قواعدمشتق‌گیری

برای محاسبه مشتق یک تابع در نقطه $x=a$، می‌توانیم از تعریف مشتق که در درسنامه‌های گذشته به طور مفصل درباره آن صحبت کردیم، استفاده کنیم. اما محاسبه مشتق برخی از توابع با استفاده از تعریف مشتق کمی دشوار است. بنابراین در ادامه قواعدی را به شما معرفی می‌کنیم که با استفاده از آن‌ها می‌توانید مشتق توابع را بدون استفاده از تعریف مشتق و در کمترین زمان ممکن به دست آورید.

فقط یادتون باشه که حفظ کردن این فرمول‌ها از نون شب هم واجب‌تره ...)

قواعد مشتق (بخش اول)

۱ مشتق تابع ثابت: اگر $f(x)=c$ باشد، آنگاه $f'(x)=0$ است. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه‌ای برابر صفر است.

مثال: $f(x)=7 \Rightarrow f'(x)=0$

مثال: $g(x)=3\pi^2 \Rightarrow g'(x)=0$

۲ مشتق تابع خطی: اگر $f(x)=ax+b$ یک تابع خطی باشد، آنگاه مشتق این تابع در هر نقطه با شیب خط برابر است. یعنی:

$$\boxed{f(x)=ax+b \Rightarrow f'(x)=a}$$

مثال: $f(x)=2x-1 \Rightarrow f'(x)=2$

مثال: $g(x)=-\frac{1}{2}x+3 \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}$

۳ مشتق تابع چندجمله‌ای: اگر $n\in Q$ و $f(x)=x^n$ باشد، آنگاه $f'(x)=nx^{n-1}$ است.

توجه اگر عددی در یک تابع ضرب شود، برای مشتق‌گیری، ابتدا ضریب عددی را کنار گذاشته و عمل مشتق را انجام می‌دهیم. سپس آن ضریب را در تابع مشتق ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $k\in\mathbb{R}$ باشد، داریم:

$$\boxed{y=kf(x) \to y'=kf'(x)}$$

مثال: $f(x)=3x^4 \to f'(x)=3(4x^3)=12x^3$

مثال: $g(x)=2x^{-3} \to g'(x)=2(-3x^{-4})=-6x^{-4}$

مثال: $h(x)=x^{\frac{2}{3}} \to h'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

مثال: $k(x)=\frac{1}{x^5} \Rightarrow k(x)=x^{-5} \to k'(x)=-5x^{-6}$

۴ مشتق تابع رادیکالی: اگر $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ باشد، آنگاه داریم:

$$(*)\ f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}} \to f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}=\frac{m}{n\times x^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

به عبارت دیگر:

$$\boxed{f(x)=\sqrt[n]{x^m} \to f'(x)=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}}$$

مثال: $f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow[n=2]{m=1} f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال: $g(x)=\sqrt[۵]{x^۳}\xrightarrow[n=۵]{m=۳}g'(x)=\frac{۳}{۵\sqrt[۵]{x^{۵-۳}}}=\frac{۳}{۵\sqrt[۵]{x^۲}}$

توجه همان‌طور که در ابتدای این قسمت (*) نیز اشاره شد، برای مشتق‌گیری از تابع $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ می‌توانیم آن را به صورت $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ نوشته و سپس مانند یک تابع چندجمله‌ای از آن مشتق گرفت، مثال رو ببینید:

مثال: $f(x)=\sqrt[۴]{x^۳}=x^{\frac{۳}{۴}}\to f'(x)=\frac{۳}{۴}x^{\frac{۳}{۴}-۱}=\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۴}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۴}}}=\frac{۳}{۴\sqrt[۴]{x}}$

به نظرت این مدلی کار کنیم بهتر نیست؟؟!

تست تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{۴x+m}{(۱-n)x^۲+۲x+n}$ مفروض است، اگر $f'(x)=۰$ باشد، مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: با توجه به فرض سؤال، $f'(x)=۰$ است و این به این معنی است که مشتق تابع در هر نقطه‌ای برابر صفر است. پس تابع f، تابعی ثابت است.

لذا داریم:

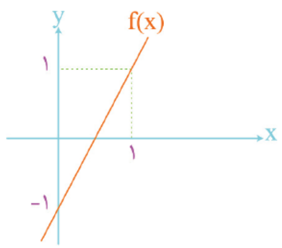
$$f(x)=\frac{۴x+m}{(۱-n)x^۲+۲x+n}=c\Rightarrow ۴x+m=(۱-n)cx^۲+۲cx+nc\Rightarrow\begin{cases}(۱-n)c=۰\Rightarrow n=۱\\ ۲c=۴\Rightarrow c=۲\\ nc=m\xrightarrow[c=۲]{n=۱}m=۲\end{cases}$$

پس حاصل $m-n$ برابر است با:

$$\begin{cases}m=۲\\ n=۱\end{cases}\longrightarrow m-n=۲-۱=۱$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تست تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $g(x)$ یک تابع خطی و $g(g'(x)-x)=f(x)$ باشد، آنگاه عرض از مبدأ تابع g کدام است؟



۱) ۲

۲) ۵

۳) ۵-

۴) ۲-

حل: تابع f از دو نقطه با مختصات $(۰,-۱)$ و $(۱,۱)$ عبور کرده است. بنابراین ابتدا ضابطه تابع f را تشکیل می‌دهیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow[(۱,۱)]{m=۲}y-۱=۲(x-۱)\Rightarrow f(x)=۲x-۱$$

از طرفی می‌دانیم که $g(x)$ یک تابع خطی است. بنابراین داریم:

$$g(x)=ax+b\Rightarrow g'(x)=a$$

حال با توجه به ضابطه توابع g, f، معادله داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(g'(x)-x)=f(x)\xrightarrow{g'(x)=a}g(a-x)=۲x-۱\xrightarrow{g(x)=ax+b}a(a-x)+b=۲x-۱$$

$$\Rightarrow a^۲-ax+b=۲x-۱\Rightarrow -ax+a^۲+b=۲x-۱\Rightarrow\begin{cases}-a=۲\Rightarrow a=-۲\\ a^۲+b=-۱\xrightarrow{a=-۲}۴+b=-۱\Rightarrow b=-۵\end{cases}$$

بنابراین تابع g به صورت $g(x)=-۲x-۵$ می‌باشد که عرض از مبدأ این خط برابر ۵- است. لذا گزینه ۳ صحیح است.

تست اگر $f(x)=۲\sqrt[۳]{x}$ باشد، آنگاه به ازای کدام مقدار x، معادله $f'(x)=\frac{-۸}{۳f(x)}$ برقرار است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) ۸ ۴) ۸-

حل: ابتدا مشتق f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=2\sqrt[3]{x}=2x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

حال معادله داده شده را تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=-\frac{8}{3f(x)}\Rightarrow 3f(x)f'(x)=-8$$

$$\Rightarrow 3\times 2\sqrt[3]{x}\times\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}=-8\Rightarrow 4x^{\frac{1}{3}}\times x^{-\frac{2}{3}}=-8\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}}=-2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=-2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-2\Rightarrow\sqrt[3]{x}=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}}x=-\frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

قواعد مشتق (بخش دوم)

اگر توابع f، g و h در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه داریم:

۱ مشتق مجموع و تفاضل دو تابع:

$$\boxed{\begin{array}{l} y=(f+g)(x)\to y'=f'(x)+g'(x)\\ y=(f-g)(x)\to y'=f'(x)-g'(x)\end{array}}$$

و در حالت کلی‌تر داریم:

$$\boxed{y=f(x)\pm g(x)\pm h(x)\pm\cdots\to y'=f'(x)\pm g'(x)\pm h'(x)\pm\cdots}$$

مثال: $y=2x^3-x^2+3x+1\Rightarrow y'=6x^2-2x+3$

مثال: $y=2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\Rightarrow y'=2\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۲ مشتق حاصل‌ضرب دو تابع:

$$\boxed{y=(\overset{\text{اولی}}{f}.\underset{\text{دومی}}{g})(x)\to y'=\overset{\text{مشتقِ اولی}}{f'(x)}\underset{\text{خودِ دومی}}{g(x)}+\overset{\text{مشتقِ دومی}}{g'(x)}\underset{\text{خودِ اولی}}{f(x)}}$$

مثال: $y=(-x^2+3x-1)(x^4+2x^3)\Rightarrow y'=\underbrace{(-2x+3)}_{\text{مشتق اولی}}\overbrace{(x^4+2x^3)}^{\text{خود دومی}}+\underbrace{(4x^3+6x^2)}_{\text{مشتق دومی}}\overbrace{(-x^2+3x-1)}^{\text{خود اولی}}$

بد نیست مشتق حاصل‌ضرب سه تا تابع رو هم بلد باشیم!

$$\boxed{y=(f.g.h)(x)\to y'=\overset{\text{مشتقِ اولی}}{f'}.\underbrace{g.h}_{\text{بقیه تابع}}+\overset{\text{مشتقِ دومی}}{g'}.\underbrace{f.h}_{\text{بقیه تابع}}+\overset{\text{مشتقِ سومی}}{h'}.\underbrace{f.g}_{\text{بقیه تابع}}}$$

مثال: $y=(x^2-x)(2x-1)(x^3+3x)\Rightarrow y'=\underbrace{(2x-1)}_{\text{مشتق اولی}}\overbrace{(2x-1)(x^3+3x)}^{\text{بقیه‌تابع}}+\underbrace{(2)}_{\text{مشتق دومی}}\overbrace{(x^2-x)(x^3+3x)}^{\text{بقیه‌تابع}}+\underbrace{(3x^2+3)}_{\text{مشتق سومی}}\overbrace{(x^2-x)(2x-1)}^{\text{بقیه‌تابع}}$

۳ مشتق تقسیم دو تابع:

$$y=(\frac{f}{g})(x)\rightarrow y'=\frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{مشتق صورت}}\overbrace{g(x)}^{\text{مخرج}}-\overbrace{g'(x)}^{\text{مشتق مخرج}}\overbrace{f(x)}^{\text{صورت}}}{\underbrace{(g(x))^۲}_{\text{(مخرج)}^۲}}\ ,\ g(x)\neq ۰$$

مثال: $y=\frac{۵-۳x}{x^۳+۱}\Rightarrow y'=\frac{\overbrace{(-۳)}^{\text{مشتق صورت}}\overbrace{(x^۳+۱)}^{\text{مخرج}}-\overbrace{(۳x^۲)}^{\text{مشتق مخرج}}\overbrace{(۵-۳x)}^{\text{صورت}}}{\underbrace{(x^۳+۱)^۲}_{\text{(مخرج)}^۲}}$

توجه به کمک مشتق تقسیم دو تابع (قانون شماره ۳ در بالا)، می‌توان مشتق تابع هموگرافیک را به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$\boxed{y=\frac{ax+b}{cx+d}\rightarrow y'=\frac{(ad-bc)}{(cx+d)^۲}}$$

مثال: $y=\frac{۲x-۱}{۳x+۴}\xrightarrow[c=۳,d=۴]{a=۲,b=-۱}y'=\frac{((۲\times۴)-(-۱\times۳))}{(۳x+۴)^۲}=\frac{۱۱}{(۳x+۴)^۲}$

تست توابع $f(x)=\begin{cases}۳x^۲-۲x & x>۲\\ x^۳+x-۱ & x\leq ۲\end{cases}$ و $g(x)=mx^۲-x$ مفروض‌اند، اگر $(f.g)'(۱)=۱۳$ باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۷ ۴) ۳۳

حل: ابتدا مشتق تابع حاصل‌ضرب را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(f.g)'(۱)=f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)=۱۳\ (*)$$

حال تک‌تک عامل‌های فوق را به دست می‌آوریم. دقت شود که برای محاسبه $f'(۱)$ و $f(۱)$ به سراغ ضابطه پایین می‌رویم:

$$f(x)=x^۳+x-۱\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=۳x^۲+۱\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=۳+۱=۴\\ f(۱)=۱+۱-۱=۱\end{cases}$$

$$g(x)=mx^۲-x\Rightarrow\begin{cases}g'(x)=۲mx-۱\xrightarrow{x=۱}g'(۱)=۲m-۱\\ g(۱)=m-۱\end{cases}$$

حال مقادیر به دست آمده را در رابطه $(*)$ جایگذاری کرده و داریم:

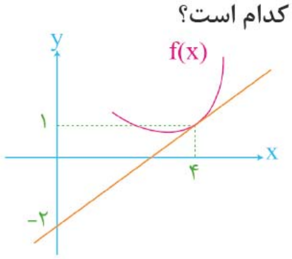
$$(f.g)'=(۴)(m-۱)+(۲m-۱)(۱)=۱۳\Rightarrow ۴m-۴+۲m-۱=۱۳\Rightarrow ۶m=۱۸\Rightarrow m=۳$$

برای محاسبه $f(m)=f(۳)$، در تابع f به سراغ ضابطه بالا می‌رویم:

$$f(x)=۳x^۲-۲x\xrightarrow{x=۳}f(۳)=۳(۳)^۲-۲(۳)=۲۷-۶=۲۱$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تست تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $g(x)=\frac{\sqrt{x}+f(x)}{۲f(x)}$ باشد، حاصل $g'(۴)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

حل: ابتدا از تابع $g(x)$ در نقطه $x=۴$ مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}+f(x)}{۲f(x)}$$

$$g'(x)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+f'(x))(۲f(x))-(۲f'(x))(\sqrt{x}+f(x))}{(۲f(x))^۲}$$

$$g'(۴)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}+f'(۴))(۲f(۴))-(۲f'(۴))(\sqrt{۴}+f(۴))}{(۲f(۴))^۲}$$

با توجه به شکل، مشخص است که $f(۴)=۱$ است و نیز می‌دانیم که شیب خط مماس بر تابع در یک نقطه، با مشتق تابع در آن نقطه برابر است. پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=۴$ ، همان $f'(۴)$ است. از طرفی مطابق شکل، خط l از دو نقطه $(۰,-۲)$ و $(۴,۱)$ عبور می‌کند. پس:

$$f'(۴)=m_l=\frac{۱-(-۲)}{۴-۰}=\frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow[f'(۴)=\frac{۳}{۴}]{f(۴)=۱} g'(۴)=\frac{(\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴})(۲\times۱)-(۲\times\frac{۳}{۴})(۲+۱)}{(۲\times۱)^۲}=\frac{(۱)(۲)-(\frac{۳}{۲})(۳)}{۴}=\frac{۲-۴/۵}{۴}=-\frac{۵}{۸}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تست اگر $f(x)=\frac{۱-۲mx}{x+m}$ و $\frac{f(۱)}{f'(۱)}=۱$ باشد، آنگاه حاصل $f'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۹ ۴) ۹-

حل: ابتدا مشتق تابع f را در نقطه $x=۱$ به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۱-۲mx}{x+m}\Rightarrow f(x)=\frac{-۲mx+۱}{x+m}$$

مشتق تابع هموگرافیک: $$f'(x)=\frac{(-۲m)(m)-(۱)(۱)}{(x+m)^۲}=\frac{-۲m^۲-۱}{(x+m)^۲}\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=\frac{-۲m^۲-۱}{(m+۱)^۲}$$

حال $f(۱)$ را محاسبه کرده و مطابق رابطه $\frac{f(۱)}{f'(۱)}=۱$ داریم:

$$f(x)=\frac{۱-۲mx}{x+m}\xrightarrow{x=۱}f(۱)=\frac{۱-۲m}{m+۱}$$

$$\frac{f(۱)}{f'(۱)}=۱\Rightarrow f(۱)=f'(۱)$$

$$\frac{۱-۲m}{m+۱}=\frac{-۲m^۲-۱}{(m+۱)^۲}\xrightarrow{m\neq-۱}(m+۱)(۱-۲m)=-۲m^۲-۱\Rightarrow m-۲m^۲+۱-۲m=-۲m^۲-۱\Rightarrow -m=-۲\Rightarrow m=۲$$

در این مرحله تابع مشتق را به ازای $m=۲$ بازنویسی کرده و $f'(-۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-۲m^۲-۱}{(x+m)^۲}\xrightarrow{m=۲}f'(x)=\frac{-۹}{(x+۲)^۲}\xrightarrow{x=-۱}f'(-۱)=\frac{-۹}{(-۱+۲)^۲}=-۹$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

قواعد مشتق (بخش سوم)

در این قسمت مشتق‌گیری توابعی را به شما معرفی می‌کنیم که در آن‌ها به جای x، عبارتی برحسب x حضور دارد. (چی شد؟ چی شد؟ من که نفهمیدم)

بذار خودمونی‌تر بگم، قبلن میومدن و از ما مشتق تابع $y=x^۲$ رو می‌پرسیدن. ولی حالا میان و به جای x توی تابع $y=x^۲$، یه عبارت بزرگ‌تر برحسب x مثل $(x^۲-۳x)$ رو قرار میدن و میگن مشتق تابع $y=(x^۲-۳x)^۲$ رو به دست بیار. یه مثال دیگه ... یا اینکه قبلن به ما میگفتن مشتق تابع $y=\sqrt{x}$ چی میشه؟؟ ولی حالا میان و به جای x توی تابع $y=\sqrt{x}$ یه عبارت دیگه مثل $(\frac{x^۲-۱}{۲x+۵})$ رو قرار میدن و میگن حالا بیا و مشتق تابع $y=\sqrt{\frac{x^۲-۱}{۲x+۵}}$ رو حساب کن. توی این طور مواقع رابطه‌های زیر به ما کمک می‌کنن که سؤال رو فیتیله پیچ کنیم و هیچ جای فراری براش نزاریم. بریم که اول این فن‌ها رو یاد بگیریم و بعداً اونارو روی سؤال پیاده کنیم ...

۱ مشتق‌گیری از توابع چندجمله‌ای به فرم $y=(f(x))^n$:

$$\boxed{y=(f(x))^n\rightarrow y'=nf'(x)(f(x))^{n-۱}}$$

مثال: $y=(۳x^۲+۲x-۱)^۳\Rightarrow y'=۳(۶x+۲)(۳x^۲+۲x-۱)^۲$

۲ مشتق‌گیری از توابع به فرم $: y=\sqrt[n]{(f(x))^m}$

$$\boxed{y=\sqrt[n]{(f(x))^m} \to y'=\frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}}$$

مثال: $y=\sqrt[3]{(x^2-x+1)} \xrightarrow[n=3]{m=1} y'=\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$

۳ مشتق‌گیری از توابع به فرم $: y=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}$

$$\boxed{y=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d} \to y'=\frac{(ad-bc)}{(cf(x)+d)^2}\times f'(x)}$$

مثال: $y=\frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+4} \xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}} y'=\frac{(3\times 4)-(-1\times 2)}{(2\sqrt{x}+4)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{14}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+4)^2}$

تست مشتق عبارت $(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2$ به ازای $x=-8$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: با استفاده از رابطه $y=(f(x))^n \to y'=nf'(x)(f(x))^{n-1}$، داریم:

$$y=\overbrace{(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2}^{(f(x))^n} \Longrightarrow y'=\underset{n}{(2)}\underbrace{(-\frac{16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})}_{f'(x)}\overbrace{(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})}^{(f(x))^{n-1}}$$

حال در رابطه به دست آمده $x=-8$ را جایگذاری کرده و داریم:

$$y'(-8)=2(\frac{-16}{64}-\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}})(\frac{16}{-8}-\sqrt[3]{(-8)^2})=2(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3})(-2-4)=2(\frac{1}{12})(-6)=-1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تست تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}=\frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $2/5$ ۲) ۳ ۳) $3/5$ ۴) ۴ (ریاضی خارج ۹۵)

حل: در حد داده شده، هنگامی که $h\to 0$ می‌رود، مخرج کسر به صفر میل می‌کند. اما همان‌طور که می‌بینید، حاصل حد برابر عدد حقیقی $\frac{3}{2}$ است. در این حالت، حدِ صورت کسر نیز باید به ازای $h\to 0$، به صفر میل کند تا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم و پس از رفع ابهام حاصل حد برابر عدد حقیقی $\frac{3}{2}$ شود. پس:

$$f(2+h)-9=0 \xrightarrow{h\to 0} f(2+0)-9=0 \Rightarrow f(2)=9$$

اگر $f(2)=9$ باشد، حد داده شده به صورت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{3}{2}$ است که این همان تعریف مشتق تابع f در نقطه $x=2$ است. بنابراین داریم:

$$f'(2)=\frac{3}{2}$$

حال به سراغ خواسته سؤال، یعنی مشتق تابع $g(x)$ در نقطه $x=2$ می‌رویم:

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}$$

$$g'(x)=\underbrace{(1)}_{\text{مشتق اولی}}\overbrace{\sqrt{f(x)}}^{\text{خودِ دومی}}+\underbrace{(\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}})}_{\text{مشتق دومی}}\overbrace{(x)}^{\text{خودِ اولی}} \xrightarrow{x=2} g'(2)=\sqrt{f(2)}+(\frac{f'(2)}{\cancel{2}\sqrt{f(2)}})(\cancel{2})$$

$$\xrightarrow[f'(2)=\frac{3}{2}]{f(2)=9} g'(2)=\sqrt{9}+\left(\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{9}}\right)=3+\frac{3}{2\times 3}=3+\frac{1}{2}=3/5$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

تست مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$، در نقطه $x=-2$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: ابتدا تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=\frac{2x-x^2}{3x+5}$ فرض کرده و با استفاده از رابطه $\left(\sqrt[n]{(g(x))^m}\right)'=\frac{mg'(x)}{n\sqrt[n]{(g(x))^{n-m}}}$ مقدار مشتق تابع f در نقطه $x=-2$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow f'(-2)=\frac{2g'(-2)}{3\sqrt[3]{(g(-2))^{3-2}}}=\frac{2g'(-2)}{3\sqrt[3]{g(-2)}} \quad (*)$$

حال با استفاده از تابع $g(x)=\frac{2x-x^2}{3x+5}$، مقادیر $g'(-2)$ و $g(-2)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{2x-x^2}{3x+5}:\begin{cases} g'(x)=\frac{(2-2x)(3x+5)-(3)(2x-x^2)}{(3x+5)^2}\xrightarrow{x=-2}g'(-2)=\frac{(6)(-1)-(3)(-8)}{(-1)^2}=18 \\ g(-2)=\frac{2(-2)-4}{3(-2)+5}=\frac{-4-4}{-6+5}=\frac{-8}{-1}=8 \end{cases}$$

حال مقادیر $g'(-2)=18$ و $g(-2)=8$ را در رابطه (*) جایگذاری کرده و داریم:

$$f'(-2)=\frac{2(18)}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{36}{3\times 2}=6$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۳ تکنیک‌های مشتق

تکنیک ۱ (ساده کن بعد مشتق بگیر) — تکنیک ۲ (مشتق گیری از عامل صفر شونده) — تکنیک ۳ (دنده عقب توی مشتق)

توی این قسمت قصد داریم که چندتا تکنیک خوب برای مشتق‌گیری بهتون یاد بدیم که یکی از یکی، مهمترن پس بدون اینکه وقت رو تلف کنیم بریم به سراغشون!!!

تکنیک اول (ساده کن بعد مشتق بگیر)

در بعضی از سؤالات، قبل از مشتق گرفتن از تابع، سعی می‌کنیم که تابع داده شده را به کمک اتحادها، فاکتورگیری، تجزیه، گویا کردن مخرج کسرها و ... ساده کنیم و سپس از تابع به دست آمده مشتق بگیریم.

مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ به ازای $x=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

ابتدا در صورت کسر تابع داده شده از $\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{x}\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}}=-\sqrt{x}$$

حالا از تابع به دست آمده مشتق گرفته و $x=\frac{1}{4}$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x)=-\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}f'(\tfrac{1}{4})=\frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{-1}{2(\frac{1}{2})}=\frac{-1}{1}=-1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تست مشتق تابع $f(x)=\frac{(x^2-4)(x-1)}{(x+2)(\sqrt{x}-1)}$ به ازای $x=4$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

حل: ابتدا تابع داده شده را به صورت زیر بازنویسی کرده و آن را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^{2}-4)(x-1)}{(x+2)(\sqrt{x}-1)}=\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(\sqrt{x}-1)}=\frac{(x-2)\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}}=(x-2)(\sqrt{x}+1)$$

مزدوج — مزدوج

حال با استفاده از رابطه $(f.g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$، از تابع به دست آمده در $x=4$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=(x-2)(\sqrt{x}+1)\Rightarrow f'(x)=(1)(\sqrt{x}+1)+(\frac{1}{2\sqrt{x}})(x-2)$$

$$\xrightarrow{x=4} f'(4)=(\sqrt{4}+1)+(\frac{1}{2\sqrt{4}})(4-2)=(2+1)+(\frac{1}{4})(2)=3+\frac{1}{2}=3/5$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تست مشتق تابع $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل: ابتدا تابع داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}=(2x^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{1}{6}})-(x^{\frac{1}{3}}\times x^{-\frac{1}{6}})=f(x)=2x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}$$

حالا از تابع به دست آمده در نقطه $x=1$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\left(2(\frac{1}{3})x^{\frac{1}{3}-1}\right)-\left(\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1}\right)=\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)-\left(\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تکنیک دوم (مشتق‌گیری از عامل صفر شونده)

اگر تابعی به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عامل و به صورت $y=f(x)\times g(x)\times h(x)\times\cdots$ بوده و یکی از عامل‌ها در نقطه $x=a$ برابر صفر باشد، در این صورت برای مشتق گرفتن از این تابع در نقطه $x=a$، فقط از عامل صفرشونده مشتق گرفته و سپس آن را در حدّ بقیه عامل‌ها در نقطه $x=a$ ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$y=f(x)\times g(x)\times h(x)\times\cdots\xrightarrow{\text{if } f(a)=0} y'(a)=f'(a)\times\lim_{x\to a}g(x)\times h(x)\times\cdots$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^{4}}$ را در $x=1$ به دست آورید:

چون عامل $(x-1)$ در نقطه $x=1$ صفر می‌شود، بنابراین فقط از $(x-1)$ مشتق می‌گیریم و آن را در حدِّ بقیهٔ عامل‌ها در نقطه $x=1$ ضرب می‌کنیم. به این صورت که:

$$f(x)=\underbrace{(x-1)}_{\text{مشتق‌گیری فقط از عامل صفرشونده}}\times\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^{4}}\Rightarrow f'(x)=1\times\overbrace{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^{4}}}^{\text{در بقیه عامل‌ها در } x=1}\Rightarrow f'(1)=\frac{\sqrt[5]{3(1)-2}}{(5(1)-3)^{4}}=\frac{1}{2^{4}}=\frac{1}{16}$$

توجه اگر ضابطه تابع در نقطه $x=a$، دو یا چند عامل صفرشونده داشته باشد، در این صورت مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است.

مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-2)(x^{2}-5x+6)}{\sqrt{x}(x^{3}-6x)}$ در $x=2$ برابر صفر است. چرا که هر دو عامل $(x-2)$ و $(x^{2}-5x+6)$ به ازای $x=2$ برابر صفر هستند بنابراین مشتق تابع f در نقطه $x=2$، به علّتِ داشتنِ دو عامل صفرشونده در این نقطه برابر صفر است.

توجه اگر توان عامل صفرشونده بیشتر از یک باشد، در این صورت مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است.

مثال: مشتق تابع $f(x)=(x-۱)^۳\sqrt[۳]{۲x-۱}$ در $x=۱$ برابر صفر است. چرا که توان عامل صفرشونده یعنی توانِ عاملِ $(x-۱)$، بیشتر از یک است.

تست اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۳}{۴}$

حل: حد خواسته شده همان مشتق تابع در نقطه $x=-۱$ است. به عبارت دیگر:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=f'(-۱)$$

حال باید مشتق تابع f در نقطه $x=-۱$ را محاسبه کنیم، اما با کمی دقت می‌توان متوجه شد که عامل $(x^۲-x-۲)$ در ضابطه تابع f، به ازای $x=-۱$ برابر صفر می‌شود. بنابراین از تکنیک مشتق عامل صفرشونده استفاده می‌کنیم، یعنی فقط از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم و حاصل را در حدِّ بقیه تابع در نقطه $x=-۱$ ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر:

حد بقیه عامل‌ها در $x=-۱$

$$f(x)=\underbrace{(x^۲-x-۲)}_{}\times\sqrt[۳]{x^۲-۷x}\Rightarrow f'(x)=(۲x-۱)\lim_{x\to -۱}\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$$

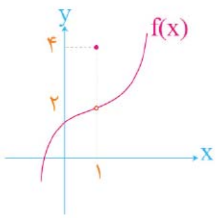
مشتق‌گیری فقط از عامل صفرشونده

$$\xrightarrow{x=-۱} f'(-۱)=(۲(-۱)-۱)\times\sqrt[۳]{(-۱)^۲-۷(-۱)}=-۳\times\sqrt[۳]{۸}=-۳\times ۲=-۶$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تست نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $g(x)=(x^۳-۲x+۱)f(x)$ باشد، آنگاه حاصل $g'(۱)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱



حل: با توجه به اینکه عامل $(x^۳-۲x+۱)$ در تابع g، به ازای $x=۱$ برابر صفر می‌شود، بنابراین برای به دست آوردن $g'(۱)$، مطابق نکته مشتق عامل صفرشونده، فقط از عامل صفرشونده مشتق گرفته و حاصل را در حدِّ بقیه عامل‌های تابع در نقطه $x=۱$ ضرب می‌کنیم، پس:

حد بقیه عامل‌ها در $x=۱$

$$g(x)=(x^۳-۲x+۱)f(x)\to g'(x)=(۳x^۲-۲)\lim_{x\to ۱}f(x)$$

مشتق‌گیری فقط از عامل صفرشونده

از طرفی با توجه به نمودار داده شده مشخص است که $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۲$ است. لذا $g'(۱)$ برابر است با:

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱)=(۳-۲)\times ۲=۱\times ۲=۲$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تکنیک سوم (دنده عقب توی مشتق)

در بعضی از سؤالات عبارتی با ظاهر نسبتاً پیچیده را به ما می‌دهند و حاصل آن را از ما می‌پرسند، در این گونه موارد معمولاً با طرف دوم مشتق مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع و یا با طرف دوم مشتق ترکیب توابع مواجهیم که در ادامه چند نمونه مهم که در اکثر تست‌ها مورد سؤال قرار می‌گیرند را برایتان لیست می‌کنیم:

- $f'(x)\pm g'(x)=(f\pm g)'(x)$
- $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f.g)'(x)$

- $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=g^{2}(x)(\frac{f}{g})'(x)\ ;\ (g(x)\neq 0)$
- $\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^{2}}=(\frac{f}{g})'(x)\ ;\ (g(x)\neq 0)$
- $2f(x)f'(x)=(f^{2}(x))'$
- $f'(x)g'(f(x))=(gof)'(x)$

تست اگر $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x+1}$ و $g(x)=\frac{x^{2}+3x+2}{(x-3)\sqrt{4-x}}$ باشد، حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ به ازای $x=-2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{25}$ ۴) $-\frac{1}{25}$

حل: می‌دانیم که عامل خواسته شده یعنی: $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$، همان مشتق حاصل‌ضرب دو تابع f و g یعنی مشتق تابع $(f.g)$ است. پس ابتدا تابع $(f.g)(x)$ را تشکیل داده و سپس مشتق عبارت به دست آمده را به ازای $x=-2$، محاسبه می‌کنیم:

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x+1}\times\frac{\overbrace{x^{2}+3x+2}^{(x+1)(x+2)}}{(x-3)\sqrt{4-x}}=\frac{x+2}{x-3}$$

حال برای به دست آوردن مشتق تابع $(f.g)(x)=\frac{x+2}{x-3}$، طبق رابطه $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{2}}$ داریم:

مشتق تابع هموگرافیک[1] : $\xrightarrow[c=1,d=-3]{a=1,b=2}(f.g)'=\frac{(1\times -3)-(2\times 1)}{(x-3)^{2}}=\frac{-5}{(x-3)^{2}}$

در نهایت، $x=-2$ را در رابطه بالا جایگذاری کرده و حاصل مشتق تابع $(f.g)(x)$ را در نقطه $x=-2$ به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{x=-2}(f.g)'(-2)=\frac{-5}{(-2-3)^{2}}=\frac{-5}{25}=-\frac{1}{5}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مشتق تابع مرکب

اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند، در این صورت برای محاسبه مشتق تابع مرکب $(fog)(x)$، ابتدا از تابع درونی، یعنی g مشتق گرفته و سپس مشتق تابع بیرونی یعنی f را به ازای خروجی تابع g، به دست می‌آوریم. به عبارت دیگر:

$$\boxed{y=(fog)(x)=f(g(x))\rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))}$$

در حالت کلی‌تر داریم:

$$\boxed{y=f(\bigcirc)\Rightarrow y'=\bigcirc' f'(\bigcirc)}$$

مثال: اگر $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ چقدر است؟

با توجه به رابطه مشتق تابع مرکب، فرض مسئله را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم: $(*)\ (fog)'(2)=g'(2)f'(g(2))=6$

حال با استفاده از تابع $g(x)$ داریم:

$$g(x)=\frac{2x+1}{x-1}\begin{cases}g'(x)=\frac{2(-1)-(1\times 1)}{(x-1)^{2}}=\frac{-3}{(x-1)^{2}}\xrightarrow{x=2}g'(2)=-3\\ g(2)=\frac{2(2)+1}{2-1}=5\end{cases}$$

مقادیر به دست آمده را در رابطه $(*)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$g'(2)f'(g(2))=6\Rightarrow(-3)f'(5)=6\Rightarrow f'(5)=\frac{6}{-3}=-2$$

[1] در این سؤال برای به دست آوردن مشتق تابع $(f.g)(x)$، می‌توانستیم از روش مشتق تقسیم دو تابع و یا مشتق عامل صفرشونده نیز استفاده کنیم

۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

توجه در صورتی که سه تابع مشتق‌پذیر با هم ترکیب شوند:

$$\boxed{y=(fogoh)(x)\longrightarrow y'=h'(x)g'(h(x))f'(g(h(x)))}$$

توجه برای مشتق گرفتن از یک تابع مرکب توان‌دار داریم:

$$\boxed{y=f^{n}(g(x))\longrightarrow y'=ng'(x)f'(g(x))f^{n-1}(g(x))}$$

مثال: اگر $f(1)=\frac{1}{2}$ و $f'(1)=2$ باشد، مشتق تابع $y=f^3(2x^2-1)$ به ازای $x=1$ برابر است با:

$$y=f^3(\underbrace{2x^2-1}_{g(x)})\longrightarrow y'=\overset{n}{3}\underbrace{(4x)}_{g'(x)}\overbrace{f'(2x^2-1)}^{f'(g(x))}\underbrace{f^2(2x^2-1)}_{f^{n-1}(g(x))}$$

حال $x=1$ را جایگذاری کرده و داریم:

$$y'(1)=3\times4\times f'(1)f^2(1)\xrightarrow[f'(1)=2]{f(1)=\frac{1}{2}}y'(1)=3\times4\times2\times(\frac{1}{2})^2=6$$

تست اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: با توجه به تعریف مشتق تابع مرکب داریم:

$$(fog)'(1)=g'(1)f'(g(1))\quad(*)$$

و از طرفی می‌دانیم حدی که در صورت سؤال داده شده با مشتق تابع f در نقطه $x=2$ برابر است. یعنی:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{4}{3}$$

حال مقادیری که در رابطه $(*)$ وجود دارد را به دست می‌آوریم:

- $g(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{x=1}g(1)=2$
- $f'(g(1))=f'(2)\xrightarrow{f'(2)=\frac{4}{3}}f'(g(1))=\frac{4}{3}$
- $g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=1}g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

مقادیر به دست آمده را در رابطه $(*)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$(fog)'(1)=g'(1)f'(g(1))$$

$$(fog)'(1)=(\frac{3}{2})\times(\frac{4}{3})=2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تست فرض کنید $f(x)=(x[x])^3$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

حل: ابتدا فرمول مشتق تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

ما به دنبال مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ هستیم، پس با توجه به فرمول بالا داریم:

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=\underline{g'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})}\ f'\ (\underline{g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-})\quad(*\text{ رابطه})$$

مشتق چپ تابع g در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

مقدار حدی تابع g به ازای x های کمتر از $\frac{\sqrt{5}}{2}$

حالا مقادیر فوق را به صورت جداگانه به دست می‌آوریم:

- $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} \Rightarrow g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}} \Rightarrow g'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^۳}}=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{۲^{-۳}}=-۴\sqrt{۵}$

- $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} \Rightarrow g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۵}{۴})^- -۱}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۵}{۴})^- -\frac{۴}{۴}}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^-}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^-}=۲^+$

با توجه به حضور براکت در ضابطه تابع f، ابتدا باید تکلیف براکت را مشخص کنیم. می‌دانیم که عامل $[x]$ به ازای $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ برابر ۲ است. پس در ضابطه تابع f به جای $[x]$، عدد ۲ را قرار می‌دهیم. پس فرم جدید تابع f به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=(x[x])^۳ \xrightarrow{[x]=۲} f(x)=(۲x)^۳=۸x^۳$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)$ ابتدا باید مشتق تابع f را به دست آورده و سپس به جای ورودی‌های آن مقدار $g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=۲^+$ را قرار دهیم:

$$f(x)=۸x^۳ \xrightarrow{f'} f'(x)=۲۴x^۲ \xrightarrow{x=۲^+} f'(۲^+)=۹۶$$

در نهایت با توجه به رابطه (*) داریم:

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=-۴\sqrt{۵}\times ۹۶=۸\times(-۴۸\sqrt{۵})$$

همان‌طور که مشخص است، مقدار به دست آمده ۸ برابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است.

تست اگر $f(x)=۳x^۲+۱$، $g(x)=\sqrt{x}-۱$ و $h(x)=x-۱$ باشند، آنگاه حاصل $(fogoh)'(۲)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

حل: براساس رابطه $(fogoh)'(x)=h'(x)g'(h(x))f'(g(h(x)))$ داریم:

- $f(x)=۳x^۲+۱ \Rightarrow f'(x)=۶x$
- $g(x)=\sqrt{x}-۱ \Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$
- $h(x)=x-۱ \Rightarrow h'(x)=۱$

$$\Rightarrow (fogoh)'(x)=۱\times\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\times(۶(\sqrt{x-۱}-۱))$$

حال در رابطه به دست آمده $x=۲$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$(fogoh)'(۲)=\frac{۱}{۲}\times ۰=۰$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تست برای توابع مشتق‌پذیر f و g، $f^۳(\sqrt{x}-۱)=۳g(۲x-۱)$ است، اگر $f(۱)=f'(۱)=۲$ باشد، آنگاه مشتق تابع g به ازای $x=۷$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) ۱　　۴) ۲

حل: ابتدا از طرفین تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$۳\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times f'(\sqrt{x}-۱)f^۲(\sqrt{x}-۱)=۳\times۲g'(۲x-۱)$$

حال برای این‌که بتوانیم از فرض‌های سوال، یعنی: $f'(۱)=f(۱)=۲$ استفاده کنیم، در تساوی فوق $x=۴$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=۴} ۳\times\frac{۱}{۴}\times f'(۱)f^۲(۱)=۶g'(۷) \xrightarrow[f'(۱)=۲]{f(۱)=۲} \frac{۳}{۴}\times۲\times(۲)^۲=۶g'(۷) \Rightarrow ۶g'(۷)=۶ \Rightarrow g'(۷)=۱$$

بنابراین مشتق تابع g به ازای $x=۷$ برابر ۱ است. لذا گزینه ۳ صحیح است.

نکته در برخی از سؤالات، طول نقطه مشتق‌گیری برای ما مشخص نیست. یعنی نمی‌دانیم که مشتق تابع را در چه نقطه‌ای به دست بیاوریم. در این‌گونه موارد بهتر است ابتدا ضابطه تابع مرکب را تشکیل داده و سپس با استفاده از قوانین مشتق‌گیری از رابطه به دست آمده مشتق بگیریم (به تست این مدلی با هم کار کنیم)

تست بعدی یه قصه جالب داره اونم اینه که این سؤال سال ۹۱ توی کنکور ارشد اومده بود و سال بعدش بدون هیچ تغییری توی کنکور خارج از کشور رشته ریاضی اومد، اینو گفتم که بدونی اومدن سؤال‌های کنکور ارشد و یا حتی دکتری، توی کنکور شما موضوع تازه‌ای نیست و قبلن هم سابقه داشته. پس الکی ترس به دلت راه نده و نگران نباش، چون که ما همه اونا رو براتون تحلیل کردیم و خوباشون رو براتون گلچین کردیم و به وقتش براتون حل می‌کنیم.

تست اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، آنگاه $f'(x)g'(f(x))$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) -1 ۲) 1 ۳) x ۴) $\frac{1}{2}x$

حل: اگه کمی با دقت به داستان نگاه کنیم، متوجه میشیم که عبارت $f'(x)g'(f(x))$ همون $(gof)'(x)$ میشه. پس سؤال با زبون بی‌زبونی گفته که مشتق تابع gof رو حساب کن. ولی چون نقطه خاصی رو مشخص نکرده، ما ترجیح می‌دیم که اول بیایم و ضابطه تابع gof رو به دست بیاریم و بعدش از اون مشتق بگیریم. بیا با من

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}}=x$$

پس ضابطه‌ای که برای gof به دست میاد برابره با: $gof(x)=x$

حالا از دو طرف رابطه به دست اومده مشتق می‌گیریم تا خواسته سؤال به دست بیاد:

$$(gof)(x)=x \xrightarrow{\text{مشتق از دو طرف}} f'(x)g'(f(x))=1$$

پس گزینه ۲ درسته.

مشتق مرتبه دوم

می‌دانیم مشتق اول تابع $f(x)$ به صورت $f'(x)$ است. حال اگر تابع $f'(x)$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ را به صورت $f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن کافی است از تابع $f(x)$ دو بار مشتق بگیریم. به عبارت دیگر اگر تابع $f(x)$ را داشته باشیم:

$$\boxed{f(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}f''(x)}$$

مثال: $f(x)=3x^4+2x^2-1 \xrightarrow[f']{\text{مشتق اول}} f'(x)=12x^3+4x \xrightarrow[f'']{\text{مشتق دوم}} f''(x)=36x^2+4$

حال اگر بخواهیم مشتق مرتبه دوم تابع f، در نقطه $x=a$ را به کمک تعریف مشتق بیان کنیم، داریم:

$$\boxed{f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}}$$

و در حالت کلی‌تر:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+mh)-f'(a+nh)}{ch}=\left(\frac{m-n}{c}\right)f''(a)}$$

تست با فرض $g'(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ و $f(x)=g(x^2)$، مقدار $f''(\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $-\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{40}{9}$ ۳) $\frac{40}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

حل: ابتدا به کمک مشتق تابع مرکب، از دو طرف تساوی $f(x)=g(x^2)$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=g(x^2)\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(x)=2xg'(x^2)$$

در رابطه بالا از فرض مسئله یعنی $g'(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ استفاده کرده و به جای x های آن، x^2 را جایگزین می‌کنیم: