ای از درون دامنه که در آن $f' = 0$ یا f' = وجودندارد

- **شناخت از روی خط مماس**
  - خط مماس قابل **رسم** نیست.
  - **دو نیم مماس** می‌توان کشید.
  - **مماس** کشیده شده **افقی یا قائم** است.
- **شناخت از روی شکل**
  - نقاط ناپیوستگی: 
  - نقاط گوشه‌ای: 
  - نقاط عطف قائم: 
  - نقاط بازگشتی: 
  - اکسترمم‌های مشتق‌پذیر: 

اول و آخر بازه: اگر تابع روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شود، اول و آخرِ آن یعنی $x = a$ و $x = b$

- اکسترمم نسبی و بحرانی نیستند.
- اکسترمم مطلق، شاید باشند.

ارتباط سه نقطه با هم ← نموداروِن

$A(a,b)$ بحرانی یا اکسترمم باشد $\Leftarrow$ $\boxed{f(a) = b}$

پیدا کردن نقطه‌های مهم از روی ضابطه

اکسترمم نسبی

- **تابع پیوسته و بی قدرمطلق است** ← آزمون مشتق اول: مشتق بگیر و تعیین علامت کن

x		x_0	
f'	+	○	−
f	↗		↘

max نسبی

x		x_1	
f'	−	○	+
f	↘		↗

min نسبی

روی x_0 و x_1 مشتق می‌تواند صفر شود یا نشود!

- **تابع ناپیوسته است یا قدرمطلق دارد** ← روش: رسم کن و از راه تعریف اکسترمم شناسایی کن...
- **بدونِ تعیینِ علامتِ مشتق**
  - اگر $\boxed{f'(x) = (x-\alpha)^{2k}(x-\beta)^{2k-1}}$ $(k \in \mathbb{N})$ باشد
    - $x = \alpha$ طولِ اکسترمم نیست!
    - $x = \beta$ طولِ اکسترمم هست!
  - اگر $\boxed{f(x) = \text{عدد} + (x-m)^{2k}}$ ☁ $(k \in \mathbb{N})$ باشد، در این‌صورت $x = m$ طول اکسترمم است.

Scanned with CamScanner

- **اکسترمم مطلق**
  - **تابع پیوسته است** $\xrightarrow[\text{بازه‌ی } [a,b] \text{ را می‌دهد}]{\text{سیدهدف}}$ تمام بحرانی‌ها را به اضافه‌ی a و b در یک جدول قرار بده و عرض همگی را پیدا کن.
    بیشترین عرض می‌شود ماکزیمم مطلق و کمترین عرض هم مینیمم مطلق.
  - **تابع ناپیوسته است** ← رسم کن و از مفهوم اکسترمم مطلق شناسایی کن...
- **بحرانی**
  - ① **تابع تک ضابطه‌ای است بدون قدر مطلق و جزء صحیح** $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق بگیر و ساده کن، اگر یک کسر شد، آن‌گاه:
    - $f'=\dfrac{A}{B}$: $A=0$ ← بحرانی است $\xleftarrow{\text{شرط}}$ وجود در بازه و دامنه
    - $f'=\dfrac{A}{B}$: $B=0$ ← بحرانی است $\xleftarrow{\text{شرط}}$ وجود در بازه و دامنه
    - $\xrightarrow{\text{بازه ندارد}}$ $D=\mathbb{R}$: $f'=\dfrac{A}{B} \xrightarrow{A \text{ و } B=0}$ بحرانی‌ها
  - ② **تابع قدرمطلقی است:** $y=|u| \xrightarrow{\text{قرار بده}}$ $u=0$ و $u'=0$ ← تمامی نقاط بحرانی به‌دست می‌آید.
  - ③ **تابع چند ضابطه‌ای است**
    - در هر شاخه‌ی آن جداگانه و با روشِ ① بحرانی‌ها را پیدا کن
    - هر نقطه‌ی شکست دامنه، شانسِ بحرانی بودن دارد $\xrightarrow{\text{چک‌کن}}$ ناپیوسته، بدون مشتق، مشتق صفر یا ∞ ← بحرانی

ارتباط مشتق و اکسترمم نسبی

- ① f در c پیوسته بوده و f' در c تغییر علامت می‌دهد
- ② $f'(c)=0$ و f' در c تغییر علامت می‌دهد

$\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $x=c$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی f است $\xrightarrow{\text{آیا } f \text{ در } c \text{ مشتق دارد}}$
- بله $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $f'(c)=0$
- خیر $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $f'(c)$ وجود ندارد

شناخت نقطه‌های مهم تابع روی نمودار

- **اکسترمم نسبی:** یک خطِ افقیِ کوچک روی عرضِ نقطه بکش
  - **تابع بالای خط افقیِ کوچک بود** ← نقطه را **مینیمم نسبی** اعلام کن: 
  - **تابع پایین خط افقیِ کوچک بود** ← نقطه را **ماکزیمم نسبی** اعلام کن: 
- **اکسترمم مطلق:** نقطه‌ی توپُری که
  - **بالاترین نقطه‌ی نمودار است** $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ **ماکزیمم مطلق است:** 

  - **پایین‌ترین نقطه‌ی نمودار است** $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ **مینیمم مطلق است:** 

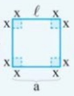
- **بحرانی:** خطِ مماس کشیده شده در این نقطه
  - **افقی است:** 
  - **عمودی است:** 
  - **بدون مماس است!** 

نقطه‌های مهم در تابع‌های معروف

- $\boxed{y=k|ax+b|}$ نقطه‌ی $\boxed{x=-\frac{b}{a}}$
  - با فرض $k>0$: مینیمم نسبی، مینیمم مطلق و بحرانی است.
  - با فرض $k<0$: ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و بحرانی است.
- $\boxed{y=ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$ نقطه‌ی $\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$
  - با فرض $a>0$: مینیمم نسبی، مینیمم مطلق و بحرانی است.
  - با فرض $a<0$: ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و بحرانی است.
- $\boxed{y=a(bx+c)^3+d}$ $(a\neq 0)$ نقطه‌ی
  - **اکسترمم نسبی و مطلق ندارد.**
  - $\boxed{x=-\frac{c}{b}}$ یا همان ریشه‌ی پرانتز نقطه‌ی **بحرانی** است.
- $\boxed{y=a\sin(bx+c)+d}$ $(a\neq 0)$
  - نقطه‌هایی با طولِ $\boxed{bx+c=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(k\in\mathbb{Z})$، **ماکزیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
  - نقطه‌هایی با طولِ $\boxed{bx+c=2k\pi-\frac{\pi}{2}}$ $(k\in\mathbb{Z})$، **مینیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
- $\boxed{y=a\cos(bx+c)+d}$ $(a\neq 0)$
  - نقطه‌هایی با طولِ $\boxed{bx+c=2k\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$، **ماکزیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
  - نقطه‌هایی با طولِ $\boxed{bx+c=2k\pi+\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$، **مینیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
- $\boxed{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$ $(c\neq 0)$ $\xrightarrow{\text{اکسترمم و بحرانی}}$ ندارد.
- $\boxed{y=c\sqrt{ax+b}+d}$ روی $\boxed{x=\frac{-b}{a}}$ یا همان ریشه‌ی زیر رادیکال
  - $c>0$: مینیمم مطلق دارد.
  - $c<0$: ماکزیمم مطلق دارد.

بهینه‌سازی

- **هدف:** قرار است کمیتِ خاصی را ماکزیمم یا مینیمم کنیم؛ یافتنِ **بهترین حالت ممکن!**
- **شناسایی در بین تست‌ها**
  - قالبِ تست، مسئله‌ای توضیحی دارد و معمولاً ترکیبیِ با هندسه یا...
  - خواسته‌ی سؤال یکی از کلمات کلیدی **بیشترین مقدارِ** یا **کمترین مقدارِ** را دارد...
- **روش حل**
  1. کشیدن یک شکل
  2. پیدا کردن عبارتی که قرار است بهینه شود، نامش را P بگذارید.
  3. P را تک مجهولی کنید. روش کار استفاده از شکل و روابط هندسی و ریاضیِ حاکم بر آن یا داده‌های تست...
  4. از Pِ تک مجهولی مشتق گرفته و مساویِ صفر بگذارید و مجهولِ قابل قبول و واقعی را پیدا کنید!
- **مسائل معروف**
  - **ساختن جعبه**

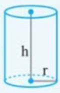
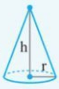
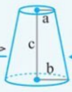


$\xrightarrow{\text{حجم ماکزیمم شود}}$ $\boxed{P=x(a-2x)^2}$ $\xrightarrow{P'=0}$ $\boxed{x=\ \ }$

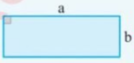
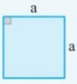
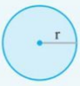
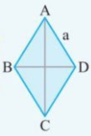
  - **کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه تا منحنی**
    - داده‌ها: نقطه‌ی $\boxed{A(a,b)}$ و ضابطه‌ی تابع f
    - عبارتی که باید بهینه کنید: $\boxed{P=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-b)^2}}$
- **بدون مشتق** (برای $x,y>0$)
  - اگر $\boxed{x+y=k}$ و xy **ماکزیمم** باشد، باید $\boxed{x=y}$ شود: $\boxed{\max(xy)=\frac{k^2}{4}}$
  - اگر $\boxed{xy=t}$ و $x+y$ **مینیمم** باشد، باید $\boxed{x=y}$ شود: $\boxed{\min(x+y)=2\sqrt{t}}$

فصل در یک نگاه

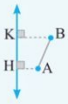
حجم‌ها

- **استوانه:**  حجم $V = \pi r^2 h$
- **مخروط:**  حجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ← مخروط ناقص  حجم $V = \frac{\pi c}{3}(a^2+b^2+ab)$
- **کره:**  حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مساحت‌ها

- **مستطیل:**  مساحت $S = ab$
- **مربع:**  مساحت
  - بر اساسِ ضلع: $S = a^2$
  - بر اساسِ قطر: $S = \frac{d^2}{2}$
- **دایره:**  مساحت $S = \pi r^2$
- **لوزی:** 
  - بر اساس قطر: $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$
  - بر اساس ضلع: $S = a^2 \sin \hat{A}$

ایده‌های دوران

- **شکل فاصله‌دار تا محور:** از رأس‌ها عمود بکش بر محور دوران: 
- **شکل‌های متقارن نسبت به محور:** نصفِ شکل را دوران بده...
- **افراز:** با کشیدن خط‌های عمودبر محورِ دوران، شکل را به بخش‌هایی تقسیم کن که دوران آن‌ها را بلدی...

دوران شکل‌های متقارن

دوران پاره‌خط و نیم‌خط

- **دوران پاره‌خط**
  - شکل حاصل ← دایره با شعاع AB ← مساحت ← $S=\pi a^{2}$
  - شکل حاصل ← مخروط توخالی با مولدِ AB ← حجم ← $V=\frac{1}{3}\pi b^{2}(\sqrt{a^{2}-b^{2}})$
  - شکل حاصل ← مخروط توخالیِ سر بریده با مولدِ AB ← ارتفاع ← $h=\sqrt{a^{2}-(b-c)^{2}}$
  - شکل حاصل ← واشری به پهنایِ AB ← مساحت ← $S=\pi(a^{2}-b^{2})$
  - شکل حاصل ← استوانه‌ی توخالی به ارتفاعِ AB ← حجم ← $V=\pi b^{2}a$
- **دوران نیم‌خط**
  - شکل حاصل ← مخروط توخالیِ تهباز
  - شکل حاصل ← مخروط ناقص و تهباز
  - مولد = نیم‌خط
  - حجم ← هر دو شکل نامحدودند و حجم ندارند...!

دایره

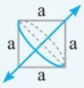
- نیم‌دایره حول قطرش: شکل حاصل ← کُره
- دایره حول قطرش: شکل حاصل ← کُره
  - حجم ← $V=\frac{4}{3}\pi a^{3}$
- ربعِ دایره حول محور گذرنده از قطرش: شکل حاصل ← نیم‌کُره ← حجم ← $V=\frac{2}{3}\pi a^{3}$

مستطیل

- حول طولش:
- حول عرضش:
  - شکل حاصل ← استوانه
    - ارتفاع a ← حجم ← $V=\pi b^{2}a$
    - ارتفاع b ← حجم ← $V=\pi a^{2}b$

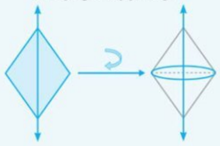
مربع

- **حول ضلعش:** شکل حاصل استوانه، حجم $V=\pi a^{3}$
- **حول قطرش:** شکل حاصل دو مخروط هم قاعده‌ی متقارن، حجم $V=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^{3}$
  - شکل فضایی



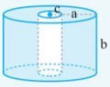
- **حول خطی موازی ضلعش:** شکل حاصل تیوب، حجم $V=\pi a^{2}(a+2b)$
  - استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $a+b$ که استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی b درست از وسط آن درآمده...

لوزی حول هر قطرش: شکل حاصل دو مخروط هم‌قاعده‌ی متقارن:

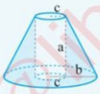


شکل‌های تیوب‌طور

- شکل حاصل تیوب مستطیلی: استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $a+c$ و ارتفاع b که درست از وسط آن استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی c و ارتفاع b درآمده است...

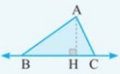


- شکل حاصل مخروط ناقصی به شعاع قاعده‌ی $b+c$ و ارتفاع a که درست از وسط آن استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی c و همان ارتفاع درآمده است...

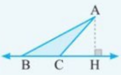


دوران مثلث حول ضلعش

ایده: از رأس مقابل محور دوران به محور عمود بکش



- $\hat{B},\hat{C}<90^\circ$ شکل حاصل دو مخروط هم‌قاعده با ارتفاع‌های BH و CH



- $\hat{C}>90^\circ$ شکل حاصل مخروطی با ارتفاع BH که یک مخروط هم‌قاعده و با ارتفاع CH از پایین آن درآمده است...
- حجم شکل حاصل $V=\frac{1}{3}\pi(AH)^{2}(BC)$

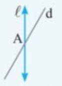
مفاهیم اولیه‌ی برش

- **برش‌دهنده:** یک صفحه است.
- **سطح مقطع:** شکلی است که پس از برخوردِ صفحه‌ی برش با جسم هندسی، روی شکل باقی می‌ماند.

بُرش اشکال معروف

- **استوانه**
  - صفحه‌ی برش موازی محور $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ مستطیل
  - صفحه‌ی برش عمود بر محور $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ دایره
  - صفحه‌ی برش، نه عمود است بر محور و نه موازیِ آن $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ بیضی
- **مکعب‌مستطیل**
  - صفحه‌ی برش موازی یکی از وجه‌هاست $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ مستطیل
  - صفحه‌ی برش از چهار رأس غیر هم‌صفحه می‌گذرد. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ مستطیل
  - صفحه‌ی برش، هر سه ضلع هم‌رأس مکعب‌مستطیل را قطع می‌کند. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ مثلث
- **مخروط**
  - مخروط
    - صفحه‌ی برش بر محور عمود است. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ دایره
    - صفحه‌ی برش، شامل محور است. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ مثلث
    - $\xrightarrow{\text{غیر این دو حالت}}$ بیضی می‌شود:
  - مخروط ناقص
    - صفحه‌ی برش بر محور عمود است. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ دایره
    - صفحه‌ی برش شامل محور است. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ ذوزنقه
    - $\xrightarrow{\text{غیر این دو حالت}}$ بیضی می‌شود:
  - حالت خاص
    - صفحه فقط از رأس بگذرد. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ نقطه
    - صفحه فقط از مولد بگذرد. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ خط
- **کُره**
  - صفحه‌ی برش بر کره مماس باشد. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ نقطه
  - صفحه‌ی برش بر کره مماس نباشد. $\xrightarrow{\text{سطح مقطع}}$ دایره $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ صفحه از مرکز بگذرد ← دایره بزرگه: $\boxed{S=\pi R^2}$
  - رابطه‌ی طولی: صفحه‌ی برش با فاصله‌ی h از مرکز کره به شعاع R بگذرد، مساحتِ دایره‌ی حاصل می‌شود: $\boxed{\pi(R^2-h^2)}$

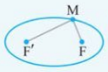
مقاطع مخروطی



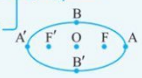
- **سطح مخروطی:** خط d، حول خطِ ثابت ℓ دوران می‌کند:
  - شکل ← دوتا مخروط تو خالیِ بی‌انتها که از رأس، روی هم قرار دارند...
- **مقطع مخروطی:** اثرِ برش صفحه با سطح مخروطی است.
- **برش سطح مقطع**
  - **حالت خاص:** صفحه از رأس بگذرد
    - نقطه: صفحه فقط از رأس می‌گذشته...
    - خط: صفحه شامل مولد است...
    - دو خط متقاطع: صفحه شامل محور است...
  - **شکل مقاطع مخروطی** (صفحه از رأس نگذرد)
    - دایره: صفحه بر محور عمود است.
    - بیضی: صفحه بر محور عمود نیست ولی موازی مولد هم نیست.
    - سهمی: صفحه موازی مولد است.
    - هذلولی: صفحه موازی محور است.

شناخت بیضی

- **تعریف بیضی:** مجموعه‌ی نقاطی است مانند M، به‌طوری که $MF+MF'=2a$ ، $a\in\mathbb{R}^+$



- **کشیدن بیضی با نخ**
  - طول نخ $=2a$
  - فاصله‌ی دو میخ $=2c$
- **پارامترها**
  - فاصله‌ی دو رأس کانونی $= AA'=2a$
  - فاصله‌ی دو رأس ناکانونی $= BB'=2b$
  - فاصله‌ی دو کانون $= FF'=2c$
  - محورهای تقارن: $x=\alpha$ ، $y=\beta$ ← $O(\alpha,\beta)$
  - رابطه‌ی پارامترها: $a^2=b^2+c^2$
  - بزرگ‌ترین پارامتر: a
  - مرکز بیضی: $O=\frac{A+A'}{2}=\frac{F+F'}{2}=\frac{B+B'}{2}$



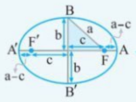
خروج از مرکز

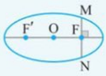
- **فرمول اصلی:** $e=\frac{c}{a}$
- **محدوده:** $0<e_{\text{بیضی}}<1$
- **مفهوم:** هرچه e به ۱ نزدیک‌تر شود بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه به صفر نزدیک‌تر شود، تُپل‌تر!
- **فرمول دوم:** $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ ← کاربرد ← $e=\sqrt{1-\left(\frac{\text{قطر کوچک}}{\text{قطر بزرگ}}\right)^2}$

روابط طولی در بیضی

فاصله‌ی
- هر کانون تا رأس ناکانونی $= \boxed{a}$ مثل BF.
- هر کانون تا رأس کانونی مجاور (نزدیک‌تر) $= \boxed{a-c}$ مثل AF.
- هر کانون تا رأس کانونی غیرمجاور (دورتر) $= \boxed{a+c}$ مثل AF'.

دریک نگاه





وتر کانونی $MN = \dfrac{2b^2}{a}$

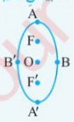
مختصات نقاط مهم بیضی

نوشتن مختصات

بیضیِ افقی

- $F,F'(\alpha \pm c, \beta)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی c به چپ و راست حرکت کن.
- $A,A'(\alpha \pm a, \beta)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی a به چپ و راست حرکت کن.
- $B,B'(\alpha, \beta \pm b)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی b به بالا و پایین حرکت کن.

بیضیِ قائم



- $F,F'(\alpha, \beta \pm c)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی c به بالا و پایین حرکت کن.
- $A,A'(\alpha, \beta \pm a)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی a به بالا و پایین حرکت کن.
- $B,B'(\alpha \pm b, \beta)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی b به چپ و راست حرکت کن.

دریافت اطلاعات از مختصات

- F', F
  - وسطشان می‌شود O
  - فاصله‌شان می‌شود $2c$
- A', A
  - وسطشان می‌شود O
  - فاصله‌شان می‌شود $2a$
- B', B
  - وسطشان می‌شود O
  - فاصله‌شان می‌شود $2b$

درون و بیرون بیضی

اگر نقطه‌ی M
- **روی بیضی باشد:** $\boxed{MF+MF' = 2a}$
- **درون بیضی باشد:** $\boxed{MF+MF' < 2a}$
- **بیرون بیضی باشد:** $\boxed{MF+MF' > 2a}$

روش: فاصله‌ی M را تا دو کانون حساب کرده و جمع کن و بعد حاصل را با $2a$ مقایسه کن...!

شناخت دایره

تعریف: مجموعه‌ی نقاطی است مانند M، به‌طوری که فاصله‌شان تا نقطه‌ی ثابتِ $\underbrace{\boxed{O}}_{\text{مرکز}}$ برابرِ $\underbrace{\boxed{r}}_{\text{شعاع}}$ باشد. $(r>0)$

معادله‌ی استاندارد

نوشتن معادله: اگر $O(\alpha, \beta)$، مرکز و r شعاع باشد، آن‌وقت: $\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$

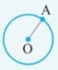
دریافت اطلاعات از معادله: اگر ضریب پرانتزها و متغیرها یک بود $\boxed{(\quad)^2 + (\quad)^2 = k}$
- پرانتزها را صفر کن و ریشه‌ها را پیدا کن ← مرکز
- از عددِ سمتِ راست، جذر بگیر ← شعاع

معادله‌ی گسترده

- **دریافت اطلاعات:** ضریبِ $x^۲$ و $y^۲$ را با تقسیمِ طرفین تساوی، ۱ کن و همه‌ی جمله‌ها رو بیار سمت چپ.
  - فرم آماده: $\boxed{x^۲+y^۲+ax+by+c=۰}$
- **فرم آماده**
  - مرکز: $\boxed{O(\frac{a}{-۲},\frac{b}{-۲})}$
  - شعاع: $\boxed{r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}}$
- **شرط دایره بودن**
  - شرط لازم: $\boxed{\text{ضریبِ } x^۲ = \text{ضریبِ } y^۲}$
  - شرط مکمل: معادله را آماده کن و شعاع را پیدا کن $\xrightarrow{\text{حتماً}}$ عدد زیر رادیکال مثبت باشد.
    - فرم ریاضی: $\boxed{a^۲+b^۲-۴c>۰}$

نوشتن معادله‌ی دایره با اطلاعات معلوم

- **مرکز و نقطه:** فاصله‌ی مرکز را تا نقطه پیدا کن، می‌شود شعاع:



- **دو سر قطر** $\boxed{A,B}$
  - $\boxed{O=\frac{A+B}{۲}}$
  - $\boxed{r=\frac{AB}{۲}}$

- **مرکز و مماس:** فاصله‌ی مرکز تا خط مماس را پیدا کن، این می‌شود شعاع:

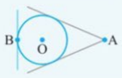
- **مرکز و طول وتر:** از رابطه‌ی $\boxed{\ell=۲\sqrt{r^۲-OH^۲}}$ شعاع را پیدا کن: $\boxed{AB=\ell}$

- **مرکز روی خطِ ... است:** مختصات مرکز را در خط صدق بده؛ شرطی برحسب α و β پیدا کن...
- **مماس بر دو خط موازی:**
  - شعاع: فاصله‌ی دو خط موازی را پیدا کن و بعد هم نصف کن...
  - مرکز: روی خطِ موازیِ این دو و وسطِ آن‌ها قرار دارد...

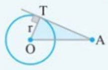
- **گذرنده از سه نقطه:** معادله‌ی دایره را $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ بگیر و سه نقطه را در این معادله قرار بده، آخرش حلِ دستگاه

درباره‌ی مماس

- **فاصله‌ی مرکز تا خط مماس می‌شود شعاع:** $\boxed{\underbrace{ax+by+c=۰}_{\text{مماس}}\xrightarrow{O(\alpha,\beta)}\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=r}$
- **تعداد مماس‌های موجود از یک نقطه**
  - روی دایره: یکی
  - بیرون دایره: دو تا
  - درون دایره: هیچی



- **طول قطعه مماس رسم شده از نقطه‌ی A** $\boxed{A(x_۰,y_۰)}$
  - مفهومی: $\boxed{AT=\sqrt{OA^۲-r^۲}}$
  - تستی: مختصات نقطه را در معادله‌ی گسترده‌ی آماده بذار و جذر بگیر... $\boxed{AT=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+ax_۰+by_۰+c}}$



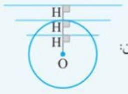
- **معادله‌ی مماس از $A(x_۰,y_۰)$ روی دایره: معادله‌ی استاندارد دایره را بنویس، بعدش:** $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \Rightarrow \boxed{(x_۰-\alpha)(x-\alpha)+(y_۰-\beta)(y-\beta)=r^۲}$

وضعیت دایره با...

یک خط

- خط و دایره مماس‌اند: $OH = r$
- خط و دایره متقاطع‌اند: $OH < r$
- خط و دایره نقطه‌ی مشترک ندارند: $OH > r$

$\xrightarrow{\text{فارسی}}$ فاصله‌ی مرکز تا خط را پیدا کرده با شعاع مقایسه کن:



پیدا کردن نقاط تلاقی

: x را از معادله‌ی خط برحسب y پیدا کن و در معادله‌ی دایره بذار و معادله‌ی حاصل را حل کن...

محورهای مختصات

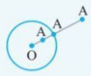
- مماس بر محور x هاست: $|\beta| = r$
- مماس بر محور y هاست: $|\alpha| = r$
- مماس بر هر دو محور است: $|\alpha| = |\beta| = r$ $\xrightarrow[\text{(a , b) می‌گذرد}]{\text{دایره از نقطه‌ی}}$ $\underbrace{\alpha \text{، هم‌علامتِ } a \text{ و } \beta \text{، هم‌علامتِ } b \text{ است}}_{\text{قدر مطلق‌ها را مناسب بردار}}$

درون و بیرون دایره

$A(x_0 , y_0)$

مفهومی (هندسی)

- نقطه روی دایره است: $OA = r$
- نقطه بیرون دایره است: $OA > r$
- نقطه درون دایره است: $OA < r$



با داشتن معادله‌ی استاندارد: مختصات نقطه را به جای x و y معادله بذار

- نقطه روی دایره است: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = r^2$
- نقطه بیرون دایره است: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 > r^2$
- نقطه درون دایره است: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 < r^2$

با داشتن معادله‌ی گسترده: مختصات نقطه را به جای x و y معادله بذار

- نقطه روی دایره است: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$
- نقطه بیرون دایره است: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$
- نقطه درون دایره است: $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$

دو دایره

ابزارهای لازم

- فاصله‌ی دو مرکز: $OO' = d$
- اندازه‌ی دو شعاع r و r' $\xrightarrow{\text{+ و − کن}}$ $r + r'$ و $|r - r'|$

وضعیت دو دایره

- مماسِ بیرون: $d = r + r'$
- مماسِ درون: $d = |r - r'|$

یک نقطه‌ی مشترک دارند

- متقاطع: $|r - r'| < d < r + r'$ $\xrightarrow{\text{دو نقطه‌ی برخورد}}$

- بدون نقطه‌ی برخورد
  - یکی خارج دیگری:  : $d > r + r'$

    متخارج
  - یکی داخل دیگری:  : $d < |r - r'|$

    متداخل
  - هم‌مرکز:  : $d = 0$

فصل در یک نگـاه

اصل ضرب

مفهوم: وقتی عملی در چند مرحله‌ی پشت سر هم قابل انجام است، تعداد راه‌های هر کدام را در هم ضرب کن.

کاربردها

- تستِ شمارشی که بین چند اتفاق، **«و»** گذاشته باشد، با اصل ضرب حل می‌شود...
- با چند رقم داده‌شده، بخواهید عددی چند رقمی بسازید $\xrightarrow{}$ آیا تست حرفی از تکرار زده است؟
  - خیر ← تکرار مجاز است.
  - بله ← وقتی گفته، تکرار مجاز نیست.
- با چند حرفِ داده‌شده، بخواهید کلمه‌ای بسازید.
- همیشه موقع پرکردن خانه‌ها، اول خانه‌های شرط‌دار را پر کنید و بعد بقیه را...
- **برای احتمال بلد باش:** تعداد حالت‌ها برایِ:
  - n تا سکه: $\boxed{2^n}$
  - m تا تاس: $\boxed{6^m}$
  - n تا سکه و m تا تاس با هم: $\boxed{2^n \times 6^m}$

اصل جمع

مفهوم: وقتی مجبوری برای شمارش، حالت‌بندی ارائه کنی و اتفاقِ مورد نظرِ تست را در چند حالتِ مجزا، دسته‌بندی کنی، تعداد راه‌های هرکدام را جداگانه حساب کن و در آخر با هم جمع کن.

کاربردها

- تستِ شمارشی که بین چند اتفاق، **«یا»** گذاشته باشد، با اصل جمع حل می‌شود...
- **alarm حداقل و حداکثر:** تستی که کلمات «حداقل» و «حداکثر» داشته باشد؛ معمولاً نیاز به حالت‌بندی دارد
  - حداقل k تا: حالت‌های خودِ k تا و بیشترهاش رو حساب کن و جمع کن.
  - حداکثر t تا: حالت‌های خودِ t تا و کمترهاش رو حساب کن و جمع کن.
- **حالت‌بندی نهفته:** اگر شیء خاصی نتواند در یک خانه قرار بگیرد و همچنین در خانه‌ی دیگری حتماً باشد، اونو حالت‌بندی کن یا این‌که عددی بتواند در دو خانه‌ی مختلف قرار بگیرد.

جایگشت (چیدن)

- **فاکتوریل:** حالت‌های چیدنِ n شیء متمایز در یک ردیف (یا در n تا جا)، بدون تکرار می‌شود: $\boxed{n!}$
- **تبدیل:** وقتی می‌خواهی از میان n تا شیء، k تا را برداری و بعد هم آن‌ها را در یک ردیف، به‌ترتیب، بچینی: $\xrightarrow{\text{فرمول}}$ $\boxed{P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}}$
- **کنار هم بودن اشیای خاص:** وقتی قراره چند تا شیء خاص کنار هم باشند، آن‌ها را به هم طناب‌پیچ کن و یک شیء به‌حساب بیار، حالا از نو بشمر و جایگشت بده:
  - جایگشت خودِ اشیای داخل بسته مهم است ← جایگشت اونا رو در جوابِ آخر ضرب کن.
  - جایگشت خودِ اشیای طناب‌پیچ شده مهم نیست ← کار خاصی نباید بکنی...
- **یک در میان چیدن**
  - n تا از نوع اول و n تا از نوع دوم $\xrightarrow{\text{یک در میان}}$ $\boxed{2(n!)^2}$
  - n تا از نوع اول و $n+1$ تا از نوع دوم $\xrightarrow{\text{یک در میان}}$ $\boxed{n!(n+1)!}$
- **یکی قبلِ دیگری:** اگر بخواهی از بین n شیء، A قبل از B باشد، تعداد جایگشت‌ها می‌شود $\boxed{\frac{n!}{2}}$.
- **اشیای تکراری دارد:** همه رو بشمر و جایگشت بده، آخر سر هم جایگشتِ هر کدام از اشیای تکراری را در مخرج قرار بده...

ترکیب (انتخاب)

- **مفهوم:** وقتی قرار است از میان n تا شیء، k تا شیء را فقط انتخاب کنی؛ بدون این‌که ترتیب چیدن آن‌ها مهم باشد... $\binom{n}{k}$.
- **شناسایی تستی که با ترکیب حل می‌شود**
  - وجود کلمه‌ی **انتخاب** چند شیء...
  - ساختن **گروه** یا **تیم**...
  - شمارش تعداد مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها و...
    (به طور کلی شمارش n ضلعی‌ها با داشتن تعدادی نقطه)
- **فرمول:** $C(n,k)=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
- **فرمول‌های ترکیب**
  - $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
  - $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$
  - $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}\Rightarrow a+b=n$
  - $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-۱}=\binom{n+۱}{r}$
  - $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$
- وقتی بخواهی از میان n شیء، k تا را انتخاب کنی که شاملِ t عضو به‌خصوص بوده و فاقدِ r عضو مشخص باشند، حالت‌ها می‌شود: $\binom{n-t-r}{k-t}$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضویِ A

- **تعداد اعضای زیرمجموعه، گفته شده** $\xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } k \text{ عضوی}}$
  - $\binom{n}{k}$
  - شامل t عضو به‌خصوص $\binom{n-t}{k-t}$
  - فاقد r عضو مشخص‌شده $\binom{n-r}{k}$
- **تعداد اعضای زیرمجموعه، گفته نشده** $\xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } A}$
  - ۲^n
  - شامل t عضو به‌خصوص ۲^{n-t}
  - فاقد r عضو مشخص‌شده ۲^{n-r}

فصل در یک نگاه

مفاهیم اولیه

فضای نمونه: مجموعه‌ی تمامِ حالت‌های ممکن است ← فضاهای معروف

پدیده	n سکه	m تاس	n سکه و m تاس	n فرزند
$n(S)$	2^n	6^m	$2^n \times 6^m$	2^n

نماد ← S

پیشامد: زیرمجموعه‌ی فضای نمونه است.

تعداد پیشامدهای قابل تعریف: $2^{n(S)}$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعدادحالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

فرمول احتمال: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

حل تست احتمال مقدماتی

ترکیبیات

- یک گروه انتخاب می‌کنیم ← به $\binom{n}{k}$ فکر کن.
- تعدادی شیء را می‌چینیم یا یکی یکی انتخاب می‌کنیم ← به $n!$ فکر کن.
- حالت‌ها را جداگانه مجبوریم بشماریم ← به اصل جمع فکر کن.
- تعداد حالت‌های ممکن برای تعدادی شیء یا مکان را باید بررسی کنیم ← به اصل ضرب فکر کن.

کلمات کلیدی ← **حداقل و حداکثر:** این‌ها معمولاً نیاز به حالت‌بندی دارند و شاید حالتِ نامطلوبشان از خودشان بهتر باشد!

شمارش دستی: وقتی حالت‌های مطلوب کم باشد، حالت‌ها را می‌نویسیم و بعد هم می‌شماریم.

دختر و پسری

- در بین n فرزند: $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ = احتمالِ k دختر = احتمالِ k پسر
- در بین n بار پرتاب یک سکه: $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ = احتمالِ k بار پشت = احتمالِ k بار رو
- در بین n بار پرتاب یک تاس: $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ = احتمالِ k بار عدد اول = احتمالِ k بار فرد = احتمالِ k بار زوج

فرمول‌های احتمال

متمم: $P(A')=1-P(A)$ ← مفهوم A' یعنی A اتفاق نیفتد.

اجتماع: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ← مفهوم حداقل یکی از پیشامدهای A یا B اتفاق بیفتند.

حالت خاص ← A و B ناسازگار باشند: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$A\cap B=\varnothing$

منها: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ ← مفهوم A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

حالت‌های دیگر ← $P(B\cap A')=P(B-A)$ و $P(A\cap B')=P(A-B)$

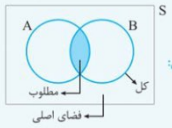
نه A و نه B: $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)$ ← مفهوم هیچ‌کدام اتفاق نیفتد.

از سه تا فقط یکی: $P(\underbrace{A\cap B\cap C'}_{(A\cap B)-C})=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)$ ← مفهوم A و B اتفاق بیفتند ولی C اتفاق نیفتد.

احتمال پیشرفته

احتمال شرطی

- **فرمول**
  - با داشتن احتمال: $\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$
  - با داشتن حالت‌ها: $\boxed{P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}}$
- **طرز خواندن:** $P(A|B)$، یعنی احتمالِ A، مشروط به اتفاق افتادنِ B.
- **شکل:**



- **فرمِ تست:** یک پیشامد می‌دهد و احتمال یک پیشامدِ دیگر را می‌خواهد: اگر شود، احتمالِ چقدر است؟

پیشامدهای مستقل

- **مفهوم:** اتفاق افتادن یا نیفتادنِ A، احتمالِ B را کم یا زیاد نمی‌کند $\xrightarrow{\text{شکل دیگر}}$ تأثیری بر هم ندارند.
- **فرمول:** $\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$
- **تشخیص مستقل بودنِ A و B:** سه احتمال $P(A\cap B)$، $P(A)$ و $P(B)$ را حساب کن و درستیِ فرمولِ مستقل را بررسی کن...
- **فرمول‌های احتمال در حالت مستقل**
  - $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)}$
  - $\boxed{P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)}$
  - $\boxed{P(A'\cap B')=(1-P(A))(1-P(B))}$
- **فرمِ تست:** در بین چند پیشامدِ بی‌ربط به هم، قرار است بعضی اتفاق بیفتد و بعضی هم نه! $\xrightarrow{\text{یه‌جوردیگه}}$ و بشود و و نشود و...
- **ایده‌ی شیک:** اجتماع را با دمورگان، اشتراک کن و اشتراک هم یعنی ضرب...

$$\boxed{P(A\cup B)=1-P(A'\cap B')=1-P(A')P(B')}$$

محاسبه‌ی $P(A\cap B)$ در تست

- **A و B مستقل‌اند** $\xrightarrow{\text{فرمول مستقل}}$ $\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$ جداجدا احتمال‌ها را حساب کن و در هم ضرب کن.
- **حالت کلی: A و B مستقل نیستند** $\xrightarrow{\text{فرمول ضرب احتمال}}$ $\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B|A)}$ ← احتمالِ اولی را حساب کن و نوبتِ دومی که شد احتمال آن را با شرطِ اتفاق افتادنِ اولی حساب کن بعد هم این دو احتمال را در هم ضرب کن...

احتمال کل

- **انتخاب یک شیء**
  - از میان n کیسه، یکی را انتخاب کنیم $\xrightarrow{\text{احتمال انتخاب هر کیسه}} \boxed{\frac{1}{n}}$
  - از میان a مهره سفید و b سیاه، یکی را انتخاب کنیم
    - احتمال انتخاب سفید: $\boxed{\frac{a}{a+b}}$
    - احتمال انتخاب سیاه: $\boxed{\frac{b}{a+b}}$
- **تشخیص تست در لابه‌لای تست‌های احتمال**
  - **داده‌های سؤال**
    - فضای نمونه به چند پیشامد افراز شده
    - نتیجه‌ی اتفاقاتی که در تست توضیح داده شده، نامشخص و مبهم است...
    - در توضیحِ سؤال با چند اتفاقِ پشت سر هم مواجهیم!
  - **خواسته‌ی تست:** یک پیشامد ساده روی آخرین اتفاق
- **روش حل:** نمودار درختی بکش به‌ترتیبِ اتفاق‌ها و حالت‌بندی کن، روی هر فلش حالتِ آن را بنویس و مقابلش احتمالِ آن را...
- **محاسبه‌ی عددِ احتمال:** حالت‌های نامطلوب را در شاخه‌های آخر بگذار کنار و عددهای در یک سطر و کنار هم را در هم ضرب کن. در نهایت عددهای شاخه‌های مجزا را با هم جمع بزن ...!

$$\begin{cases} \xrightarrow{A_1} a \xrightarrow{\text{مطلوب}} c \\ \xrightarrow{A_2} b \xrightarrow{\text{مطلوب}} d \end{cases} \xrightarrow{\text{احتمال کل}} ac+bd$$

- **مفهومِ فلش‌ها:** هر پیشامدی روی فلش‌ها برای جلوییِ خودش، فرض محسوب می‌شود:

$$\begin{cases} \xrightarrow{A_1} P_1 \xrightarrow{B} P_2 \\ \xrightarrow{A_2} P_3 \xrightarrow{B} P_4 \end{cases}$$

A_1 فرض (یاشرط) است برای B ...

- **ساختن ظرف جدید:**

- **حضور همزمانِ** $P(A|B)$ و $P(B|A)$ **در تست** $\xrightarrow{\text{فرمول}} \boxed{P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)}$

فصل در یک نگاه

مفاهیم اولیه

- **علم آمار:** مجموعه روش‌هایی است شامل جمع‌آوری اعداد و اطلاعات، مرتب کردن، خلاصه‌سازی و تحلیلِ آن‌ها
- **جامعه:** تمامِ افرادی که در مورد یک ویژگیِ آن‌ها تحقیق می‌کنیم. $\xrightarrow{\text{حجم جامعه}}$ تعداد اعضای جامعه
- **نمونه:** زیرمجموعه‌ی انتخابی از جامعه.
- **متغیر:** یک ویژگی که قرار است در مورد آن تحقیق کنیم.

دسته‌بندی متغیرها

- **کمی:** این‌ها را می‌توان شمرد یا اندازه‌گیری کرد. (قابل بیان با عدد)
  - **گسسته:** قابل شمارش‌اند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ تعداد روزهای بارانی
  - **پیوسته:** قابل اندازه‌گیری‌اند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ بین هر دو مقدارشان مقدار دیگری می‌توان در نظر گرفت؛ دما
- **کیفی:** قابل شمردن و اندازه‌گیری نیستند. درباره‌ی نوعِ آن‌ها می‌توان توضیح داد... (غیرقابل بیان با عدد)
  - **اسمی:** فقط وضعیت و نوع دارند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ گروه خونی
  - **ترتیبی:** نوعی ترتیبِ طبیعی در خود دارند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ مراحل تحصیلی

فراوانی

- **مطلق:** مفهوم: به تعداد اشیایی که از یک داده داریم، می‌گوییم $\xrightarrow{\text{به جور دیگه}}$ یک داده چند بار تکرار می‌شود؟
  - $n =$ تعداد کل داده‌ها = جمع تمام فراوانی‌ها
- **نسبی:** $\dfrac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}$ $\xrightarrow{\text{به جور دیگه}}$ $\dfrac{f}{n} =$ فراوانی نسبی $\xrightarrow{\text{نکته}}$ مقدارش بین صفر و یک است.

شاخص‌های آماری

- **مرکزی**
  - **میانگین**
    - **نماد:** $\bar{x}$
    - **روش پیدا کردن:** تمامی داده‌ها را جمع کن و بعد بر تعدادشان تقسیم کن.
    - **به زبان ریاضی:** $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$
    - **اگر میانگین را داده بودند** میانگین را در تعدادِ کل داده‌ها ضرب کن، این‌جوری جمع داده‌ها درمیاد...
  - **میانه**
    - **نماد:** Q_2
    - **روش پیدا کردن:** داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کن
      - تعداد داده‌ها فرد است ← میانه = داده‌ی وسطی
      - تعداد داده‌ها زوج است ← میانه = میانگین دو تا داده‌ی وسطی
    - پیدا کردن شماره‌ی داده‌ی وسطی
      - تعداد داده‌ها فرد است ← $\dfrac{n+1}{2} =$ شماره‌ی وسطی
      - تعداد داده‌ها زوج است ← $\dfrac{n}{2}$ و بعدی آن، شماره‌های داده‌های وسطی
- **پراکندگی**
  - **دامنه‌تغییرات**
    - **نماد:** R
    - **مفهوم:** کوچک‌ترین داده را از بزرگ‌ترین داده، کم کن: $R = \max - \min$
  - **واریانس**
    - **نماد:** σ^2
    - **روش پیدا کردن در حالت کلی**
      - **ریاضی:** $\sigma^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$
      - **فارسی:** اول میانگین را پیدا کن، بعد هر داده را منهای میانگین کرده و مجذور کن، آخر سر جمعِ همه‌ی این‌ها را به تعداد کل داده‌ها تقسیم کن.
    - **فرمول‌های دیگر**
      - $\sigma^2 = \dfrac{n^2 - 1}{12} \times d^2$: وقتی داده‌ها، دنباله‌ی حسابی با قدرنسبتِ d باشند.
      - $\sigma^2 = \dfrac{M}{n} - \bar{x}^2$: وقتی مجموع مجذورات داده‌ها داده شده، یعنی M.
    - **مفهوم:** هر قدر σ^2 بیشتر باشد، یعنی پراکندگیِ داده‌ها بیشتر است.

انحراف معیار: این، جذر واریانس است: σ، یعنی واریانس حساب کن بعد هم جذرش رو بگو...

ضریب تغییرات: $cv = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ $\xrightarrow{\text{کاربرد}}$ cvِ بیشتر بین دو نفر، یعنی دقت کمتر.

چارک

Q_2 = **چارک دوم:** این همان میانه است.

Q_1 = **چارک اول:** وقتی داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شدند و میانه حساب شد، بعدش از داده‌هایِ کمتر از میانه، دوباره میانه بگیر! این می‌شود Q_1.

Q_3 = **چارک سوم:** وقتی داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شدند و میانه حساب شد، بعدش از داده‌هایِ بیشتر از میانه، دوباره میانه بگیر! این می‌شود Q_3.

دستکاری برایِ داده‌های آماری

اگر داده‌ها را از x تبدیل کنیم به ax+b

میانگین: از $\bar{x}$ می‌شود: $a\bar{x}+b$

میانه: از Q_2 می‌شود: aQ_2+b

واریانس: از σ^2 می‌شود: $a^2\sigma^2$

انحراف معیار: از σ می‌شود: $|a|\sigma$

دامنه تغییرات: از R می‌شود: $|a|R$

$x \to ax+b$

$\bar{x} \to a\bar{x}+b$

$Q_2 \to aQ_2+b$

$\sigma^2 \to a^2\sigma^2$

$\sigma \to |a|\sigma$

$R \to |a|R$

دستکاری در ضریب تغییرات

ضرب عددِ
- **مثبت:** cv را تغییر نمی‌دهد.
- **منفی:** cv را قرینه می‌کند.

جمع کردن تمامی داده‌ها با
- **عددِ مثبت** ← cv را کم می‌کند.
- **عددِ منفی** ← cv را زیاد می‌کند.

اگر تمام داده‌ها، مساوی باشند

همگی k باشند.

k = چارک سوم = چارک اول = میانه = میانگین

$\sigma^2 = \sigma = cv = R = 0$، عکس این جمله خیلی مهمه: **صفر شدنِ واریانس، انحراف معیار یا ضریب تغییرات، یعنی همه‌ی داده‌ها مساوی‌اند.**