



مشتق گیری

* خوندیم دیگه!



تمرین

(IQ کج)

۱. با فرض $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} & 1 < x < 3 \\ x^2 \sqrt{x} & x > 3 \end{cases}$ حاصل $3f'(-1) + 4f'(2) + f'(4)$ کدام است؟

۱۹ (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴)

۲. در دو نقطه از منحنی $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ مقدار مشتق تابع برابر صفر است. مجموع معکوس طول این دو نقطه چقدر است؟ (موروماه)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$\frac{8}{5}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{8}$

(IQ کج)

۳. با فرض $f(x) = \frac{6x^2 + 8}{x - 2}$ و $g(x) = \frac{x^3 + 12x}{x - 2}$ حاصل $g'(x) - f'(x)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$2x + 1$ $x + 2$ $2x + 2$ $2x - 4$

پاسخ: گزینه ۴

محاسبه‌ی $g'(x)$ و $f'(x)$ و اختلاف آن‌ها وقت‌گیر است. با توجه به اینکه $(g(x) - f(x))' = g'(x) - f'(x)$ است، به جای محاسبه‌ی $g'(x) - f'(x)$ ، ابتدا $g(x) - f(x)$ را به دست می‌آوریم و سپس از آن مشتق می‌گیریم، پس می‌توان نوشت:

$$g(x) - f(x) = \frac{x^3 + 12x}{x - 2} - \frac{6x^2 + 8}{x - 2} = \frac{x^3 + 12x - 6x^2 - 8}{x - 2} = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)^3}{x - 2}$$

$$= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow g'(x) - f'(x) = 2x - 4$$



(معموماه)

۴. تابع مشتق $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ در کدام بازه منفی نیست؟

- (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(-1, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty)$

۵. به ازای چند مقدار صحیح از a ، مشتق تابع $y = \left(\frac{a+2}{3}\right)x^3 - ax^2 + x$ همواره بالای محور x ها است؟ (IQ گاج)

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۶. اگر f پیوسته و $f(1) = 4$ و $f'(1) = 8$ باشد، آنگاه مشتق $y = \frac{x}{f^2(x)}$ در $x=1$ کدام است؟ (نردبام ۳ فیلی سبز)

- (۱) $\frac{3}{64}$ (۲) $\frac{3}{16}$ (۳) $-\frac{3}{16}$ (۴) $-\frac{3}{64}$



مشتق گیری با حضور قدر مطلق و براکت



۷. مشتق تابع $y = |x| + |x+1| + \dots + |x+99|$ در $x = -\frac{9}{2}$ چقدر است؟

- (۱) ۹۰ (۲) -۹۰ (۳) ۱۰۰ (۴) -۱۰۰



۸. مشتق تابع $y = |x^2 - 1| + |x^2 - 2| + \dots + |x^2 - 10|$ به ازای $x = \frac{3}{2}$ چقدر است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۱۸ (۳) -۳۰ (۴) -۱۸

(تجربی ۹۰)

۹. در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ ، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

(تجربی خارج ۹۴)

۱۰. اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲



(ریاضی ۹۳)

۱۱. مشتق راست تابع با ضابطه $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطه $x = -3$ کدام است؟

$\frac{7}{3}$ (۴)

-۴ (۳)

-۵ (۲)

$-\frac{16}{3}$ (۱)

(IQ گاج)

۱۲. اگر $f(x) = \frac{|x-1| + x[\sin \pi x]}{|x|}$ مقدار $f'_-(1)$ کدام است؟

وجود ندارد (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۱۳. اگر $f(x) = (ax^2 - b)[-2x]$ و $f'_-(3) = 252$ باشد، مقدار $f'_+(3)$ کدام است؟

۲۹۲ (۴)

۲۹۴ (۳)

۲۱۶ (۲)

۲۱۲ (۱)



بهتر مشتق گرفتن

- ۱- عامل صفر شونده:
- ۲- تبدیل به هموگرافیک:
- ۳- ساده کردن:
- *

(ریاضی ۸۳)

۱۴. مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(x^2+x)^4}$ در نقطه $x=1$ است؟

$\frac{5}{16}$ (۴)

$\frac{3}{40}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

(IQ فارج)

۱۵. مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x + \sqrt{x}}$ در $x=1$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(تجربی فارج ۹۶)

۱۶. مشتق تابع $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)



۱۷. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ همواره پیوسته و مخالف صفر باشند و همچنین حاصل $h(x) = \frac{(x^2 - 1)f(2x + 1)}{g(x + 1)f(x + 2)}$ ،

(۱۰ گزین)

$h'(1)g(2)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(مهر و ماه)

۱۸. مشتق تابع $f(x) = (x^4 - 1)(x^4 - 2)(x^4 - 3) \dots (x^4 - 82)$ در نقطه $x = 3$ چقدر است؟

$-108 \times 81!$ (۴)

$108 \times 81!$ (۳)

$-108 \times 80!$ (۲)

$108 \times 80!$ (۱)

۱۹. مشتق تابع $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2(x-2)}$ در $x = 1$ کدام است؟

$\sqrt[3]{4}$ (۴)

صفر (۳)

$-\sqrt[3]{2}$ (۲)

$-\sqrt[3]{4}$ (۱)

(مهر و ماه)

۲۰. مشتق راست $f(x) = \sqrt{(x^2 + 6x + 9) \log_4(x^2 - 1)}$ در $x = -3$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)



(۱Q)

۲۱. در تابع $f(x) = [2x] |4 - x^2|$ ، حاصل $f'(2)$ کدام است؟

-۲۴ (۴)

-۱۲ (۳)

-۱۶ (۲)

-۸ (۱)

۲۲. مشتق چپ تابع $f(x) = |x+1| |x+2| |x+3| + |x+2| |x+3| |x+4|$ در $x = -3$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

۲۳. مشتق تابع $y = (x^3 - 8)\sqrt{x-2} + x^2\sqrt{2x}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

۴ (۴)

۱۰ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

تذکر ۲ عامل صفر شونده:

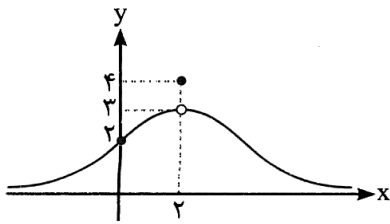


تذکر ۱ عامل صفر شونده:

۲۴. برای کدام مقدار a حاصل مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2\sqrt{5x^2 + 5a^2}}{2 + \sin(ax + 2)}$ در $x = 0$ برابر صفر است؟هر مقدار a (۴) $|a| < 1$ (۳) $a < 1$ (۲) $a > 1$ (۱)



(تکمیلی ۹۹)

۲۵. نمودار تابع f به صورت روبه‌روست. اگر $g(x) = (x^2 - 4)f(x)$ ، مقدار $g'(2)$ کدام است؟

خطر!

(۱) ۱۶

(۲) ۱۲

(۳) ۸

(۴) ۶

(IQ گاج)

۲۶. اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ باشند، مشتق تابع $g(x)$ در $x = -1$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ۲

(۲) -۲

(۱) صفر

۲۷. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 + x} = \sqrt{2}$ ، مشتق تابع $y = f(x)\sqrt{2x+1}$ در $x = 0$ کدام است؟ (f روی \mathbb{R} مشتق‌پذیر است.) (IQ گاج)

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) $-\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{2}$ ۲۸. مشتق تابع $y = \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - 1}$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

(۴) -۱۰

(۳) -۵

(۲) ۵

(۱) ۱۰

(تجربی ۱۹)

۲۹. اندازه مشتق تابع به معادله‌ی $y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x}$ ، به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ ، کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) -۱

(۱) -۲



(تقریبی ۹۱)

۳۰. مقدار مشتق $\frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{7}{9}$ (۳)

$\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)



۳۱. ضابطه‌ی تابع مشتق را برای تابع $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ به شکل $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$ نوشته‌ایم. ضابطه‌ی $g(x)$ کدام است؟

$(1 + \sqrt{x})^2$ (۴)

$\frac{1 + \sqrt{x}}{2}$ (۳)

$\frac{-1}{(1 + \sqrt{x})^2}$ (۲)

$\frac{2}{1 + \sqrt{x}}$ (۱)

(نردباز ۴ فیلی سبز)

۳۲. مشتق تابع $f(x) = \frac{2}{1 + \frac{3}{x}}$ در $x = -1$ کدام است؟

$0/75$ (۴)

$1/25$ (۳)

$1/5$ (۲)

$2/5$ (۱)

(IQ گاج)

۳۳. اگر $f(x) = \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^6}{x^3}$ ، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



(معموماه)

۳۴. مقدار مشتق $y = \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + 2x}}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

(نردباز ۴ فیلی سبز)

۳۵. مشتق تابع $y = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + \sqrt[3]{x}}$ به ازای $x = -8$ کدام است؟

$\frac{1}{12}$ (۴)

$-\frac{1}{12}$ (۳)

$-\frac{1}{48}$ (۲)

$\frac{1}{48}$ (۱)

(IQ گاج)

۳۶. مشتق تابع $y = \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x-1}}$ در $x = 5$ کدام است؟

۲۵ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

(IQ گاج)

۳۷. مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{5x} + \sqrt{2x}} \times \sqrt[6]{7x^2} - 2\sqrt{10x^2}$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ (۴)

$\frac{9}{\sqrt[3]{9}}$ (۳)

$\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)



۲۸. در تابع $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x+2}$ مقدار $f'(-1)$ کدام است؟ (IQ گاج)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۹. مشتق تابع $y = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1})^2 (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1})^2$ در $x=0$ کدام است؟ (معروماه)

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

۴۰. مشتق تابع $y = \frac{(\sqrt[3]{x} + 2)(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{2x^2 + 16x}$ در نقطه‌ی $x=-1$ کدام است؟ (معروماه)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۴۱. مشتق سوم تابع $y = \frac{x^8 - 16}{x^2 + 2}$ در $x=1$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۷۲ (۳) ۳۴ (۴) -۷۲

تذکر بهتر مشتق گرفتن از مراتب بالا:





مشتق گیری از اعمال روی توابع

* خونديم ديگه!

(کتاب درسی)

۴۲. اگر بدانیم $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$, $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$, حاصل $(f.g)'(2)$ کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۲ (۳)

۵۸ (۲)

۳۸ (۱)



(معمروماه)

۴۳. مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر با -12 است. اگر $f(1) = 0$ و $f'(1) = -4$ بوده و $g'(1)$ موجود باشد،

مقدار $g(1)$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)



۴۴. اگر $f(1) = g(1) = 2$ و $f'(1) = -3 = 3g'(1)$ باشند، مقدار مشتق تابع $h(x) = f(x)g(x) - f^3(x)$ در $x=1$

(IQ کج)

کدام است؟

۳۳ (۴)

۲۸ (۳)

۳۱ (۲)

۲۶ (۱)

(معمروماه)

۴۵. اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ و $g(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ باشد، حاصل $(f^2(x).g(x))'$ به ازای $x=2$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

تذکره بهتر مشتق گرفتن از ضرب‌های سهمگین:



۴۶. اگر $f(x) = \sqrt{x^3} \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ در $x=1$ کدام است؟

$$\frac{5}{12} \quad (۴)$$

$$-\frac{21}{12} \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\frac{21}{12} \quad (۱)$$

زنگ باش

$$* \frac{f'g - g'f}{g^2} = ?$$

$$* f'g - g'f = ?$$

(قلمچی ۹۹)



۴۷. اگر $f(x) = (x^2 + 1)(x^4 + 1)$ و $g(x) = x^8 - 1$ مقدار $g'(1)f(1) - f'(1)g(1)$ کدام است؟

$$۳۲ \quad (۴)$$

$$۱۶ \quad (۳)$$

$$۸ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

۴۸. اگر $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ و بدانیم $f'(a)g(a) = g'(a)f(a)$ مقدار a کدام است؟ (IQ کج)

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۱)$$



۴۹. اگر $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^3} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{140}{\sqrt[3]{x^2}}$ ، حاصل $f''g + f'g'$ در $x=1$ کدام است؟

(۱) $11/8$ (۲) $11/9$ (۳) $-11/8$ (۴) $-11/9$

ترفند تشخیص فرم بسته مشتق اعمال:



۵۰. اگر $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2\sin^2 x}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 2\cos^2 x}$ باشند، حاصل $ff' + gg'$ در $x=1$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۲

(IQ کج)

۵۱. اگر $f(x) = \sqrt[3]{2x-3}$ ، مقدار $f^4(x) \times f'(x)$ در $x=2$ کدام است؟

(IQ کج)

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۲. اگر $f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ ، آن گاه $f(x) + (x-1)f'(x)$ کدام است؟

(۱) $64x^{63}$ (۲) $8x^7$ (۳) ۱ (۴) $16x^{15}$



مشتق گیری از ترکیب توابع

*

۵۳. اگر $f(x) = \sqrt{3x+4}$ و $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$ باشند، در این صورت مقدار $(g \circ f)'(-1)$ کدام است؟ (مهرماه)

(۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

۵۴. اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشد، مشتق تابع $f \circ g$ کدام است؟ (تیرمی ۹۴)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) مشتق ندارد.

۵۵. فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{4}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ ، چند برابر

است؟ $(-128\sqrt{2})$ (تیرمی ۱۴۰۰)

(۱) -۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴



۵۶. فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر

(تجربی فارغ ۱۴۰۰)

$(-48\sqrt{5})$ است؟



۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(تجربی ۹۸)

۵۷. اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۵۸. اگر $h(0) = 2h'(0) = -g(1) = -g'(1) = f'(-1) = 1$ ، مقدار مشتق تابع fog در صفر کدام است؟

(نردباز ۴ قبلی سبز)

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

(ریاضی ۹۲)

۵۹. اگر $f(x) = \frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدام است؟

$\frac{x-3}{x^3}$ (۴)

$\frac{1}{3x}$ (۳)

$\frac{3}{x^2}$ (۲)

$\frac{3}{x}$ (۱)

زنگ باش



(ریاضی فاج ۹۲)

۶۰. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $f'(x)g'(f(x))$ کدام است؟



- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) x (۴) $\frac{1}{2}x$

۶۱. تابع $f(x) = \begin{cases} 5x-1 & x \leq 1 \\ \sqrt{2x+a} & x > 1 \end{cases}$ مفروض است. اگر مشتق تابع $f \circ f(x)$ در $x = \frac{1}{2}$ برابر ۵ باشد، a

(نردبام ۴ فیلی سبز)

کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۴ (۳) -۲ (۴) -۹

(ریاضی ۱۹)

۶۲. اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ ، آن گاه مشتق $f(xf(x))$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

(نردبام ۴ فیلی سبز)

۶۳. اگر $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ ، آن گاه مشتق تابع $y = \frac{f \circ f}{f}$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$



۶۴. اگر $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ و $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ مقدار $g'\left(\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

$$\frac{-16}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{-15}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{15}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{16}{15} \quad (۱)$$

(ریاضی قارج ۱۵)

۶۵. اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

$$\sqrt{1+x^2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (۳)$$

$$x - \sqrt{1+x^2} \quad (۲)$$

$$-x + \sqrt{1+x^2} \quad (۱)$$



۶۶. اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x) = f(\sqrt{1+\tan^2 x})$ و $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

$$1 \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۱)$$

۶۷. اگر f یک تابع مشتق پذیر، $g(x) = f\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟ (ریاضی قارج ۹۹)



$$-\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۱)$$



۶۸. اگر تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T=3$ باشد و بدانیم $g(x) = f(5-3x) + 3f(x) + \frac{x}{6}$ حاصل مشتق

تابع $g(x)$ در $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟ (f همیشه مشتق دارد.) (۱۰گزینه‌ای)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{6}$ (۴) $3f'(\frac{1}{2})$

۶۹. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(4-x^2)$ است.

اگر $f^{-1}(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{3})$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

۷۰. اگر $f(8x) = g(x + 4x^2)$ و $g'(-\frac{1}{16}) = 4$ باشد، مقدار $f''(-1)$ کدام است؟ (معرفی ماه)



- (۱) 2 (۲) -2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$



(۱Q) (کاج)

۷۱. اگر $f^3(2x) = x^3 + 3x + 13$ ، مشتق تابع $f(x)$ در $x = 4$ کدام است؟

$\frac{17}{28}$ (۴)

$\frac{5}{17}$ (۳)

$\frac{5}{18}$ (۲)

$\frac{15}{27}$ (۱)

(۱Q) (کاج)

۷۲. اگر $f(\sqrt[3]{x}) = 1 + x^2$ ، مشتق تابع g با ضابطه $g(x) = f(x^2 + x)$ در $x = 1$ کدام است؟

۳۸۴ (۴)

۱۹۲ (۳)

۴۸۶ (۲)

۵۷۶ (۱)

۷۳. اگر $f(x)$ و $g(x)$ روی \mathbb{R} مشتق پذیر باشند و داشته باشیم $g(x^2 + x) = f(x^3) + f(\frac{1}{x})$ و $g'(2) = 4$ ، مقدار

(معروماه)

عددی $f'(1)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)



آهنگ متوسط و لحظه‌ای

* خواندیم دیگه!

۷۴. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چه قدر بیشتر است؟ (ریاضی ۹۸)

۰/۲۵ (۴)

۰/۲۰ (۳)

۰/۱۵ (۲)

۰/۱۰ (۱)

۷۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه‌ی $x=1$ با رشد متغیر $\frac{0}{21}$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه چه قدر کمتر است؟ (تجربی ۹۴)

نمو تغییر
 Δx
 h

$\frac{2}{21}$ (۴)

$\frac{3}{42}$ (۳)

$\frac{1}{21}$ (۲)

$\frac{1}{42}$ (۱)

۷۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چه قدر کم تر است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

(ریاضی خارج ۹۸)



۰/۰۶ (۴)

۰/۰۵ (۳)

۰/۰۴ (۲)

۰/۰۳ (۱)

۷۷. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی $[1, 4]$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

(تجربی ۹۸)



۰/۷۵ (۴)

۰/۴۵ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)



۷۸. با فرض $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1 \\ 8x+1 & x < 1 \end{cases}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[-1, 9]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع

در $x=4$ بیشتر است؟

(IQ گاج)



۱ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

(IQ گاج)

۷۹. بیشترین مقدار آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = x^2(4-x)$ کدام است؟

۱۶ (۴)

$\frac{64}{3}$ (۳)

$\frac{16}{3}$ (۲)

۶۴ (۱)

۸۰. تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر نشان می‌دهد که در آن x تعداد ماه‌های پس از تولد است. آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه زمانی $[0, 64]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر قد او در ۴۹ ماهگی اش

بیشتر است؟

(کتاب درسی)



$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{7}{8}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

۸۱. یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = 4\sqrt[3]{t} + t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در

لحظه‌ای $t=8$ کدام است؟

(کتاب درسی)



$\frac{49}{3}$ (۴)

$\frac{50}{3}$ (۳)

۱۶ (۲)

$\frac{47}{3}$ (۱)



۸۲. در تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 17}$ آهنگ متوسط تغییر از $x = 1$ تا $x = 1+h$ برابر $\frac{1}{3}$ است. آهنگ لحظه‌ای تغییر

(IQ گاج)

در $f(x)$ در $x = h$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (۱)$$

۸۳. تعداد افرادی که به بیماری کرونا مبتلا می‌شوند از رابطه‌ی $f(t) = t^3 + 4t - 2$ به دست می‌آید که در آن t بر حسب روز است. پس از چند روز، آهنگ لحظه‌ای تغییر انتقال این ویروس ۳۰۴ نفر است؟

(IQ گاج)

$$۱۲ \quad (۴)$$

$$۲۰ \quad (۳)$$

$$۱۰ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

۸۴. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 5$ برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \alpha$ است.

(تجربی قارج ۹۰)

 α کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۱ + \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$۲/۵ \quad (۱)$$

۸۵. آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه‌ی $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام

(ریاضی ۹۹)

مقدار x است؟

$$۲ + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$۲ + \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$۳ + ۲\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$۴ + \sqrt{2} \quad (۱)$$



۸۶. برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - mx^2 - 2$ در بازه‌ی $0 \leq x \leq 3$ تفاضل آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{1}{4}$ برابر $0/25$ است. مقدار m کدام است؟ (IQ گاج)

- (۱) $\frac{13}{12}$ (۲) $\frac{14}{17}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۷. معادله‌ی حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟ (کتاب درسی)

- (۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) $3/5$ (۴) ۴

سرعت!:



نکته: آهنگ متوسط در تابع درجه دو:



۸۸. خودرویی در امتداد یک خط راست طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت متوسط این خودرو در بازه‌ی زمانی $[1, 2]$ چقدر از سرعت لحظه‌ای آن در لحظه‌ی $t = 1/5$ بیشتر است؟ (کتاب درسی)

- (۱) صفر (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

۸۹. در تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ تفاضل آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = a + \frac{b}{4}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی x از a به عدد $a + b$ می‌رسد، کدام است؟ (IQ گاج)

- (۱) a (۲) $a + b$ (۳) b (۴) صفر



۹۰. خودرویی در امتداد یک خط راست طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت متوسط این خودرو در بازه‌ی زمانی $[1, 4]$ چند متر بر ثانیه است؟

(کتاب درسی)

۸/۵ (۴)

۸ (۳)

۷/۵ (۲)

۶/۵ (۱)

۹۱. گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه‌ی $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در

ظرف پس از t ثانیه از رابطه‌ی $V = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید، آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه‌ی زمانی $[0, 1]$

(کتاب درسی)

چقدر است؟

-۰/۰۱۹۹ (۴)

۰/۰۱۹۹ (۳)

-۰/۷۹۶ (۲)

۰/۷۹۶ (۱)



۹۲. اگر $f(x) = \frac{1}{2}x(3 - 2x)$ باشد، آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ وقتی از نقطه‌ای به طول $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ به اندازه‌ی

(IQ کج)

$\sqrt{3}$ به جلو می‌رویم، چقدر است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$-\frac{5}{2}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

۹۳. جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از

(کتاب درسی)

معادله‌ی $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید.

(الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین به ترتیب چند متر بر ثانیه است؟

(ب) سرعت جسم در چه لحظه‌ای $35 \frac{m}{s}$ است؟

(ج) سرعت متوسط جسم در ۲ ثانیه‌ی سوم چند متر بر ثانیه است؟



۹۴. نسبت آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم یک کره به آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت کره وقتی شعاع آن $r = 2$ است، کدام می‌باشد؟

(IQ کج)

- ۴ (۱)
- $\frac{1}{2}$ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

۹۵. آهنگ تغییرات محیط یک دایره نسبت به مساحت آن در لحظه‌ای که محیط برابر 6π است، کدام است؟

(نردبام ۴ فیلی سبز)

- ۱ (۱)
- $\frac{1}{3}$ (۲)
- $\frac{1}{2}$ (۳)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

۹۶. نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است و T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه‌ی $x=7$ کدام است؟

(تهری فارج ۱۴)

- ۱۵ (۱)
- $\frac{15}{8}$ (۲)
- $\frac{3}{7}$ (۳)
- $\frac{5}{7}$ (۴)

۹۷. نقطه‌ی $M(x,y)$ را روی منحنی $y = x^2 - x$ انتخاب می‌کنیم. اگر تصویر این نقطه روی محور y ها را A بنامیم، آهنگ تغییر مساحت مثلث OAM نسبت به x ($x > 0$) در لحظه‌ای که $x=3$ است، کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

(نردبام ۴ فیلی سبز)

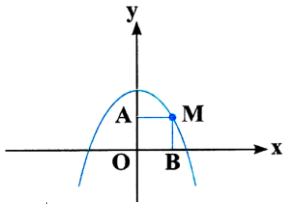
- ۱۰/۵ (۱)
- ۲۱ (۲)
- ۱۳ (۳)
- ۳۶ (۴)



۹۸. نقطه‌ی M روی منحنی $f(x) = -x^2 + 4$ قرار دارد. آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت مستطیل OAMB وقتی

(۱Q گاج)

$x = \frac{1}{3}$ می‌باشد، کدام است؟



(۱) $\frac{11}{3}$

(۲) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{25}{9}$

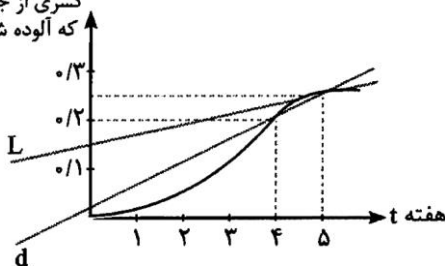
(۴) $\frac{22}{9}$

۹۹. کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله‌ی یک ویروس آلوده شده‌اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان

(کتاب درسی)

داده شده است. شیب خطوط L و d به ترتیب نشان‌دهنده‌ی چیست؟

کسری از جمعیت که آلوده شده‌اند



(۱) گسترش آلودگی در هر لحظه، میزان تغییرات آلودگی در یک هفته

(۲) گسترش آلودگی در لحظه‌ی $t = 5$ ، میزان تغییرات آلودگی در یک هفته

(۳) میزان تغییرات آلودگی، گسترش آلودگی

(۴) گسترش آلودگی در لحظه‌ی $t = 5$ ، گسترش آلودگی در هر لحظه

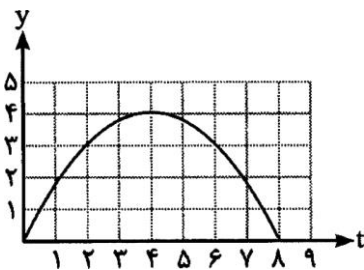
۱۰۰. نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه‌ی t نمایش می‌دهد. بزرگ‌ترین مقدار در کدام گزینه آمده است؟ (کتاب درسی)

B: سرعت متوسط در بازه‌ی [۵, ۶]

A: سرعت متوسط در بازه‌ی [۱, ۳]

D: سرعت لحظه‌ای در $t = 6$

C: سرعت لحظه‌ای در $t = 1$



D (۴)

C (۳)

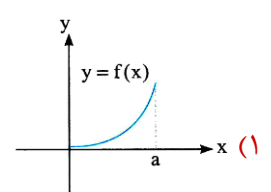
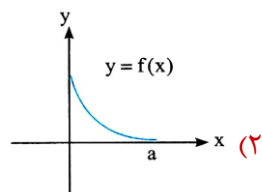
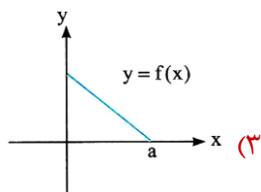
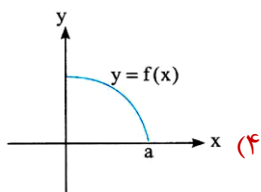
B (۲)

A (۱)

۱۰۱. در کدام تابع زیر، آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی [۰, a] از آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{a}{10}$ کمتر

(کتاب درسی)

است؟





۱۰۲. خودرویی در امتداد یک خط مستقیم طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت متوسط این خودرو در کدام بازه به سرعت آن در لحظه‌ی $t = 1s$ نزدیک‌تر است؟

(کتاب درسی)

(۴) $[1, 1/2]$

(۳) $[1, 1/0.2]$

(۲) $[1, 1/0.3]$

(۱) $[1, 1/3]$

۱۰۳. تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهنده‌ی فاصله‌ی توپ از سطح زمین در لحظه‌ی t است. با توجه به جدول زیر، کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان 0.4 ثانیه است، نشان دهد؟

(کتاب درسی)

t (ثانیه)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
f(t) (متر)	11	12.4	13.8	15.1	16.3	17.4	18.4

(۴) $16.03 \frac{m}{s}$

(۳) $11.5 \frac{m}{s}$

(۲) $14.91 \frac{m}{s}$

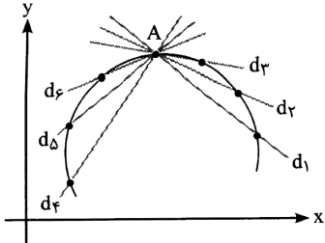
(۱) $12.3 \frac{m}{s}$



شیب خط واصل و شیب خط مماس بر منحنی

* خونديم ديگه!

(کتاب درسی)

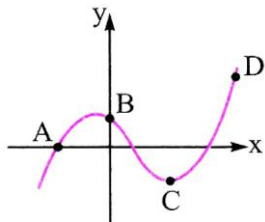


۱۰۴. با توجه به شکل زیر، شیب کدام خط از همه کمتر است؟

- (۱) d_1
- (۲) d_2
- (۳) d_3
- (۴) d_4

۱۰۵. نمودار تابع مشتق پذیر f به صورت روبه‌رو است. اگر m شیب خط مماس در هر نقطه باشد، کدام گزینه درست است؟

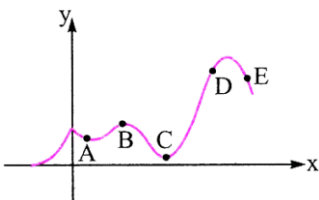
(نردبام ۴ فیلی سبز)



- (۱) $m_D > m_A > m_B > m_C$
- (۲) $m_D > m_A > m_C > m_B$
- (۳) $m_A > m_C > m_B > m_D$
- (۴) $m_A > m_C > m_D > m_B$

۱۰۶. تابع f با نمودار زیر مفروض است. کدام یک از جدول‌های زیر در مورد مقدار شیب خط مماس در نقاط مشخص شده روی شکل می‌تواند صحیح باشد؟

(نردبام ۴ فیلی سبز)



نقطه	A	B	D	E
شیب	$-\frac{1}{2}$	۱	۲	-۱

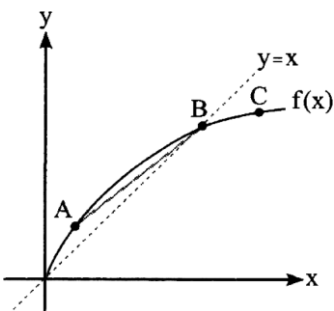
نقطه	A	B	C	D
شیب	۲	۳	۱	۴

نقطه	A	C	D	E
شیب	$-\frac{1}{2}$	۰	۲	-۱

نقطه	B	C	D	E
شیب	$\frac{1}{2}$	۰	۲	-۳

(کتاب درسی)

۱۰۷. برای نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر، کدام مقایسه بین مقادیر داده شده درست است؟



- m_1 : شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی A
- m_2 : شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی B
- m_3 : شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی C
- m_4 : شیب خط گذرا از نقاط A و B
- m_5 : شیب خط $y = 2$
- m_6 : شیب خط $y = x$

- (۲) $m_1 > m_6 > m_4 > m_2 > m_3 > m_5$
- (۴) $m_6 > m_4 > m_1 > m_2 > m_3 > m_5$
- (۱) $m_1 > m_2 > m_6 > m_4 > m_3 > m_5$
- (۳) $m_6 > m_1 > m_2 > m_4 > m_3 > m_5$





۱۰۸. نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس آن را ۲ واحد به سمت راست می‌بریم. تابع ایجاد شده را $f(x)$ می‌نامیم. کدام گزینه صحیح است؟

(IQ گاج)

- (۱) $f'(-2) < f'(-1) < f'(1)$
- (۲) $f'(-1) > f'(1) > f'(-2)$
- (۳) $|f'(1)| > |f'(-1)| > |f'(-2)|$
- (۴) $|f'(1)| < |f'(-2)| < |f'(-1)|$

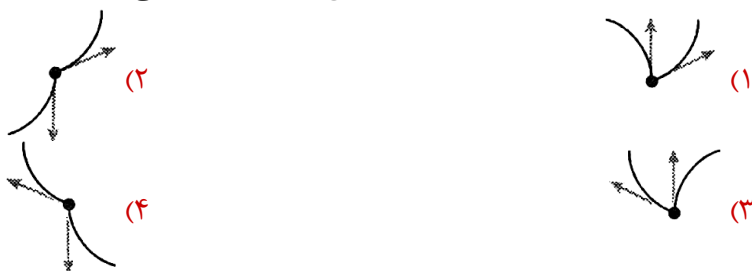
۱۰۹. کدام یک از مقادیر $m_1 = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5}$ ، $m_2 = \frac{f(5/2) - f(5)}{5/2 - 5}$ ، $m_3 = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5}$ به مقدار شیب خط مماس بر منحنی f در $x = 5$ نزدیک‌تر است؟

(کتاب درسی)

- (۱) m_1
- (۲) m_2
- (۳) m_3
- (۴) هر سه می‌توانند انتخاب شوند.

۱۱۰. با توجه به جدول زیر، نمودار تابع f در همسایگی $x = -1$ به کدام شکل شبیه است؟

x	-۱/۰۰۰۰۱	-۱	-۰/۹۹۹۹۹
$f(x)$	۲۰	۰	۰/۰۰۰۰۱



۱۱۱. دو نقطه‌ی $A(1, 5)$ و $B(1/0.1, 5/120902)$ روی منحنی تابع $f(x) = 2x^3 + 2x^2$ قرار دارند. شیب خط قاطع

(مهرماه)

گذرنده از دو نقطه‌ی A و B تقریباً کدام است؟

- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۳

۱۱۲. دو نقطه به طول‌های ۴ و $4+h$ بر روی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x+5}$ انتخاب می‌کنیم. شیب خط

(نردبان فیلی سبز)

گذرنده بر دو نقطه وقتی $h \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) ۶



۱۱۳. شیب خط قاطعی که دو نقطه به طول‌های x و $x+2$ از تابع $f(x)$ را به هم وصل می‌کند از رابطه‌ی $-x+1$ به دست می‌آید. با فرض آن که $f(0)=1$ است، $f(4)$ کدام است؟ $(D_f = \mathbb{R})$ (IQ گاج)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱ (۴)

(معمروماه)



۱۱۴. شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{6x+2}$ در نقطه‌ای به طول ۱، واقع بر آن چقدر است؟
تائزانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

- ۲ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)



۱۱۵. شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ در کدام بازه، منفی است؟

- (۱) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ (۲) $(1, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{1}{3})$
(۳) $(-\frac{1}{3}, 1)$ (۴) $(\frac{1}{3}, 1)$

(معمروماه)

۱۱۶. شیب نیم‌مماس راست بر منحنی تابع $y = \frac{|1-x^2|\sqrt{2-x}}{x^2+1}$ در نقطه‌ای به طول -1 کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $-2\sqrt{3}$

* زاویه‌ی بین نیم‌مماس‌های چپ و راست؟



۱۱۷. تابع $f(x) = x^2 + 1$ مفروض است. شیب خط مماس بر منحنی تابع $g(x) = (f \circ f)(x)$ در نقطه به طول $x=1$ روی منحنی کدام است؟

(IQ کج)



۲۰ (۴)

۸ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

۱۱۸. مشتق تابع $y = f(\sqrt{6x+3})$ در $x=1$ برابر با -4 است. شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول 3 ، واقع بر آن کدام است؟

 $-\frac{1}{4}$ (۴) -4 (۳) $\frac{1}{4}$ (۲)

۴ (۱)

۱۱۹. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول 2 واقع بر آن، کدام است؟

(تربیی خارج ۱۴۰۰)

 -12 (۴) -8 (۳)

۸ (۲)

۱۲ (۱)

۱۲۰. از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر زاویه‌ی حاده‌ی بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$ ، کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

 $\frac{240}{289}$ (۴) $\frac{225}{289}$ (۳) $\frac{8}{15}$ (۲) $\frac{7}{15}$ (۱)



(کتاب درسی)

۱۲۱. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 10x$ در نقطه‌ای به طول ۳، واقع بر آن کدام است؟

$y = -4x + 9$ (۴)

$y = 4x + 9$ (۳)

$y = -4x - 9$ (۲)

$y = 4x - 9$ (۱)

زنگ باش

(کتاب درسی)

۱۲۲. معادله نیم‌مماس با شیب مثبت بر منحنی $y = |1 - x^2|$ در نقطه‌ای به طول ۱- کدام است؟

$y = -2x + 2$ (۴)

$y = 2x + 3$ (۳)

$y = 2x - 2$ (۲)

$y = 2x + 2$ (۱)

۱۲۳. خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع

(ریاضی ۹۹)

می‌کند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

۱۲۴. خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ ، با بیشترین شیب ممکن، محور y ها را با کدام عرض، قطع

(ریاضی خارج ۹۷)

می‌کند؟

$-\frac{8}{3}$ (۴)

$-\frac{7}{3}$ (۳)

$-\frac{5}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)



۱۲۵. اگر $f(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt{x}$ باشند، خط مماس بر منحنی تابع $y = f'g + g'f$ در $x=1$ با چه طولی محور x ها را قطع می کند؟ (۱۰گج)

$-\frac{4}{3}$ (۴)

$-\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۲۶. خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - x^2$ در نقطه $x=1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه دیگری مانند A قطع می کند. عرض نقطه A کدام است؟ (تقریبی خارج ۱۷)



۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

۱۲۷. خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x=0$ رسم می کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲)

صفر (۱)

ترفند!



۱۲۸. مجموع طول نقاطی از منحنی $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x + 1$ که خط مماس در آن‌ها موازی محور x هاست، چند عضو دارد؟

(نردبانی فیلی سبز)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۹. خط مماس بر سهمی $y = 3x^2 - 5x + 1$ در کدام نقطه از آن موازی با خط $y + 2x = 3$ است؟

(مهر و ماه)

- (۱) $(\frac{1}{2}, \frac{-3}{4})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{17}{4})$ (۳) $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$

۱۳۰. نقاط A و B به طول ۱ و ۴ بر نمودار تابع $y = x + \sqrt{x}$ واقع‌اند. مماس در کدام نقطه موازی وتر AB است؟

(IQ کج)

- (۱) $(9, 12)$ (۲) $(\frac{9}{4}, \frac{15}{4})$ (۳) $(0, 0)$ (۴) $(\frac{3}{7}, \frac{28}{9})$

۱۳۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه‌ی $[0, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و

(تجربی خارج ۹۸)

انتهای منحنی را به هم وصل کند، این خط مماس محور y ‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) -۱ (۴) -۵/۰

۱۳۲. معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x) = x^3 - x - 1$ در نقطه‌ای با کدام طول بر خط $x + 2y = 3$ عمود

(نردبانی فیلی سبز)

است؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) $\pm \sqrt{3}$ (۴) $\pm \sqrt{2}$



۱۳۳. خطی که بر خط مماس بر تابع $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ در $x=1$ ، در نقطه تماس عمود است. محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟ (نردبام ۴ فیلی سبز)

$$\frac{121}{96} \quad (4)$$

$$\frac{121}{48} \quad (3)$$

$$\frac{132}{96} \quad (2)$$

$$\frac{132}{48} \quad (1)$$

۱۳۴. اگر خط مماس بر منحنی تابع $y = f(2x+1)$ در $x=2$ بر خط $4y+x=1$ عمود باشد، شیب خط مماس در منحنی تابع $y = f(x^2+1)$ در $x=2$ کدام است؟ (نردبام ۴ فیلی سبز)

$$2 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

۱۳۵. بر منحنی تابع $y = \frac{\sqrt{3}x}{1+x}$ دو خط مماس با جهت مثبت محور xها زاویه 60° می‌سازند رسم شده است. فاصله دو خط مماس چقدر است؟ (IQ گاج)

$$4 \quad (4)$$

$$4\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$



۱۳۶. به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $(m+2)y = mx$ ، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{1+x^2}$ است؟
(ریاضی ۹۵)

- (۱) $m > -1$ (۲) $m < -1$ (۳) $m > 1$ (۴) $m < 1$

یادآوری فاصله دو خط موازی:



۱۳۷. خط گذرا از دو نقطه به طول‌های ۱ و $-\frac{1}{2}$ واقع بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{x^2}$ ، در نقطه‌ای با کدام طول بر این منحنی مماس است؟
(ریاضی خارج ۹۰)

- (۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) نشدنی

۱۳۸. خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه‌ی $(-1, 0)$ می‌گذرد.
(ریاضی خارج ۸۷)

مقدار α کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2



۱۳۹. نمودارهای دو تابع $f(x) = x - \sqrt{x+3}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول ۱ برهم مماس‌اند. مقدار a کدام

مماس مشترک دارند

است؟

$$-\frac{5}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

مماس بودن دو منحنی برهم:



۱۴۰. فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه‌ی مشترک، بر یک خط مماس باشند.

(ریاضی قارج ۹۹)

اگر طول نقطه‌ی مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟



$$۱۲ \quad (۴)$$

$$۱۰ \quad (۳)$$

$$۹ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

۱۴۱. خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ ، مشترک‌اند.

(تجربی قارج ۹۹)

مقدار b ، کدام است؟



$$۷ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$



۱۴۲. به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $y = x + m$ بر منحنی تابع به معادله $y = x^3 - 2x - 1$ مماس است؟ (IQ کج)

- (۱) $1, -2$ (۲) $1, 3$ (۳) $-2, 3$ (۴) $1, -3$

۱۴۳. خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و -1 از منحنی به معادله $y = x^3 + ax^2 + 2x$ را به هم وصل می‌کند، بر این منحنی مماس است. a کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

- (۱) $-1, 1$ (۲) $2, 1$ (۳) $-1, 2$ (۴) $-2, 1$

۱۴۴. به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ ، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟ (تجربی فارغ ۹۷)

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

حالت خاص مماس بودن دو منحنی بر هم: درجه دو:



۱۴۵. به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = ax^2 + 4x$ بر هم مماس‌اند؟ (تجربی ۹۱)



- (۱) -4 (۲) -3 (۳) -2 (۴) -1



۱۴۶. به ازای کدام مقدار m ، نمودار $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است؟

(تقریبی قارج ۹۳)

۱۲ (۴)

۱۲ یا -۴ (۳)

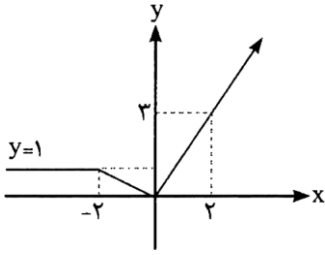
-۱۲ یا ۴ (۲)

-۴ (۱)

خطرا!



۱۴۷. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، حاصل $f'(-3) + f'(4)$ کدام است؟

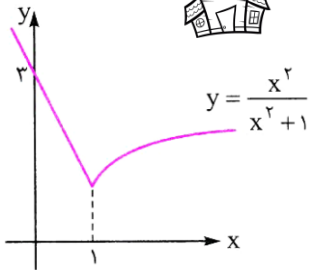


- (۱) ۱
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $-\frac{1}{2}$

(نردبام فیلی سبز)



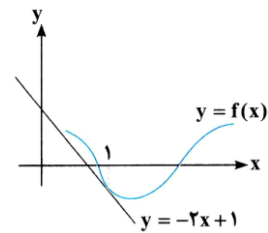
۱۴۸. نمودار تابع دو ضابطه‌ای f ، به صورت مقابل است. حاصل $f'_-(1) + f'_+(1)$ کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) ۳
- (۴) -۳

(IQ گاج)

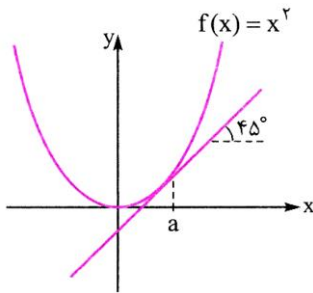
۱۴۹. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. مشتق تابع $y = \sqrt{-f(x)}$ در $x=1$ کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) -۲
- (۴) ۲

(قلم پی ۹۹)

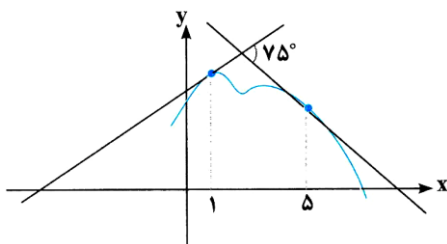
۱۵۰. با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $f(a) + f'(a)$ کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{5}{4}$

(IQ گاج)

۱۵۱. شکل مقابل، نمودار $f(x)$ است. اگر در این شکل $f'(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار $f'(5)$ کدام است؟



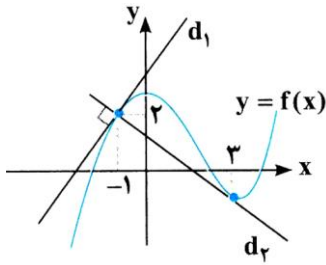
- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) $\sqrt{3}$
- (۴) $-\sqrt{3}$



۱۵۲. خطوط d_1 و d_2 در نقاط $x=3$ و $x=-1$ بر منحنی $y=f(x)$ مماس هستند. اگر $f'(-1)+f'(3)=\frac{3}{2}$ باشد،

(IQ کج)

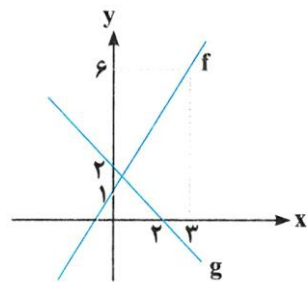
خط d_1 با چه طولی محور طولها را قطع می‌کند؟



- (۱) $-1/5$
- (۲) -2
- (۳) $-2/5$
- (۴) -3

۱۵۳. اگر نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت مقابل باشند، حاصل $(2f-g)'(2)$ کدام است؟

(IQ کج)

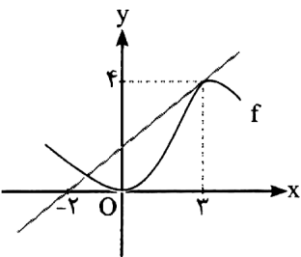


- (۱) $\frac{7}{13}$
- (۲) $\frac{16}{13}$
- (۳) $\frac{14}{3}$
- (۴) $\frac{4}{3}$

۱۵۴. شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ را نمایش می‌دهد. اگر $g(x)=\frac{x^2+1}{f(x)}$ باشد، آنگاه حاصل $g'(3)+f'(0)$ کدام

(معروماه)

است؟

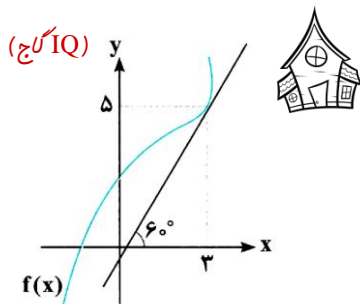


- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴) -۲

۱۵۵. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $g(x)=\frac{4x}{f(x)}$ مشتق تابع $g(x)$ در $x=3$ به صورت $\frac{a-b\sqrt{3}}{25}$ می‌باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

(IQ کج)

می‌باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

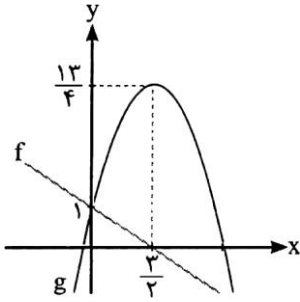


- (۱) ۳۲
- (۲) ۱۸
- (۳) ۸
- (۴) -۲۴



(موروماه)

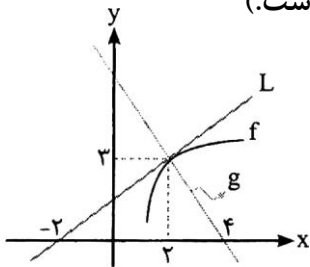
۱۵۶. نمودار خط f و سهمی g مطابق شکل روبه‌روست. مقدار $(f \cdot g)'(1)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{5}{3}$
- (۲) $-\frac{5}{3}$
- (۳) $\frac{7}{3}$
- (۴) $-\frac{7}{3}$



۱۵۷. اگر $h(x) = g(f(x))$ باشد، حاصل $h'(2)$ کدام است؟ (خط L بر نمودار تابع f مماس است.)

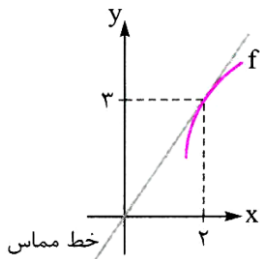


- (۱) صفر
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{9}{8}$
- (۴) $\frac{3}{4}$



(نردباز ۴ فیلی سبز)

۱۵۸. با توجه به شکل مقابل، شیب خط مماس بر منحنی $y = f^2(\sqrt{2x})$ در $x = 2$ کدام است؟

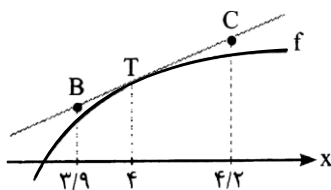


- (۱) $4/5$
- (۲) 9
- (۳) 2
- (۴) $2/5$

۱۵۹. برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل، مجموع عرض نقاط B و C چقدر

(کتاب درسی)

است؟



- (۱) $31/15$
- (۲) $31/25$
- (۳) $50/15$
- (۴) $50/25$



تعریف مشتق

$$* \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \checkmark$$

$$* \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \times$$

$$۱۶۰) \lim_{x \rightarrow ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} =$$

$$۱۶۱) \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{f(x) - ۲}{x} =$$

$$۱۶۲) \lim_{x \rightarrow -۲} \frac{f(x) - f(-۲)}{۲x + ۴} =$$

$$۱۶۳) \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x^۲ - ۱} =$$

(IQ آگاج)

$$۱۶۴) \lim_{x \rightarrow -۱} \frac{f^۲(x) - f^۲(-۱)}{x^۲ - ۱} =$$

(نردبام ۳ فیلی سبز)

$$۱۶۵) \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x^۳ + x - ۱} =$$

(نردبام ۳ فیلی سبز)

$$۱۶۶) \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f'(x) + ۲}{x - ۱} =$$

(نردبام ۳ فیلی سبز)



$$۱۶۷) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - f(2)}{x - 1} = (?) \left(? \right)'$$

↓
↓
↓

$$۱۶۸) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$۱۶۹) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta) - f(\Delta + \Delta x)}{2\Delta x} =$$

$$۱۷۰) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-2h)}{4h} =$$

$$۱۷۱) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-1) - f(2h-1)}{\Delta h} =$$



$$۱۷۲) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{2h} =$$

(IQ کج)

$$۱۷۳) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 2}{h} =$$

$$۱۷۴) \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -6 + h \rightarrow$$

$$۱۷۵) f(\Delta+h) - f(\Delta) = 2h^2 - 4h \rightarrow$$

$$۱۷۶) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(1+h) - f''(1)}{h} =$$

(IQ کج)



$$۱۷۷) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$۱۷۸) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{f'(2) - f'(2+h)} \rightarrow$$

$$۱۷۹) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} =$$

تعیین راست و چپ تعریف مشتق:



$$۱۸۰) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4) - f(4 - 2h)}{h} =$$

$$۱۸۱) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a - h) - f(a)}{h} =$$



$$۱۸۲) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2 - h) - f(2 + h)}{2h} =$$

ترفند!



$$۱۸۳) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h^2) + f(2+h^2) - 4}{h^2} =$$

تذکرا تعریف مشتق:

$$۱۸۴) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f^2(\lambda-a) - 2f(\lambda-a) + 2}{a^2 - \lambda a} =$$

(IQ گاج)

(ریاضی ۸)

$$۱۸۵) \text{ اگر } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = ۱۲ \text{ باشد، کدام } k \text{ است؟}$$

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(ریاضی ۱۹)

$$۱۸۶) \text{ مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی } f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \text{ در نقطه‌ی } x = 0 \text{ کدام است؟}$$

 $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

تذکرا ۲ تعریف مشتق:



ترکیبی پرو!

(نردبام ۴ فیلی سبز)

۱۸۷. اگر $x^2 - 2x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2x-h) - f(2x)}{h}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2) - f(x)}{x-2}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) ۱

(IQ گاج)

۱۸۸. اگر $f'(2) = 5$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+2h) - f^2(2-h)}{(h^2 - h)f(2)}$ کدام است؟

(۱) -۴۰ (۲) -۲۰ (۳) ۴۰ (۴) ۲۰

(IQ گاج)

۱۸۹. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 4} = 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$ کدام است؟ (f در $x=2$ مشتق دارد.)

(۱) ۱ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) -۸

(نردبام ۴ فیلی سبز)

۱۹۰. اگر f تابعی پیوسته و $f'(2) = -f(2) = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4f(x)} + 2}{x-2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$



تمرین

۱۹۱. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

$\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{7}{12}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۱)

۱۹۲. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4} + h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

4 (۴) 3 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

۱۹۳. در تابع با ضابطه $f(x) = (\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

15 (۴) 12 (۳) -18 (۲) -21 (۱)

۱۹۴. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x]} + |x|$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۷)

$\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)



(ریاضی قاج ۹۷)

۱۹۵. اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

(ریاضی ۹۲)

۱۹۶. اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -3 (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۱۹۷. اگر تابع f در $x = -2$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟

(ریاضی قاج ۹۶)

- (۱) 8 (۲) 10 (۳) 12 (۴) 14

۱۹۸. تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

(ریاضی قاج ۹۵)

- (۱) $2/5$ (۲) 3 (۳) $3/5$ (۴) 4



۱۹۹. اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۰۰. اگر $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{2x - 10} = -\frac{1}{6}$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{|x| + 13})$ در نقطه $x = -12$ کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

- (۱) $\frac{1}{30}$ (۲) $\frac{1}{15}$ (۳) $-\frac{1}{30}$ (۴) $-\frac{1}{15}$

۲۰۱. اگر $g(1) = g'(1) = 1$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{2h} = -\frac{1}{6}$ باشند، مقدار مشتق تابع $f(x + g^2(x))$ در $x = 1$ کدام است؟ (IQ گج)

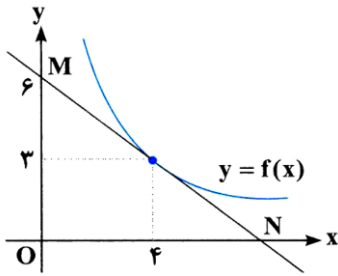
- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۳

۲۰۲. اگر تابع f در $x = 4$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$



۲۰۳. در شکل مقابل، مساحت مثلث MNO برابر ۲۴ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - 9}{x - 4}$ کدام است؟ (۱۰ کج)



$$\frac{9}{4} \quad (1)$$

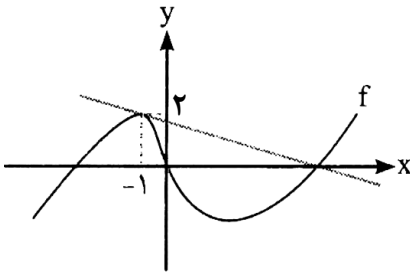
$$-\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{9}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{9}{2} \quad (4)$$

۲۰۴. شکل زیر، نمایش تابع $f(x)$ است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -\frac{2}{3}$ ، آن گاه نمودار تابع f محور x ها را در

سمت راست مبدأ مختصات با کدام طول قطع می کند؟



$$\frac{8}{9} \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۲۰۵. اگر نیمساز ناحیه اول مختصات بر نمودار تابع f در نقطه $x=1$ مماس باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\frac{x}{2}) - 1}{x}$ کدام است؟

(تخمینی ۹۹)

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$



۲۰۶. خط به معادله‌ی $y = 3x - 2$ در $x_0 = 2$ بر منحنی پیوسته‌ی $y = f(x)$ مماس است. حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2} \text{ کدام است؟}$$

(ریاضی ۹۵)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۲۰۷. خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = 3$ مماس است. حد

$$\text{عبارت } \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} \text{ وقتی } x \rightarrow 3 \text{ کدام می‌تواند باشد؟}$$

(ریاضی خارج ۹۳)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۲۰۸. خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی $A(-2, 1)$ در همین نقطه بر $ax + 3y = 5$ عمود است. حاصل

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-2) - 1}{h^2 + 2h} \text{ کدام است؟}$$

(نردباز ۴ فیلی سبز)

$\frac{1}{6}$ (۴)

$-\frac{1}{6}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۲۰۹. خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در نقطه‌ی $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$

باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۸)

۴ (۴)

۳ (۳)

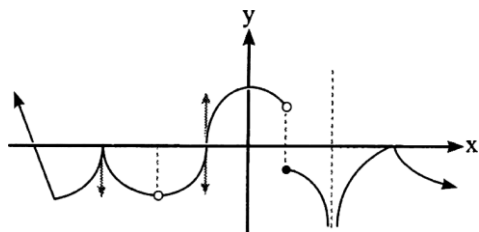
۲ (۲)

۱ (۱)



مشتق ناپذیرها

۲۱۰. شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ را نمایش می‌دهد. تابع f در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟



۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

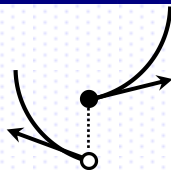
* در چند نقطه از دامنه‌اش؟

نتیجه ۱: اگر تابع در نقطه‌ای ناپیوسته باشد \leftarrow مشتق ناپذیر

ولی! ...

نتیجه ۲:

۱- ناپیوسته‌ها:



(الف) توابع با محدودیت دامنه:

\leftarrow در نقاطی که عضو دامنه نیستند \leftarrow ناپیوسته \leftarrow مشتق ناپذیر

(ب) توابع براکتی:

\leftarrow در نقاطی که داخل براکت را صحیح می‌کنند \leftarrow ناپیوسته \leftarrow مشتق ناپذیر \leftarrow ترمیم

۲- نقاط گوشه یا زاویه دار (عدم برابری مشتقات چپ و راست):

(الف) توابع چند ضابطه:



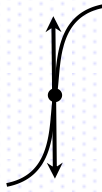
\leftarrow ناپیوسته \leftarrow مشتق ناپذیر } در نقاط لب مرز، اگر }
 \leftarrow پیوسته \leftarrow بررسی مشتقات چپ و راست

(ب) توابع قدر مطلق:

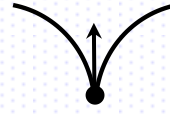
\leftarrow در نقاطی که ریشه‌ی ساده داخل قدر مطلق هستند \leftarrow مشتق ناپذیر \leftarrow ترمیم



۳- نقاط بازگشت یا عطف قائم (∞ شدن مشتق):



$$\left\{ \begin{array}{l} f'_+ = \\ f'_- = \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} f'_+ = \\ f'_- = \end{array} \right.$$

* توابع رادیکالی:



در نقاطی که ریشه‌های زیر رادیکالند و توانشان از فرجه کمتر است ← مشتق ناپذیر

مثال:

$$\sqrt{x} :$$

$$\sqrt{x^2} :$$

$$\sqrt{x^3} :$$

$$\sqrt{x^4} :$$

$$\sqrt{x^4} :$$

مثال: مطلوبست نقاط مشتق ناپذیر توابع زیر؟

یا

دامنه‌ی مشتق توابع زیر شامل چه نقاطی نیست؟

$$211) y = \frac{x^2 + x}{x^3 - x}$$

(نردبام فیلی سبز)

خطر!

$$212) y = x^2(x-1) [x] \quad [-1, 4]$$

مشتق پذیری در سروته بازه:

مثل:



$$۲۱۳) y = [\sqrt{x}] \quad (0, 20)$$

(نردبام فیلی سبز)

$$۲۱۴) y = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$۲۱۵) y = \begin{cases} 2x+1 & x \leq -1 \\ -x^2 & -1 < x < 1 \\ 3x & 1 \leq x \end{cases}$$

$$۲۱۶) y = |(x-3)^2(x+4)(x-5)^3|$$

$$۲۱۷) y = |x^4 - x^2| \quad (-2, 0)$$

$$۲۱۸) y = (x-2)|x^2 - 5x + 6|$$

$$۲۱۹) y = x\sqrt{x^2}$$

(ریاضی ۱۷)

$$۲۲۰) y = ||x| - 1|$$

(کتاب درسی)



$$۲۲۱) y = |x^2 - 3|x||$$

(IQ گاج)

$$۲۲۲) y = \sqrt[5]{(x-1)(x-2)^2(x-4)^3(x+5)^5(x-6)^7}$$

$$۲۲۳) y = \sqrt[3]{x^3 - 2x} \quad (-1, 4)$$

$$۲۲۴) y = \sqrt{1-x^2}$$

فرجه زوج، محدودیت دامنه هم دارد!

$$۲۲۵) y = \sqrt{1 - \sqrt{1-x} - x}$$

(IQ گاج)

$$۲۲۶) y = \sqrt[5]{x-1} + |x+2|$$

$$۲۲۷) y = \sqrt[3]{x^2} |3x-1|$$

$$۲۲۸) y = \sqrt{|x|+1}$$

(IQ گاج)



(ریاضی ۹۱)

۲۲۹. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [\frac{1}{x}]$ در کدام بازه مشتق پذیر است؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1)$

(معروماه)

۲۳۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x-1)[x]$ در کدام نقطه پیوسته است؛ ولی مشتق پذیر نیست؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۲۳۱. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (-1)^{[x]}(x^2 - 4x + 3)$ روی بازه‌ی $[0, 4]$ دارای چند نقطه‌ی

(نردباز ۴ فیلی سبز)

گوشه‌ای است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳۲. اگر تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)[\frac{x}{3}]$ در $x = 3$ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۱۵ (۴) -۱۵

(IQ گاج)

۲۳۳. اگر تابع $f(x) = (x^3 + ax^2 + b)[x]$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد، حاصل fab کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

(IQ گاج)

۲۳۴. اگر $f(x) = [2x^2]$ و $g(x) = x^3 + 1$ باشند، تابع $(g \circ f)(x)$ در کدام نقطه‌ی زیر مشتق ناپذیر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



۲۳۵. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ [\frac{x}{4}](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(2) - f'(5)$ کدام است؟ (ریاضی قارج ۹۹)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۳۶. برای تابع $f(x) = \begin{cases} 5x^3 - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) صفر (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) وجود ندارد.

۲۳۷. کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ درست است؟ (کتاب درسی)

- (۱) مشتق پذیر است. (۲) فقط مشتق راست دارد.
(۳) فقط مشتق چپ دارد. (۴) مشتق راست و چپ دارد ولی مشتق ندارد.

۲۳۸. در تابع $f(x) = \begin{cases} 6x + 5 & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 5 & x < 0 \end{cases}$ مقدار $f'_+(0) + f'_-(0)$ کدام است؟ (معروماه)

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) وجود ندارد.



۲۳۹. اگر زاویه‌ی بین نیم‌مماس چپ و راست تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| & x \geq 2 \\ 2 & \\ a\sqrt{x} & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ ، 90° باشند، مقدار a کدام است؟

(۱۰گزینه‌ای)

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

۲۴۰. هرگاه بدانیم $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & |x| \leq 1 \\ x^3 - 5x & |x| > 1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1-h) - 4}{2h}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 1 (۳) -6 (۴) وجود ندارد.



۲۴۱. با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & |x| < 2 \\ 2x^3 - 3 & |x| \geq 2 \end{cases}$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h-2) + 19}{h}$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد. (۲) -12 (۳) 24 (۴) 12

خطر!



۲۴۲. تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$$

در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c

(تجربی ۹۹)

کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

۲۴۳. تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$$

روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام

(تجربی ۹۸)

است؟



۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲۴۴. در تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^2 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$$

اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

(تجربی خارج ۹۸)



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۴۵. تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$$

در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است. $a + b$ کدام

(ریاضی ۹۸)

است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



(IQ کج)

۲۴۶. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2[x] + ax + b & x \geq 1 \\ ax^3[x] + 2bx & x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر باشد، مقدار ab کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۲۴۷. فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$ ، اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

(تجربی فارغ ۱۴۰۰)

 $\frac{15}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{15}{2}$ (۱)

۲۴۸. فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ ، $(a \neq 0)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد، اگر f یک تابع مشتق پذیر

(تجربی ۱۴۰۰)

باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{3}{4}$ (۱)



(کتاب درسی)

۲۴۹. ضابطه‌ی تابع مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq -1 \\ 1 & x = -1 \end{cases}$ کدام است؟

$$f'(x) = -2 \quad (۴) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases} \quad (۳) \quad f'(x) = 2x, x \neq -1 \quad (۲) \quad f'(x) = 2x \quad (۱)$$

(معمومه)

۲۵۰. تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ مشتق به کدام صورت است؟

$$f'(x) = \begin{cases} 10x & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 3 \quad (۲) \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 10x & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \quad (۱) \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 10x & x < 0 \\ 2 & 0 < x < 3 \quad (۴) \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 10x & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 3 \quad (۳) \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

۲۵۱. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که fog یا gof در آن‌ها

مشتق پذیر نیست، کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۰)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



(ریاضی فارغ ۱۵)

۲۵۲. تابع $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در $x = \alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) تعریف نشده

(IQ گاج)

۲۵۳. برای تابع f با ضابطه $f(x) = |x(x^2 - 3) + 2|$ در $x = 1$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) فقط مشتق چپ دارد. (۲) فقط مشتق راست دارد.
(۳) زاویه دار است. (۴) مشتق پذیر است.

(IQ گاج)

۲۵۴. در تابع $f(x) = |x^3 + ax^2 + bx + c|$ ، $f(2) = f(-1) = 0$ و $f(x)$ در $x = 2$ مشتق پذیر و در $x = -1$ مشتق ناپذیر است. حاصل $a - b - c$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۷ (۳) -۵ (۴) ۷

(IQ گاج)

۲۵۵. تابع $f(x) = |2x^2 + x - m|$ روی \mathbb{R} مشتق پذیر است. m کدام مقدار می تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{12}$



۲۵۶. تابع $f(x) = |\sin 2x|$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, k)$ در دو نقطه مشتق‌ناپذیر است. بیشترین مقدار k

(۱۰گزینه‌ای)

کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{3\pi}{4}$
- (۳) 2π
- (۴) π

۲۵۷. تابع $f(x) = ||x-1| + a - 2|$ تنها در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

(۱۰گزینه‌ای)

- (۱) ۱
- (۲) ۷
- (۳) -۴
- (۴) صفر

۲۵۸. اگر نیم‌مماس چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه‌ی گوشه‌ای آن عمود باشند، مجموعه

(ریاضی ۹۰)

مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$
- (۲) $\{1\}$
- (۳) $\{-1, 1\}$
- (۴) \emptyset

۲۵۹. در چند نقطه از منحنی $y = (x^2 - 1)|x^3 + 3x^2 + 2x|$ یک خط مماس کامل بر منحنی قابل رسم نیست؟

- (۱) سه
- (۲) دو
- (۳) یک
- (۴) چهار

۲۶۰. به ازای چه مقداری از a ، تابع $f(x) = (x+a)|x^2 - 2x|$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است؟

(معرفنامه)

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) -۲
- (۴) -۱



۲۶۱. تابع $f(x) = (2x^2 + ax + b)|x^2 - 3x + 2|$ در بازه $(0, 3)$ مشتق پذیر است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) -۶

۲۶۲. تابع $f(x) = (x-a)|x(x-1)(x-2)|$ مفروض است. مقدار a کدام باشد تا $f(x)$ در دو نقطه مشتق ناپذیر باشد؟ (IQ کلاچ)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار a

۲۶۳. به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = |x^2 - 1| + a|x^3 - x|$ تنها در یک نقطه مشتق ناپذیر است؟ (نردبان ۴ فیلی سبز)

- (۱) \mathbb{R} (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) \emptyset

۲۶۴. اگر $f(x) = 1 - |x|$ تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع با ضابطه $y = f(f(x))$ کدام است؟ (ریاضی قارچ ۸۸)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۶۵. دو تابع با ضابطه های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار a تابع $g \circ f$ در

مبدأ مختصات مشتق پذیر است؟

(ریاضی قارچ ۹۳)

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a



۲۶۶. تابع $y = \sqrt{x-1}$ در $x=1$
(معروماه)

- (۱) خط مماس دارد؛ ولی مشتق ندارد.
- (۲) خط مماس و مشتق دارد.
- (۳) خط مماس و مشتق ندارد.
- (۴) خط مماس ندارد؛ ولی مشتق دارد.

(IQ گاج)

۲۶۷. دامنه‌ی تابع مشتق $f(x) = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۵
- (۳) ۴
- (۴) ۷

(IQ گاج)

۲۶۸. تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 2ax - b}$ در $x=2$ و $x=3$ نیم‌مماس قائم دارد. مقدار $2a + b$ کدام است؟

- (۱) -۱۱
- (۲) ۱
- (۳) -۶
- (۴) -۸/۵

(معروماه)

۲۶۹. هرگاه تابع $f(x) = \sqrt{mx^2 - 4x + m - 3}$ همواره مشتق‌پذیر باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

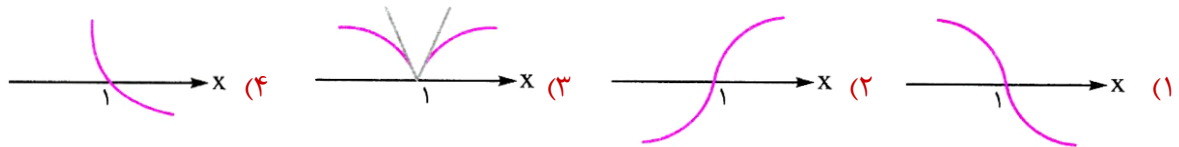
- (۱) $m > 4$
- (۲) $m \geq 4$
- (۳) $m \geq -1$ یا $m \leq -1$
- (۴) $m > 4$ یا $m < -1$

خطرا!



(نردباز ۳ قیلی سبز)

۲۷۰. نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x-2}$ در همسایگی $x=1$ کدام است؟



(مهرماه)

۲۷۱. نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$ در همسایگی $x=-2$ کدام است؟





ترکیبی پرو!

(IQ کلاچ)

۲۷۲. کدام تابع زیر در $x=0$ مشتق پذیر است؟

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (۴)$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 3x} \quad (۳)$$

$$y = \sqrt{x^3 - x^2} \quad (۲)$$

$$y = x|x^2 - 1| \quad (۱)$$

(معمومه)

۲۷۳. کدام تابع در \mathbb{R} مشتق پذیر نیست؟

$$y = x|x| \quad (۲)$$

$$y = x^2[x] \quad (۱)$$

$$y = \frac{1}{x^2 - x + 1} \quad (۴)$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x^3 - x & x < 1 \end{cases} \quad (۳)$$

(معمومه)

۲۷۴. تعداد نقاط مشتق ناپذیر کدام تابع از سایرین بیشتر است؟

$$y = \frac{2x}{x^3 - x} \quad (۴)$$

$$y = \tan x \quad (۳)$$

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (۲)$$

$$y = |x| \quad (۱)$$

(ریاضی خارج ۹۸)

۲۷۵. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



(نردبام ۴ فیلی سبز)

۲۷۶. تابع $f(x) = \begin{cases} x[x]-1 & x \geq 2 \\ x^2 - x + 1 & x < 2 \end{cases}$ در $x=2$ چه وضعیتی دارد؟

- (۱) ناپیوسته و مشتق ناپذیر (۲) بازگشتی (۳) مشتق پذیر (۴) گوشه

۲۷۷. تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & |x| < 2 \\ 4x - 1 & |x| \geq 2 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

(معروماه)

۲۷۸. تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & 0 \leq x < 2 \\ [x] & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ روی بازه $[0, 4]$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

(IQ گاج)

۲۷۹. تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{x-1} & 0 \leq x < 2 \\ [x]-1 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ در کدام بازه‌ی زیر مشتق پذیر است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 3/5)$

(نردبام ۴ فیلی سبز)

۲۸۰. تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & x \notin \mathbb{Z} \\ x^3 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ در چند نقطه به طول صحیح مشتق پذیر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار



ارتباط بین نمودارهای f و f'

(۱) یا نداره یا داره!

الف) کلی: (۲) توجه به مشتق ناپذیرهای $f \leftarrow$ نقاط حفره f'

f صعودی \leftarrow

(۳) توجه به یکنوایی f از روی نمودار \leftarrow علامت f'

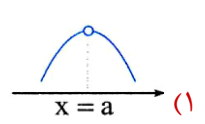
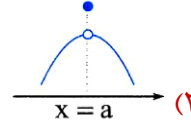
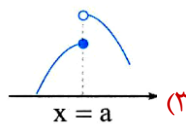
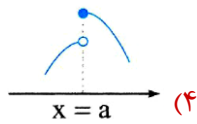
f نزولی \leftarrow

ب) در حوالی يك نقطه: بررسی مشتقات دو طرف

f ✓ f' ?

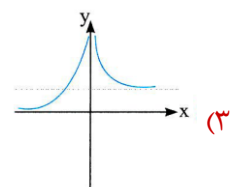
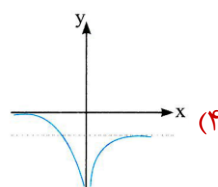
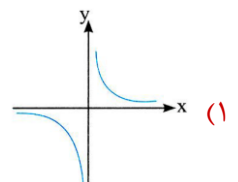
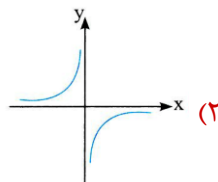
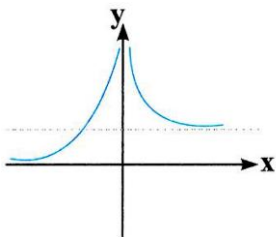
(۱Q) کج

۲۸۱. کدام شکل زیر می تواند مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ باشد؟



(۱Q) کج

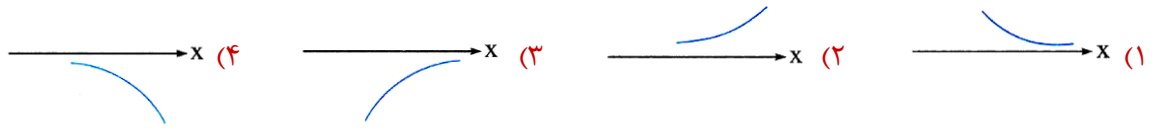
۲۸۲. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار $f'(x)$ کدام است؟





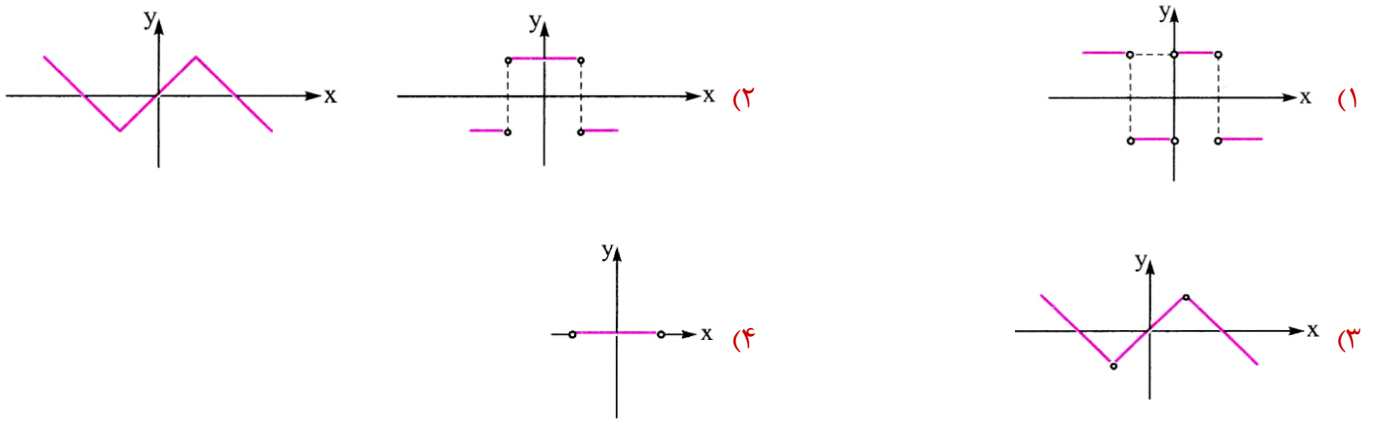
(IQ گاج)

۲۸۳. بخشی از نمودار تابع $f(x)$ به صورت x می‌باشد، نمودار تابع $f'(x)$ کدام است؟



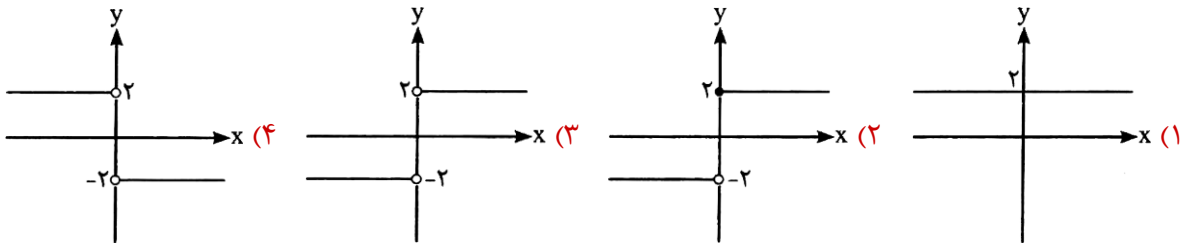
(نردباز ۴ فیلی سبز)

۲۸۴. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع f' کدام است؟



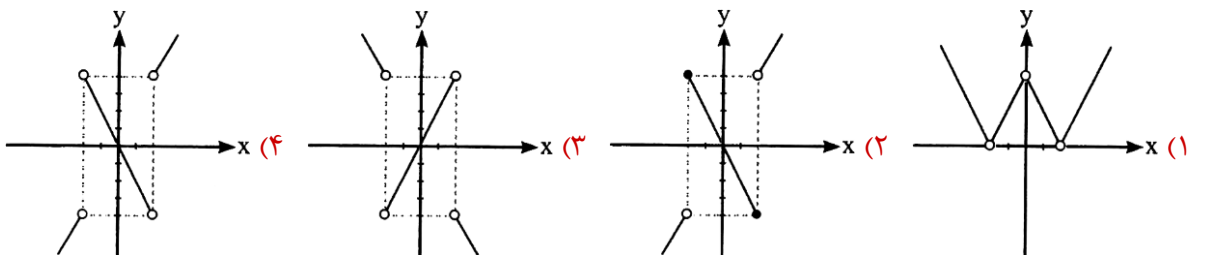
(مهرماه)

۲۸۵. نمودار مشتق تابع $f(x) = |2x|$ در کدام گزینه دیده می‌شود؟



(کتاب درسی)

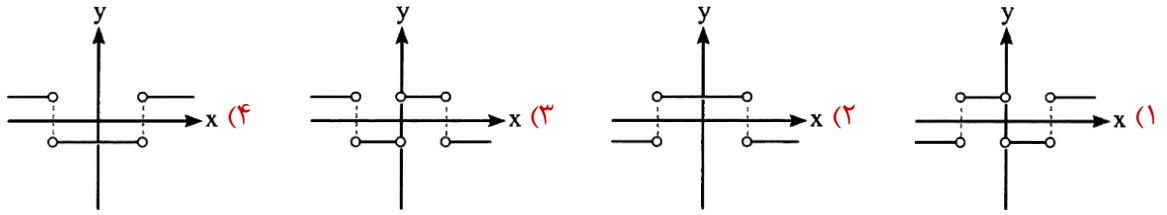
۲۸۶. نمودار مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ کدام شکل است؟



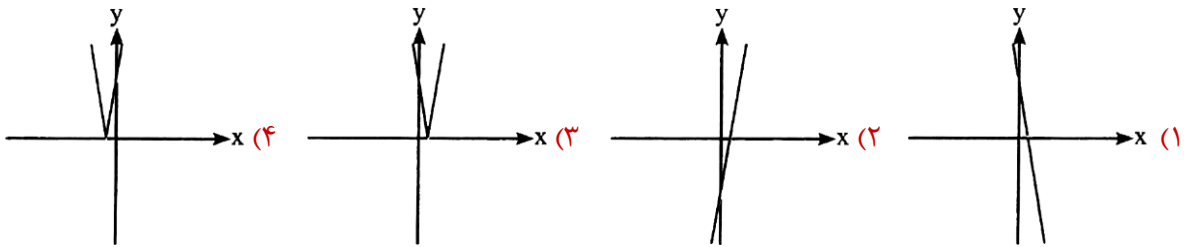


(معمروماه)

۲۸۷. نمودار مشتق تابع با ضابطه‌ی $h(x) = ||x - 2|$ چگونه است؟

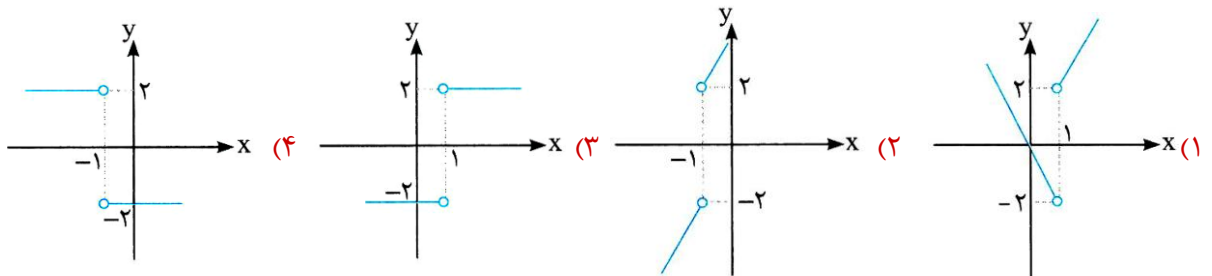


۲۸۸. برای تابع $g(x) = |-2 + 4x - 3x^2|$ نمودار تابع $y = g'(x)$ چگونه است؟



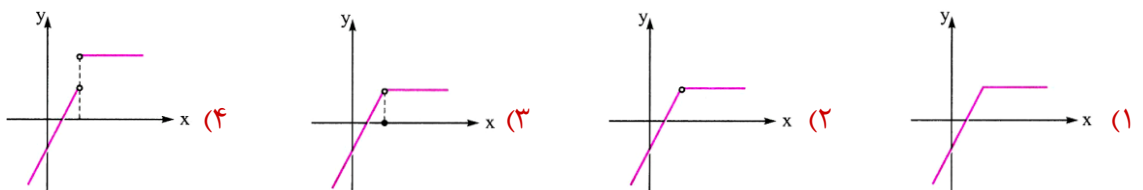
(IQ کج)

۲۸۹. اگر $f(x) = (x+1)|x-1|$ باشد، آنگاه نمودار $f'(x)$ کدام است؟



(نردبام فیلی سبز)

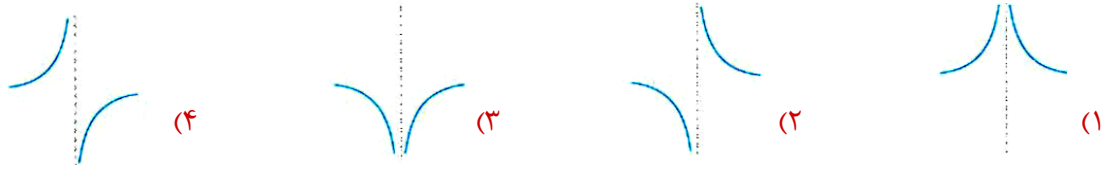
۲۹۰. آنگاه نمودار تابع مشتق f کدام است؟ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$





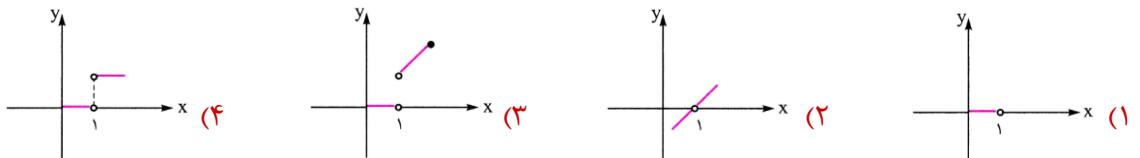
(IQ کج)

۲۹۱. نمودار مشتق تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ در حوالی $x=1$ به کدام صورت است؟



(نردباز ۴ فیلی سبز)

۲۹۲. نمودار مشتق تابع $f(x) = x[x]$ در همسایگی $x=1$ چگونه است؟



(مهورماه)

۲۹۳. اگر $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ باشد، نمودار f' در همسایگی نقطه‌ی $x=0$ چگونه است؟

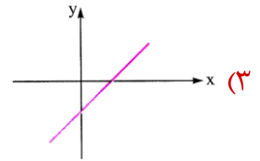
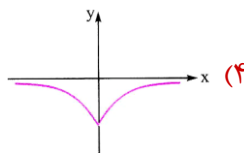
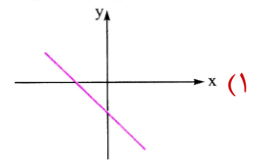
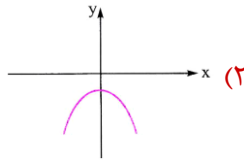
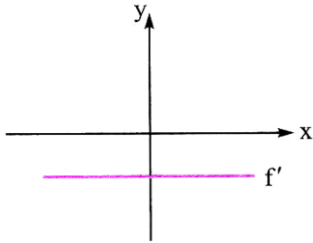




? f ✓ f'

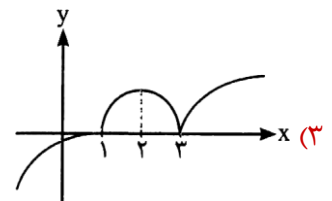
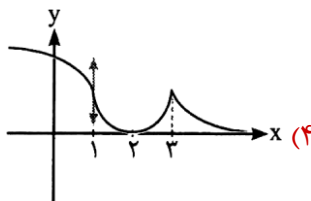
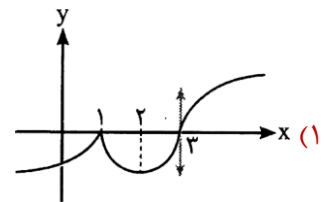
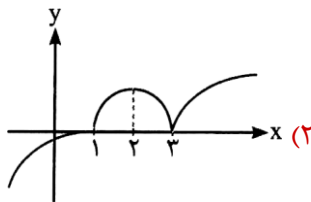
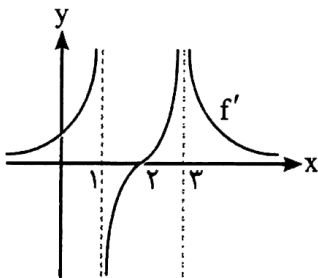
(نردبام فیلی سبز)

۲۹۴. اگر نمودار تابع f' به صورت زیر باشد، نمودار تابع f کدام می‌تواند باشد؟



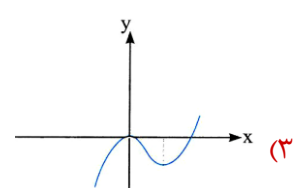
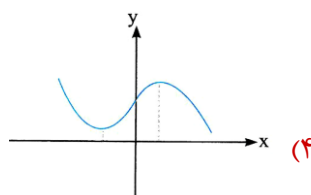
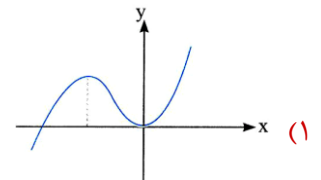
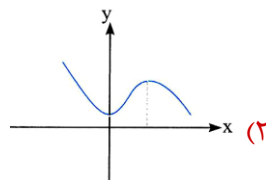
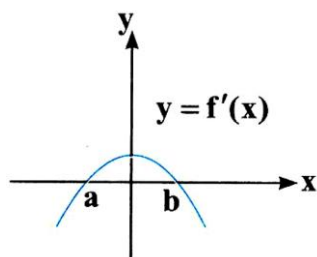
(موروماه)

۲۹۵. تابع f پیوسته بوده و نمودار آن به صورت مقابل است. کدام گزینه نشان دهنده نمودار f است؟



(IQ آج)

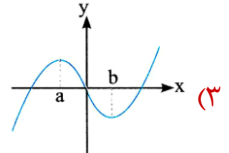
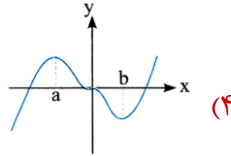
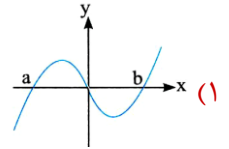
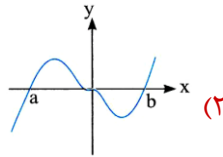
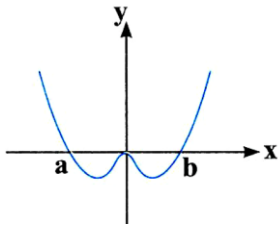
۲۹۶. نمودار تابع $f'(x)$ به صورت مقابل است، نمودار خود تابع $f(x)$ کدام است؟





(IQ گاج)

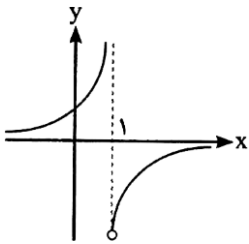
۲۹۷. اگر نمودار $f'(x)$ به صورت مقابل باشد، $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟



۲۹۸. اگر نمودار $f'(x)$ در همسایگی $x=1$ مطابق شکل روبه‌رو باشد، نمودار f در همسایگی $x=1$ چگونه

(مهروماه)

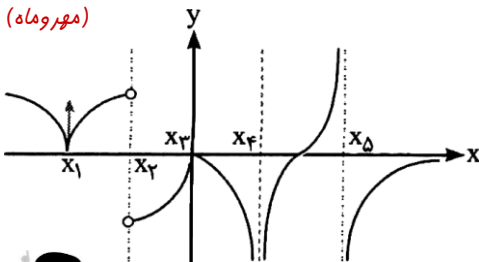
است؟



۲۹۹. تابع f روی \mathbb{R} پیوسته و نمودار مشتق آن به شکل زیر است. در مجاورت کدام نقطه نمودار تابع f به

(مهروماه)

صورت است؟



(۱) x_2

(۲) x_3

(۳) x_4

(۴) x_5





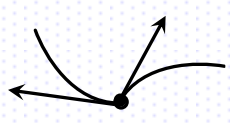
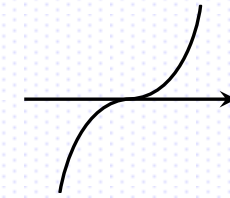
بحرانی / یکنوایی / ext نسبی / ext مطلق

بحرانی

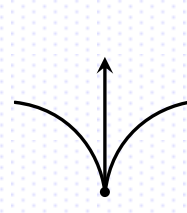
$f' = \begin{cases} 0 \\ \text{یا} \\ \text{موجود نیست} \\ \text{(که بلایم)} \end{cases}$



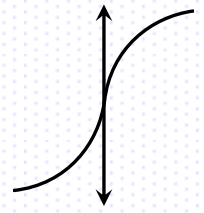
ناپیوسته



گوشه (زاویه‌دار)



بازگشت



عطف قائم

تذکر: نقطه‌ای بحرانی باید

مثال: $y = \frac{1}{x}$

یکنوایی

۱) اکیداً صعودی
صعودی



$f' :$

۲) اکیداً نزولی
نزولی



$f' :$

یکنوا

۳) هم صعودی هم نزولی



$f' :$

۴) نه صعودی نه نزولی



$f' :$

غیریکنوا

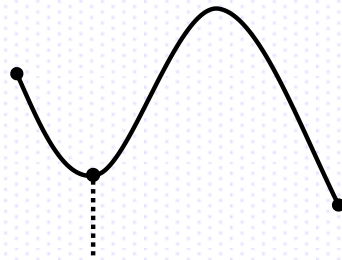
مثال:

	a	b	
f'	+	-	+



ext نسبی

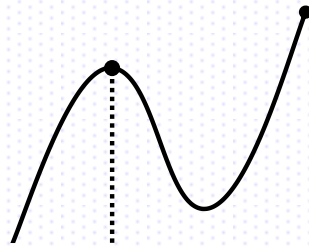
۱) min نسبی :



صعودی \xrightarrow{f} نزولی
 $\xrightarrow{f'}$

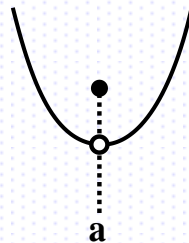
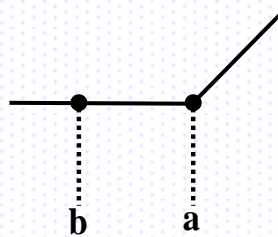
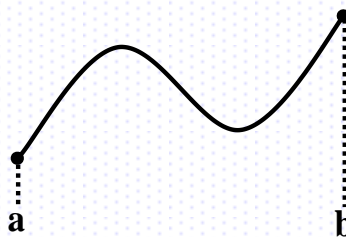
* در واقع در یک همسایگی اطرافش نسبت به نقاط مجاور از همه کمتر است.

۲) max نسبی :



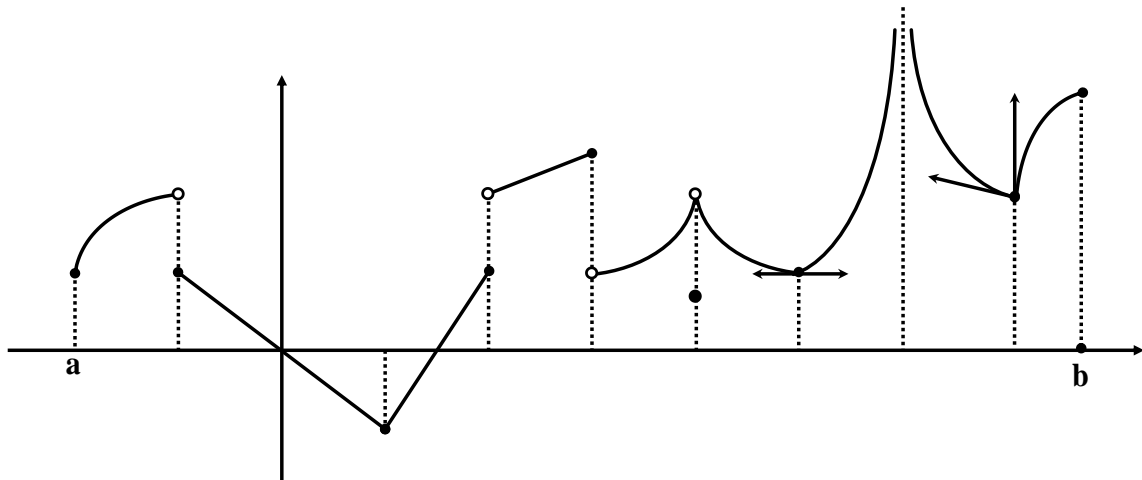
نزولی \xrightarrow{f} صعودی
 $\xrightarrow{f'}$

* در واقع در یک همسایگی اطرافش نسبت به نقاط مجاور از همه بیشتر است.

👉 **تذکره ۱:** سوتی رایج :👉 **تذکره ۲:** حالت مساوی :👉 **تذکره ۳:** سروته بازه :* در واقع ext نسبی، جاهایی است که f' تغییر علامت می دهد $\Leftarrow f'$ صفر هم می شود (ولی)



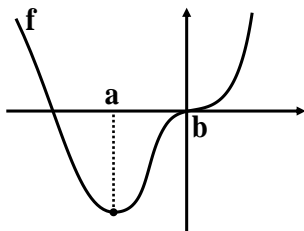
مثال: تعداد نقاط اکسترمم نسبی در شکل زیر؟



* ext نسبی:

* بحرانی:

مثال:



بحرانی:

ext نسبی:

نتیجه:

هر ext نسبی بحرانی است ولی ❌

بحرانی همه‌جایی است که f' صفر می‌شود ولی ❌

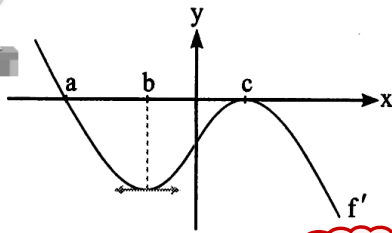
بحرانی تمام ریشه‌های f' است ولی ❌

مثال:

$$f'(x) = (x-2)(x+1)^4(x+6)^5$$

بحرانی:

ext نسبی:



خطرا!

۱. شکل روبه‌رو نمودار مشتق تابع f است. کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع f در بازه $(-\infty, a)$ نزولی است. **خطرا!**

(۲) تابع f در $x = a$ مینیمم نسبی دارد.

(۳) تابع f در بازه $(a, +\infty)$ اکیداً نزولی است. **خطرا!**

(۴) تابع f ، دو اکسترمم نسبی دارد. **خطرا!**

۲. مشتق تابع در هر نقطه از آن به صورت $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)(4 - x^2)$ است. تابع f به ترتیب از راست به چپ

چند ماکزیمم و مینیمم نسبی دارد؟

(۲) دو، یک

(۱) یک، دو

(۴) صفر، یک

(۳) یک، یک

نتیجه: تعداد مینیمم و ماکزیمم نسبی در یک تابع پیوسته:

ext مطلق

۱) از همه کمتر است : **min مطلق**

۲) از همه بیشتر است : **max مطلق**

در شکل صفحه قبل؟

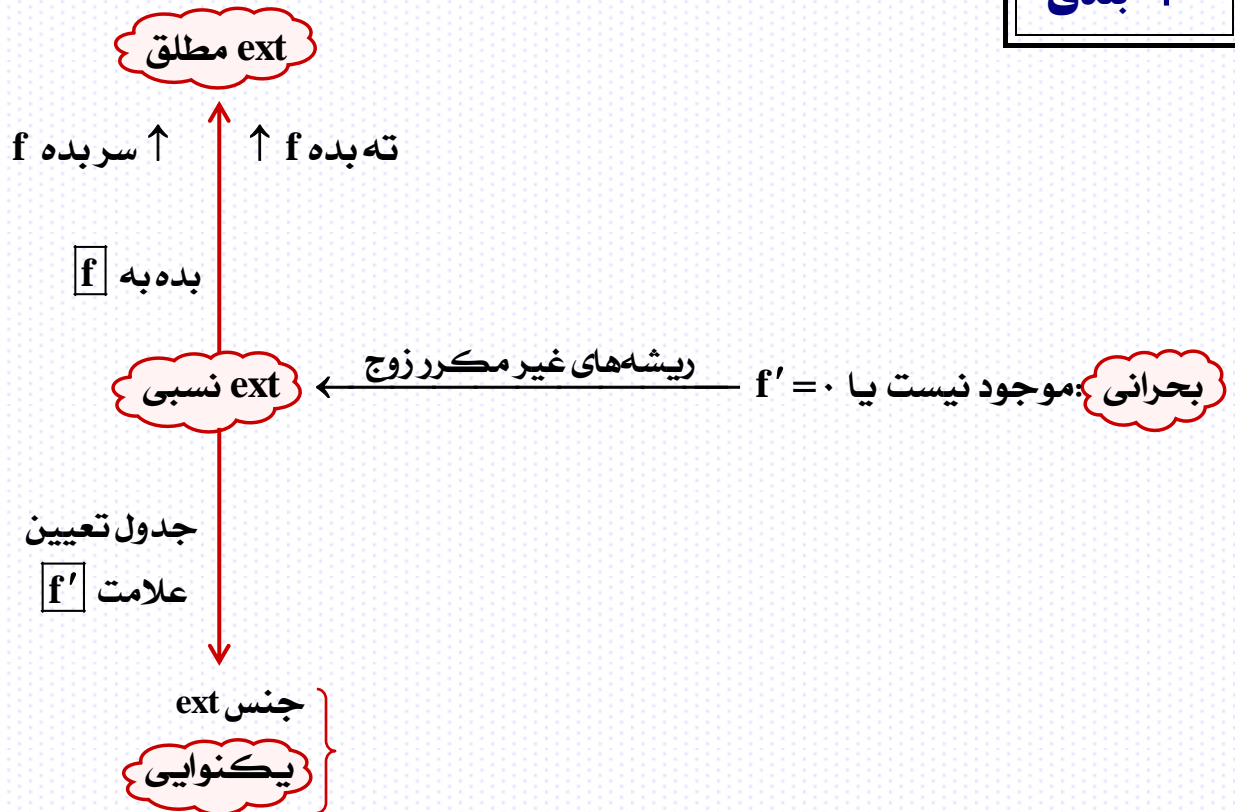
نتیجه: ext مطلق همیشه یا در سر و ته بازه است یا در ext های نسبی.

(برخلاف اکسترمم نسبی!)

تذکر: برای اعلام مقادیر ext مطلق، همیشه باید ...



+ بندی





تمرین

۳. در چندتا از گزاره‌های زیر، نقطه‌ای به طول a برای تابع f یک نقطه‌ی بحرانی است؟

(الف) اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ با مقدار تابع در a برابر نباشد.

(ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود و نابرابر باشد.

(پ) اگر حاصل یکی از حدهای $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نامتناهی و دیگری موجود و متناهی باشد.

(ت) اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نامتناهی با علامت یکسان باشد.

(ث) اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ با $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ برابر نباشد.

(۱) پنج (۲) چهار (۳) سه (۴) دو

۴. اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکستریم نسبی باشد، الزاماً تابع f چگونه است؟

(۱) $f'(c) = 0$ (۲) در c پیوسته است.

(۳) در همسایگی c تعریف شده (۴) در c مشتق پذیر است.

۵. تابع f در نقطه‌ی c دارای \min نسبی است و مشتق راست دارد، الزاماً این مشتق چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

(۱) مثبت (۲) منفی (۳) نامثبت (۴) نامنفی

۶. کدام گزاره درست است؟

(۱) مجموعه‌ی نقاط بحرانی یک تابع، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی نقاط اکستریم نسبی آن تابع است.

(۲) هر نقطه‌ی اکستریم نسبی، الزاماً بحرانی نیز هست.

(۳) در نقاط ماکزیمم نسبی، علامت مشتق را از منفی به مثبت تغییر می‌کند.

(۴) در نقاط مینیمم نسبی، علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر می‌کند.

۷. تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ ، کدام بیان نادرست است؟ (ریاضی ۹۰)

(۱) اگر c ، ext نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، خط مماس بر منحنی در c افقی است.

(۲) اگر c ، ext نسبی باشد، آن‌گاه c بحرانی است.

(۳) اگر c ، بحرانی باشد، آن‌گاه ext نسبی است.

(۴) اگر c ، ext مطلق باشد، آن‌گاه بحرانی است.



مثال: مطلوبست نقاط بحرانی، ext های نسبی، ext های مطلق و وضعیت یکنوایی در توابع زیر:

۸) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ $[-4, 3]$

(تجربی فارج ۹۱) (تجربی ۹۵)

۹) $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$

(تجربی ۹۳)

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x = 0$$

$$\Rightarrow -4x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow -4x(x-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 3$$

۱۰) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x$

(ریاضی فارج ۹۰)

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x^3 - 3x^2 + 2) = 0$$

حدس $x=1$



$$\Rightarrow 4(x-1)(\quad ? \quad) = 0$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & x^2 + x - 2 \\ & = (x-1)(x+2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, -2$$



$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 7x + 1 & 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \\ \sqrt[3]{2-5x} & \frac{4}{3} < x \leq 3 \\ -x^2 + 10x & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

۱۱. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(۴) شش

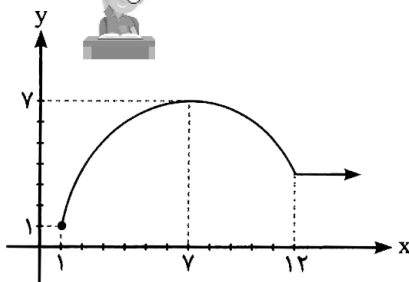
(۳) پنج

(۲) چهار

(۱) سه

خطری!

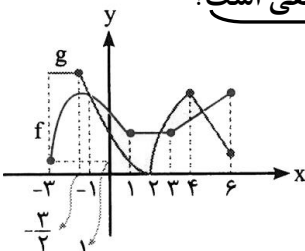
۱۲. مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ به صورت $\{-1, 2\}$ است. شیب خطی که نقاط بحرانی این تابع را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

(۴) $-\frac{9}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{9}{2}$ 

۱۴. با توجه به نمودار تابع f ، کدام گزاره به درستی بیان نشده است؟

- (۱) در بازه‌ی $(1, 7)$ تابع f اکیداً صعودی و شیب خطهای مماس بر نمودار، مثبت است.
- (۲) در بازه‌ی $(1, 7)$ شیب خطوط مماس بر منحنی، مثبت و رو به افزایش است.
- (۳) در بازه‌ی $(7, 12)$ تابع f اکیداً نزولی و شیب خطهای مماس بر نمودار، منفی است.
- (۴) در بازه‌ی $(12, +\infty)$ تابع f مقداری ثابت دارد و حاصل f' ، صفر است.

۱۳. در شکل مقابل، نمودار تابع f و g رسم شده است. در کدام بازه مشتق تابع $(f \circ g)(x)$ منفی است؟



تर्फندا!

(۱) $(-3, 1)$ (۲) $(4, 6)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-2, 1)$



۱۵. تابع $y = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی اکید است. حدود a کدامست؟
صعودی؟



۱۶. به ازای کدام مقدار k ، نمودار تابع $f(x) = (k+1)x^3 + (2k-1)x^2 + 3$ همواره نزولی است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار k

(ریاضی ۱۴۰۰)

۱۷. کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}}$ درست است؟

- (۱) تابع f در بازه $(0,1) \cup (1,\infty)$ نزولی است.
(۲) تابع f در بازه‌های $(0,1)$ و $(1,\infty)$ صعودی است.
(۳) تابع f در بازه $(1,\infty)$ صعودی و در بازه $(0,1)$ نزولی است.
(۴) تابع f در بازه $(1,\infty)$ نزولی و در بازه $(0,1)$ صعودی است.

ترفند مرزهای دامنه در یکنوایی



(ریاضی فارج ۱۴۰۰)

۱۸. مجموعه مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = 3\sqrt{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

- (۱) $[-1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, \infty)$ (۳) $(-1, 0) \cup (0, \infty)$ (۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$



۱۹. به ازای کدام مقدار m ، مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $y = x^3 + \frac{m}{4}x^2 - mx + 7$ برابر با $\frac{-5}{6}$ است؟

-۵ (۴)

۵ (۳)

۱۰ (۲)

-۱۰ (۱)

۲۰. اگر توابعی به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 8x$ ، ماکزیمم و مینیمم نسبی با طول‌های منفی داشته باشند،

آن‌گاه حدود تغییرات m کدام است؟

 $m < 1$ (۴) $m < -3$ (۳) $-3 < m < 1$ (۲) $m > 5$ (۱)

۲۱. اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای و درجه‌ی تابع حاصل ضرب $y = f'(x) \times f''(x)$ برابر با ۵ باشد، تابع f حداکثر می‌تواند چند نقطه‌ی اکسترمم نسبی داشته باشد؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۲۲. فاصله نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه اول کدام است؟ (تقریبی ۹۹)

 $2\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

 $\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)



بهترین راه برای همه چی! : رسم نمودار

(کتاب درسی)

۲۳. کدام گزینه بیشترین مقدار تابع $g(x) = -x^2$ در بازه $[-2, 3]$ است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۹

۲۴. نقطه‌ای به طول صفر برای تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ است.

- (۱) ماکزیمم نسبی (۲) ماکزیمم مطلق (۳) مینیمم نسبی (۴) مینیمم مطلق

۲۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

- (۱) یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد. (۲) فقط یک مینیمم نسبی دارد.
(۳) دو ماکزیمم نسبی دارد. (۴) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد.

۲۶. اگر نقطه‌ی $x = \frac{1}{p}$ ، طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (m-2)x^2 + 2x + 1$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) هیچ مقدار (۳) ۱ (۴) صفر

خطر!

۲۷. نقطه‌ی مینیمم تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - ax + 1$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد. مقدار a کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{5}$ (۲) $1 - \sqrt{20}$ (۳) $1 + \sqrt{20}$ (۴) $\sqrt{5}$



۲۸. اگر $f(x) = 4x^2 + x + 1$ و $g(x) = \frac{x}{8}$ باشد، کمترین مقدار تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

(۴) $-\frac{49}{64}$

(۳) $\frac{49}{64}$

(۲) $-\frac{15}{16}$

(۱) $\frac{15}{16}$

(کتاب درسی)

۲۹. مجموع مقادیر \min و \max مطلق تابع f با ضابطه $y = x^3$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۸

(۲) ۱۳

(۱) ۹

(کتاب درسی)

۳۰. نقطه به طول ۱ برای تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ چگونه وضعیتی دارد؟

- (۱) اکسترمم نسبی نیست، ولی بحرانی است.
- (۲) هم اکسترمم نسبی و هم بحرانی است.
- (۳) نه اکسترمم نسبی و نه بحرانی است.
- (۴) اکسترمم نسبی است، ولی بحرانی نیست.

تذکر: وضعیت مشتق در محل اُریّت! تابع درجه ۳:

(تست ۳۲ رو ببین)

۳۱. کدام گزینه درباره‌ی تابع $y = x^4 + 3x^2 + 1$ درست است؟

- (۱) فقط یک مینیمم نسبی دارد.
- (۲) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد.
- (۳) یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد.
- (۴) یک ماکزیمم و دو مینیمم نسبی دارد.

یادآوری نمودار:

(کتاب درسی)

۳۲. کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x) = -x^3 - 3x + 2$ به درستی بیان شده است؟

- (۱) یک ماکزیمم نسبی به طول ۱ و یک مینیمم نسبی به مقدار ۲- دارد.
- (۲) یک ماکزیمم نسبی به مقدار ۶ و یک مینیمم نسبی به طول ۱ دارد.
- (۳) دو نقطه‌ی بحرانی با مشتق صفر دارد.
- (۴) همواره نزولی بوده و فاقد نقطه‌ی بحرانی است.



۳۲. تابع $y = |x^2 - 1|$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۳۴. تابع f با ضابطه $f(x) = |x^2 - bx + 5|$ دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی است. تعداد اعداد صحیحی که b نمی‌تواند بپذیرد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) بی‌شمار

۳۵. تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ |x-1|-3 & x > 0 \end{cases}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۳۶. تعداد اکسترمم‌ها نسبی تابع $f(x) = x + |x-1|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

۳۷. تعداد نقاط بحرانی کدام تابع از بقیه کمتر است؟

- (۱) $y = 2x - |2x|$ (۲) $y = x + |2x|$ (۳) $y = x - [2x]$ (۴) $y = x + [2x]$



۳۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟ (تقریبی قارچ ۹۸)

- (۱) $2\sqrt{2}$
- (۲) ۳
- (۳) $3\sqrt{2}$
- (۴) ۴

۳۹. تابع f با ضابطه‌ی $y = |\sin x|$ در بازه‌ی $(-\pi, 3\pi)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

- (۱) پنج
- (۲) شش
- (۳) هفت
- (۴) هشت

۴۰. مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = \tan \pi x$ در بازه‌ی $0 \leq x < \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) صفر
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) وجود ندارد.

۴۱. مجموع نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = \tan x \cdot \cot x$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R}
- (۲) $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- (۳) $\mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- (۴) \emptyset

۴۲. تابع f با ضابطه‌ی $y = x - [x]$ در بازه‌ی $[-2, 3]$ به ترتیب چند نقطه‌ی مینیمم و ماکزیمم نسبی دارد؟

- (۱) ۳ و صفر
- (۲) ۳ و ۳
- (۳) ۴ و صفر
- (۴) ۵ و صفر



۴۳. تابع u با ضابطه‌ی $u(x) = \frac{1}{x}$ روی دامنه‌ی خود کدام ویژگی را دارد؟

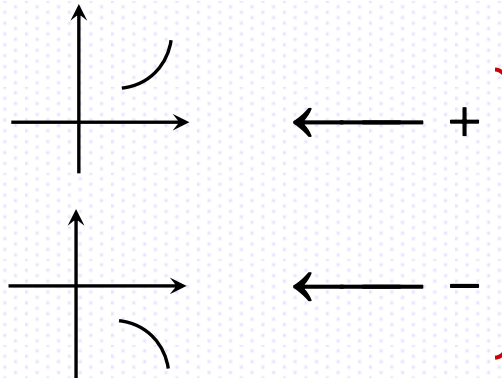
- (۱) یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق دارد.
- (۲) یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد.
- (۳) یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی و یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق دارد.
- (۴) فاقد هرگونه اکسترمم نسبی یا مطلق است.



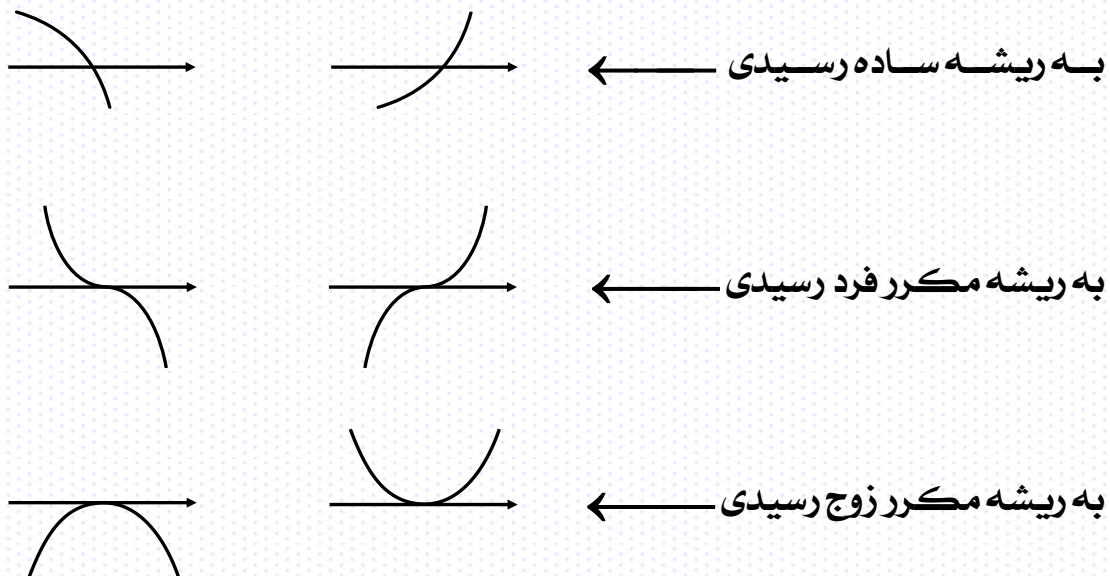
رسم نمودار به سبک آریان حیدری

درس ۱: حاصل ضرب چند عبارت درجه ۱ که به یه توانی می‌رسند

۱- تعیین ریشه‌ها روی محور X ها



۲- تعیین علامت ضریب پرتوان



به ریشه ساده رسیدی

به ریشه مکرر فرد رسیدی

به ریشه مکرر زوج رسیدی

مثال: $y = (x-3)(x-1)^4(x+2)^5$

مثال: $y = (-x+2)(x-1)^3x^4$





$$۴۴) y = -(x-1)^2(x-3)^5(x+1)^4$$

$$۴۵) = (-x+1)^3(x-3)^2(x^2-5x+6)^5(13-x)^2(x^2-4)^5(x^2+x)$$

$$\rightarrow y = (-x+1)^3(x-3)^2(x-2)^1(13-x)^2(x+2)^5x(x+1)$$



$$۴۶) y = x^2(x-2)^2$$

(تجربی ۱۵)

نقاط بحرانی تشکیل
یک مثلث می‌دهند. نوع
مثلث؟

- (۱) متساوی الاضلاع
- (۲) متساوی الساقین
- (۳) قائم الزاویه
- (۴) قائم الزاویه متساوی الساقین

$$۴۷) y = (x-1)^3(x+1)$$

همه چیز؟! *

بحرانی: *

min نسبی: } *

max نسبی: }

min مطلق: } *

max مطلق: }

* یکنوایی:

VIP: فوق حرفه‌ای ۱:

$$y = (x - \alpha)^m (x - \beta)^n$$

$$x_{\text{ext}} =$$

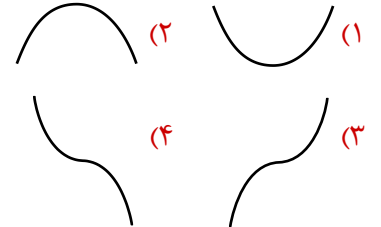


$$48) y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$$

(تجربی ۱۶)

☞ نمودار این تابع در

حوالی $x=1$ چگونه است؟



$$49) y = -x^4 + 4x^3 - 3$$

(تجربی ۹۱)

☞ در کدام بازه صعودی

است؟

(۱) $(-\infty, 4)$ (۲) $(-\infty, 3)$ (۳) $(3, +\infty)$ (۴) $(4, +\infty)$

$$50) y = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad [-1, 2]$$

☞ بیشترین مقدار تابع

چقدر از کمترین مقدار

تابع، بیشتر است؟

$$51) y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

(تجربی ۹۷)

☞ معادله $y = m$ فقط

دارای یک ریشه است.

حدود m ؟



$$۵۲) y = x^3 - 12x + 4$$

(کتاب درسی)

کدام گزینه درست است؟

- ۱) یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد به طوری که $x_{min} < x_{max}$ است.
- ۲) یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد به طوری که $x_{min} > x_{max}$ است.
- ۳) دو نقطه‌ی ماکزیمم نسبی با طول‌های مثبت دارد.
- ۴) دو نقطه مینیمم نسبی با طول‌های مختلف علامت دارد.

$$۵۳) y = 3x^3 - 18x$$

کدام گزینه درست است؟

- ۱) f روی بازه‌ی $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
- ۲) f روی بازه‌ی $(-2, 2)$ اکیداً نزولی است.
- ۳) f روی بازه‌ی $(-\sqrt{2}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.
- ۴) f روی بازه‌ی $(-\infty, -\sqrt{2})$ اکیداً صعودی است.

VIP: فوق حرفه‌ای ۲:

$$y = ax^m - bx^n \quad (m > n)$$

x_{ext} :

$$۵۴) y = 3x^5 - 5x^3$$

طول نقطه‌ی مینیمم

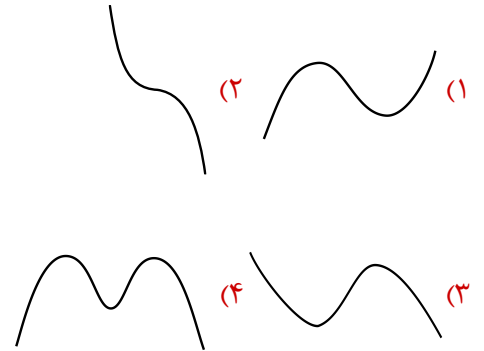
نسبی؟

* برگردید و این روش را در صورت امکان در مثال‌های ۳ الی ۸ استفاده کنید.



$$55) y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$$

نمودار؟



$$56) y = x^6 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

(تجربی فارغ ۱۵)

- طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی؟
- طول نقطه‌ی مینیمم نسبی؟

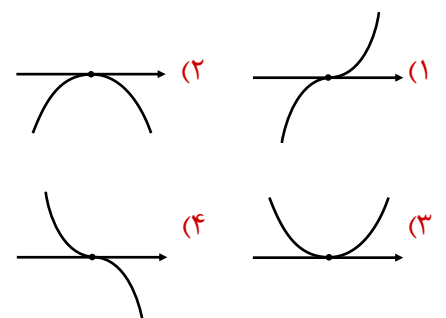
$$57) y = \frac{-2}{3}x^3 + x^2 + 12x$$

(تجربی فارغ ۹۷)

- خط $y = m$ با این نمودار در دو نقطه مشترک است. m ؟

$$58) y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{8}{3}$$

نمودار در حوالی $x = 2$ ؟



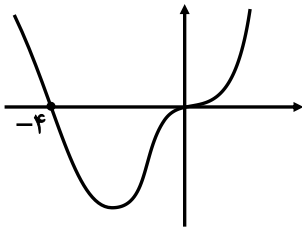


$$59) y = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$$

(تجربی ۱۵)

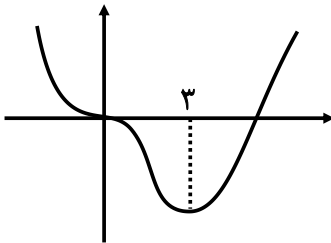
Ⓒ ماکزیمم مطلق؟

۶۰. در تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$ که نمودارش در زیر آمده است. با تعیین مقدار a و b ، \min تابع کدام است؟ (تجربی ۹۵)



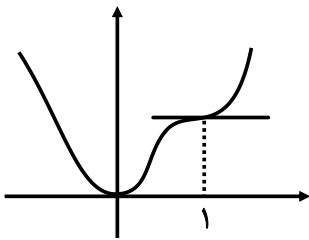
(ریاضی فارج ۹۸)

۶۱. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ است. $f(-2)$ ؟



(ریاضی ۹۸)

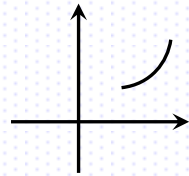
۶۲. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ است. a و c ؟



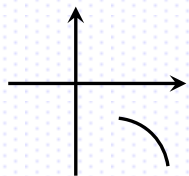


درس ۲: حضور قدر مطلق

۱- تعیین ریشه‌ها روی محور X ها



← +

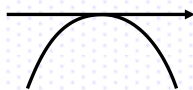
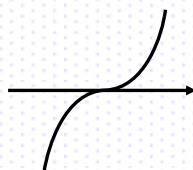
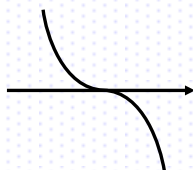


← -

۲- تعیین علامت ضریب پرتوان



← به ریشه ساده تو قدر رسیدی

← به ریشه مکرر تو قدر رسیدی
(زوج یا فرد)

← به ریشه هم تو هم بیرون قدر رسیدی

مثال: $y = x(x-1) | (x-2)(x+3)^3 (x+1)^4 (x-1) |$

مثال: $y = (x+1) | (x^2-1)(x+2)^3 |$





$$۶۳) y = |(x-1)(x-2)(x-3)|$$

چند اکسترمم نسبی؟

خطرا!

تذکر: جهت دهانه در دو طرف ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق:



$$۶۴) y = |x^3 - x| \quad [-1, 2]$$

(ریاضی ۹۰)

تعداد نقاط بحرانی؟

$$۶۵) y = x|x-4|$$

(تهری ۹۸)

فاصله دو نقطه می‌نیمم

نسبی و ماکزیمم نسبی؟

$$۶۶) y = x^2|x-3|$$

(ریاضی ۸۴ و ریاضی قاج ۸۶)

طول نقطه‌ی مینیمم

نسبی؟

طول نقطه‌ی ماکزیمم

نسبی؟



$$۶۷) y = (x^2 - 3x) |x|$$

در کدام بازه نزولی

است؟

(۱) $(0, 3)$

(۲) $(-\infty, 2)$

(۳) $(2, +\infty)$

(۴) $(0, \frac{5}{2})$

$$۶۸) y = (x-1) |x^2 + x - 2|$$

(ریاضی فارج ۹۲)

نقاط بحرانی تشکیل

یک مثلث می‌دهند،

مساحت این مثلث؟

$$۶۹) y = x |x^2 - 3| \quad [-1, 1]$$

(ریاضی ۸۷)

وجود اکسترم‌های

نسبی و مطلق؟

$$۷۰) y = x |3 - x^2| \quad [-1/5, \sqrt{3}]$$

(تهری فارج ۱۴۰۰)

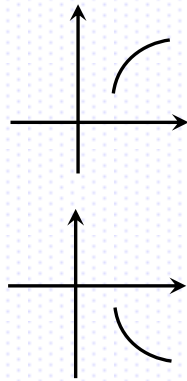
می‌نیمم مطلق؟





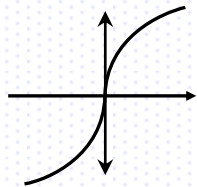
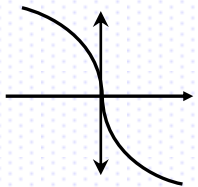
درس ۳: حضور رادیکال

۱- تعیین ریشه‌ها روی محور X ها

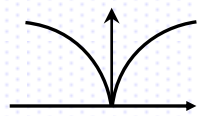
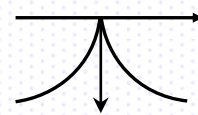


+ ←
- ←

۲- تعیین علامت ضریب پرتوان



به ریشه ساده یا مکرر فرد زیر رادیکال رسیدی ←



به ریشه مکرر زوج زیر رادیکال رسیدی ←

* اگر فرجه رادیکال زوج باشد ← اعمال محدودیت دامنه.

** در مواقعی که یه عبارتی هم بیرون رادیکال است ←

دهانه‌های ابتدایی و انتهایی به نفع درس ۱ (۲) تغییر می‌کنند البته بدون ایجاد نقطه بحرانی.

*** اگر توان ریشه از فرجه بیشتر باشد ← آن عبارت را به صورت نمادین از رادیکال بیرون آورده و

سپس **

مثال: $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)}$

مثال: $y = \sqrt[5]{x^3(x-1)^4}$





$$۷۱) y = \sqrt[3]{x(1-x)} \quad [-1, 2]$$

چند نقطه بحرانی؟

$$۷۲) y = 1 - (x-2)^{\frac{2}{3}} \quad [-5, 4]$$

می‌نیمم مطلق و
ماکزیمم مطلق؟

$$۷۳) y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$۷۴) y = \sqrt{4 - x^2}$$

می‌نیمم و ماکزیمم
مطلق؟



$$۷۵) y = (۵ + x) \sqrt{x^2}$$

(ریاضی ۹۵ قاج)

$$۷۶) y = (x - 1)^2 \sqrt[3]{x^2}$$

(ریاضی ۹۵)

طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی؟

- | | |
|-------------------|-------------------|
| $\frac{1}{3}$ (۲) | $\frac{1}{4}$ (۱) |
| $\frac{2}{3}$ (۴) | $\frac{1}{2}$ (۳) |

$$۷۷) y = (x^2 - ۲۸) \sqrt[3]{x}$$

(تجربی ۱۳)

طول نقاط بحرانی؟

- (۱) ۲ و -۲
- (۲) ۲ و ۰ و -۲
- (۳) ۱ و ۰ و -۱
- (۴) ۱ و ۰ و -۷

$$۷۸) y = |x - ۲| \sqrt[3]{x^2}$$

(ریاضی ۱۵)

طول نقاط بحرانی؟

- (۱) ۰ و $\frac{4}{5}$ و ۲
- (۲) ۰ و $\frac{2}{3}$ و ۲
- (۳) ۰ و ۱
- (۴) ۲ و $\frac{2}{3}$



$$۷۹) y = (x + 3)\sqrt{x}$$

(تجربی فارغ ۹۲)

وضعیت یکنوایی؟

$$۸۰) y = (x - 1)\sqrt{x}$$

طول نقطه‌ی می‌نیم

نسبی؟

$$۸۱) y = x\sqrt{4 - x^2}$$

(تجربی ۹۲)

تعداد نقاط می‌نیم

نسبی؟

مقدار مینیمم مطلق و

ماکزیمم مطلق؟



$$۸۲) y = \sqrt[3]{x^y(x-5)}$$

$$۸۳) y = \sqrt[4]{x(2-x)^6}$$

طول نقطه‌ی ماکزیمم

نسبی؟



تمرین

$$۸۴) y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^3}$$

$$۸۵) y = (x-1)^2(x-2)\sqrt[4]{(x+1)^4}$$

$$۸۶) y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$$

(ریاضی ۱۷ و تهری ۹۷)

در کدام بازه نزولی

است؟

$$۸۷) y = x^{\frac{5}{3}} - 1 \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

(تهری ۱۷)

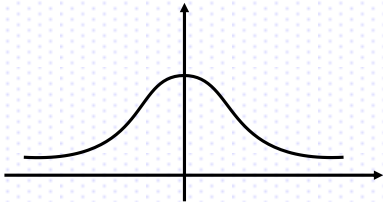
طول نقطه‌ی می‌نیم

نسبی؟





درس ۴: $f(x) = \frac{1}{x^2 + k}$
($k > 0$)



(کتاب درسی)

۸۸. کدام گزاره درباره‌ی تابع $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ به درستی بیان شده است؟

- (۱) روی بازه‌ی $(0, \infty)$ همواره صعودی و روی بازه‌ی $(-\infty, 0)$ همواره نزولی است.
 (۲) روی بازه‌ی $(0, +\infty)$ همواره نزولی و روی بازه‌ی $(-\infty, 0)$ همواره صعودی است.
 (۳) روی \mathbb{R} همواره صعودی است.
 (۴) روی \mathbb{R} همواره نزولی است.

(ریاضی خارج ۹۰)

۸۹. تعداد نقاط بحرانی برای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

VIP: فوق حرفه‌ای ۳:

بحرانی: $y = \frac{f}{g}$

۹۰. ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}$



(ریاضی ۹۸)

۹۱. فاصله‌ی نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ ، از خط مجاذب قائم آن کدام است؟
(رشته ریاضی)

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲)

۱ (۱)

(ریاضی فارج ۹۸)

۹۲. فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{2x - x^2}{(x+1)^2}$ ، از خط مجاذب افقی آن کدام است؟
(رشته ریاضی)

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{2}{3}$ (۱)

(تجربی ۱۴۰۰)

۹۳. تعداد اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

خطرا!

خطرا!

۹۴. به ازای کدام مقدار b ماکزیمم تابع $y = \frac{bx}{x^2 + 1}$ برابر $\frac{1}{2}$ است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



۹۵. نقطه‌ای به طول صفر، برای تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x^2 + 4}{4 - x^2}$ چه نقطه‌ای است؟

- (۱) گوشه‌ای
- (۲) ماکزیمم نسبی
- (۳) مینیمم نسبی
- (۴) مشتق ناپذیر

ترفند تعیین جنس اکسترمم در فوق حرفه‌ای ۳:



۹۶. مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟ (تهرانی فارج ۹۹)

- (۱) $-1 + \sqrt{5}$
- (۲) $1 + \sqrt{5}$
- (۳) $-1 + \sqrt{3}$
- (۴) $1 + \sqrt{3}$

۹۷. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = \frac{x+a}{x^2+5}$ در آن صعودی است، به صورت $[-5, b]$ می‌باشد. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) ۳
- (۳) ۱
- (۴) -۱

۹۸. نمودار تابع $y = \frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

- (۱) \mathbb{R}
- (۲) $(-3, 1)$
- (۳) $(-1, 3)$
- (۴) $(3, +\infty)$



۹۹. بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها،

کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۰)

(۴) $2(\sqrt[3]{4} - 1)$

(۳) $2\sqrt[3]{4}$

(۲) $\sqrt[3]{4} - 1$

(۱) ۲

خطرا!

(ریاضی قارج ۱۴۰۰)

۱۰۰. تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$; $x \in (-2, 2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

خطرا!

۱۰۱. به ازای چند مقدار صحیح از a تابع $y = \frac{ax + 2}{x + a - 1}$ در بازه‌ی $(0, 3)$ نزولی اکید است؟

(۴) چهار

(۳) دو

(۲) یک

(۱) صفر

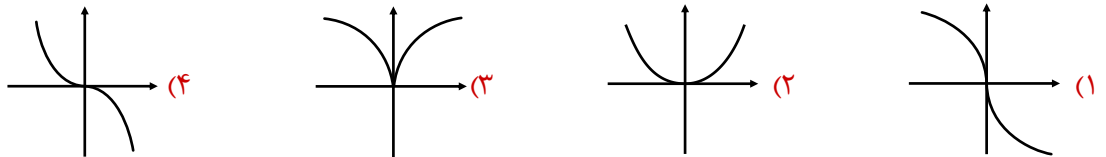


نمودار تابع در حوالی یک نقطه

* رسم نشد ←
(۱)
(۲)

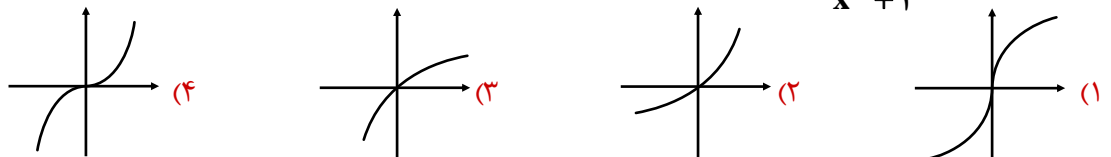
(تجربی فارغ ۹۱)

۱۰۲. نمودار تابع $y = x^{\frac{8}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدا مختصات چگونه است؟



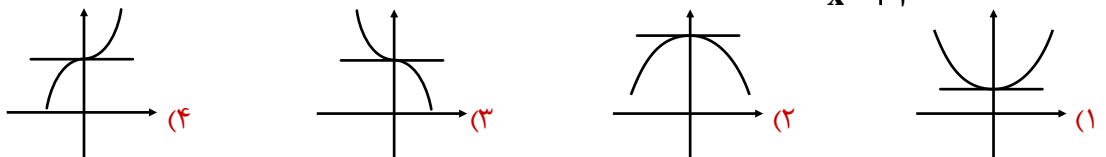
(تجربی ۹۱)

۱۰۳. نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ در حوالی مبدا مختصات چگونه است؟



(ریاضی فارغ ۱۴)

۱۰۴. نمودار تابع $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ در نزدیکی $x = 0$ چگونه است؟



(ریاضی ۱۴)

۱۰۵. نمودار تابع $y = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x$ در همسایگی $x = 0$ چگونه است؟



* به سؤال ۵۸ مراجعه کنید.



بهینه سازی

* منظور پیدا کردن Min مطلق یا Max مطلق در یک مسئله واقعی، هندسی، فیزیکی و ... است. معمولاً ←

- * **الگوریتم حل:**
- ۱- نوشتن تابع فرض و تابع هدف به زبان ریاضی.
 - ۲- تک متغیره کردن تابع هدف به کمک تابع فرض.
 - ۳- پیدا کردن نقاط بحرانی تابع هدف.

۱۰۶. غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق از رابطه $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می آید. چند

(کتاب درسی)

ساعت پس از تزریق در خون، غلظت آن ماکزیمم می شود؟

$$\frac{3\sqrt[3]{4}}{2} \quad (4)$$

$$3\sqrt[3]{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt[3]{3} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{4} \quad (1)$$

۱۰۷. یک ورق فلزی مربع شکل را مطابق شکل برش می دهیم و یک جعبه در باز تولید می کنیم. اگر ماکزیمم حجم

(کتاب درسی)

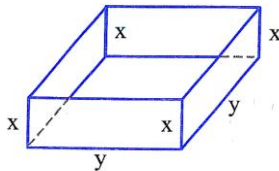
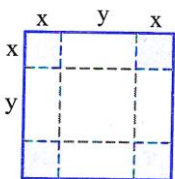
جعبه تولید شده 2000 cm^3 باشد، طول ضلع مربع کدام است؟

$$20 \quad (1)$$

$$25 \quad (2)$$

$$27 \quad (3)$$

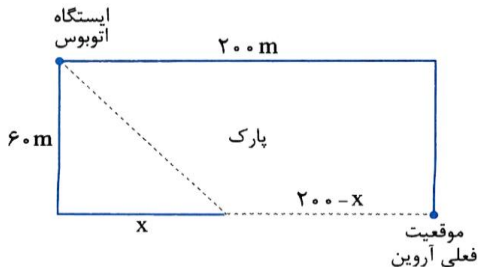
$$30 \quad (4)$$





۱۰۸. آروین می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت $۳ \frac{m}{s}$ از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین می تواند از درون پارک و تنها با سرعت

$۲ \frac{m}{s}$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x کدام باشد تا آروین بتواند در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟ (کتاب درسی)



$$۱۲\sqrt{۵}m \quad (۱)$$

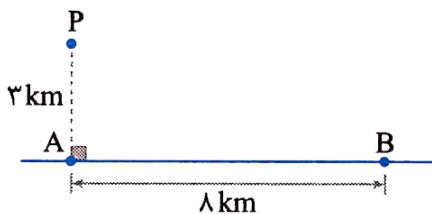
$$۳۰m \quad (۲)$$

$$۲۴\sqrt{۵}m \quad (۳)$$

$$۶۰m \quad (۴)$$

۱۰۹. آرمان درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک ترین نقطه ساحل یعنی نقطه A ، معادل ۳ کیلومتر است. او می خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق $۲ \frac{km}{h}$ و سرعت پیاده روی آرمان در ساحل $۴ \frac{km}{h}$ باشد. اگر او بخواهد در کوتاه ترین زمان ممکن به B برسد، در

چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟ (کتاب درسی)



$$۱ \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\sqrt{۲} \quad (۳)$$

$$\sqrt{۳} \quad (۴)$$



۱۱۰. اگر $x + y = ۱$ باشد، کمترین مقدار $x^۳ + y^۳$ کدام است؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$\frac{1}{۲} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{۴} \quad (۱)$$



(تقریبی ۹۹)

۱۱۱. کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{2x+7}$ کدام است؟

۳ $\sqrt{2}$ (۴)

۵ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)

ترفند ۱

ترفند ۲

(تقریبی خارج ۱۴۰۰)

۱۱۲. کوتاه‌ترین فاصله سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه $M(3,0)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ $\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)



۱۱۳. قریب‌ترین نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع f با خط نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA' کدام است؟

(تقریبی ۱۴۰۰)

$\frac{\sqrt{2}}{8}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)



۱۱۴. قرینه نقطه A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه $[0, 1]$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم صفحه مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA' ، کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۰)

$\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{4}{3\sqrt{6}}$ (۲)

$\frac{2}{3\sqrt{6}}$ (۱)

نکته خارج از کتاب!: قرینه نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم:



۱۱۵. می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ارتفاع قوطی چند سانتی‌متر انتخاب شود تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

(کتاب درسی)

$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ (۴)

$\frac{20}{\sqrt[3]{\pi}}$ (۳)

$\frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\pi^2}}$ (۲)

$\frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\pi}}$ (۱)

۱۱۶. در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟ (ریاضی ۹۵)

$\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt[3]{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)



۱۱۷. هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت برابر $۳۲۰۷^۲$ تومان است. علاوه بر این سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر جابه‌جایی حداقل مقدار باشد؟

(کتاب درسی)

$$۲۰۰ \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (۴)$$

$$۱۰۰ \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (۳)$$

$$۲۵ \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (۲)$$

$$۵۰ \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (۱)$$



نکات بهینه‌سازی

(I) نکته‌ها:

$$\bigcirc = \square = \left\{ \begin{array}{l} \bigcirc + \square = A \\ \bigcirc \times \square : \text{Max} \end{array} \right.$$

$$\text{مثال: } x + y = 6 : \left\{ \begin{array}{l} xy : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \\ x^2 y^2 : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \\ x^2 y^2 : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \\ x^2 y^3 : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \end{array} \right.$$

$$\text{مثال: } x^2 + y^2 = 6 : \left\{ \begin{array}{l} xy : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \\ x^2 y^2 : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \end{array} \right.$$

$$\text{مثال: } 2x + y = 6 : \left\{ \begin{array}{l} xy : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \\ x^2 y^3 : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y = \end{array} \right.$$

$$\text{مثال: } x^2 + y = 6 : xy : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y =$$

$$\text{مثال: } x^2 + y = 6 : x^2 y^2 : \text{Max} \longrightarrow x = \quad y =$$



۱۱۸. بیشترین مساحت مستطیلی که محیط آن ۲۴ است. کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۱۴۴ (۲) ۷۲ (۳) ۱۸ (۴)

۱۱۹. از بین مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده‌ی آن ۱۲ سانتی‌متر است. بیشترین مساحت آن‌ها چند واحد مربع است؟

(تقریبی ۸۴)

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۱۸ (۴)

۱۲۰. دو عدد حقیقی را به گونه‌ای می‌یابیم که تفاضلشان برابر ۱۰ و حاصل ضربشان کم‌ترین مقدار ممکن شود. مجموع مربعات این دو عدد کدام است؟

(کتاب درسی)

- ۲۵ (۱) ۵۰ (۲) ۷۵ (۳) ۱۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

دو عدد را x و y فرض می‌کنیم و عبارتی را که قرار است مینیمم شود، با P نشان می‌دهیم، پس طبق فرض تست داریم:

$$P = xy \quad (۱) \quad (\text{عبارتی که قراره بهینه بشه})$$

حالا باید به دنبال یک رابطه‌ی کمکی برای کاهش مجهولات باشیم. زیاد فکر نکن، خود تست رابطه را داده:

$$\xrightarrow{\text{فرض تست}} x - y = 10 \xrightarrow{y \text{ رو پیدا کن}} y = x - 10 \quad (۲)$$

به کمک (۱) و (۲)، P را تک متغیره کن:

$$P = x(x - 10) = x^2 - 10x \xrightarrow{\text{مشتق}} P' = 2x - 10 = 0$$

$$k \quad 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \xrightarrow{\text{در (۲)}} y = 5 - 10 = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}} x^2 + y^2 = 5^2 + (-5)^2 = 25 + 25 = 50$$



۱۲۱. در کره‌ای به شعاع واحد، استوانه‌ای محاط می‌کنیم. ارتفاع استوانه چقدر باشد تا سطح جانبی آن ماکزیمم شود؟

$$\sqrt{3} \quad (۴)$$

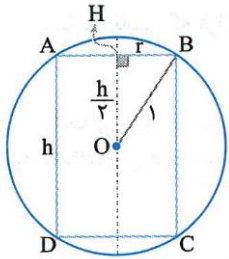
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

(۱) رسم شکل مناسب با داده‌های تست: برای راحتی کار، به جای کره یک دایره و به جای استوانه یک مستطیل در نظر می‌گیریم:



$$\begin{cases} OH = \frac{h}{2} \rightarrow \text{نصف ارتفاع استوانه} \\ OB = 1 \rightarrow \text{شعاع کره} \\ BH = r \rightarrow \text{نصف قاعده‌ی استوانه} \end{cases}$$

(۲) تشکیل تابعی که قراره بهینه بشه (سطح جانبی استوانه):

$$S = 2\pi r h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی استوانه} \quad (۱)$$

(۳) ایجاد رابطه‌ای برای کاهش تعداد مجهولات: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHB داریم:

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 1 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{1 - \frac{h^2}{4}} \quad (۲)$$

(۴) ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) و تشکیل تابع تک متغیره:

$$S = 2\pi h \sqrt{1 - \frac{h^2}{4}} \xrightarrow[\text{را ببر داخل رادیکال}]{h > 0 \text{ است}} S = 2\pi \sqrt{h^2 \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)} \xrightarrow{\text{ساده کن}} S = 2\pi \sqrt{h^2 - \frac{h^4}{4}} \quad (۳)$$

(۵) محاسبه‌ی مشتق از رابطه (۳) و تعیین طول نقطه‌ی بحرانی بهینه:

$$S' = 2\pi \times \frac{2h - \cancel{h^3}}{\sqrt{h^2 - \frac{h^4}{4}}} = 0 \Rightarrow 2h - h^3 = 0 \Rightarrow h(2 - h^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = 0 \rightarrow \text{غ ق ق} \\ 2 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 2 \begin{cases} h = -\sqrt{2} \rightarrow \text{غ ق ق (? چرا!)} \\ h = +\sqrt{2} \rightarrow \text{ارتفاع بهینه} \end{cases} \end{cases}$$

(تجربی ۱۴۰۰)

۱۲۲. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟

$$\frac{512\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{256\pi}{3} \quad (۳)$$

$$64\pi \quad (۲)$$

$$32\pi \quad (۱)$$





۱۲۳. بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۸)

۳۶ (۴)

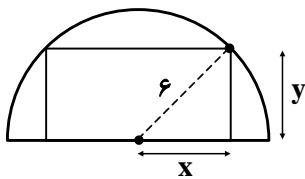
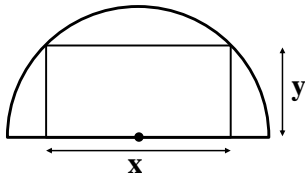
۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:



شکل فرضی را رسم می‌کنیم: قرار است $S = 2x \cdot y$ ماکزیمم شود.

قبل از مشتق‌گرفتن، لازم است این تابع را یک متغیره کرده و در واقع رابطه بین x و y را بیابیم. ببینید:

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 - x^2 \xrightarrow{0 < y} y = \sqrt{36 - x^2}$$

پس تابع مساحت به این صورت در می‌آید:

$$S = 2x \cdot y = 2x \sqrt{36 - x^2} = \sqrt{144x^2 - 4x^4}$$

$$S' = \frac{288x - 16x^3}{2\sqrt{144x^2 - 4x^4}} \rightarrow S' = 0 \Rightarrow 288x - 16x^3 = 0 \Rightarrow 16x(18 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x^2 = 18$$

با جایگذاری $x^2 = 18$ در تابع $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$ داریم:

$$S = 2\sqrt{18}\sqrt{36 - 18} = 2\sqrt{18}\sqrt{18} = 2 \times 18 = 36$$

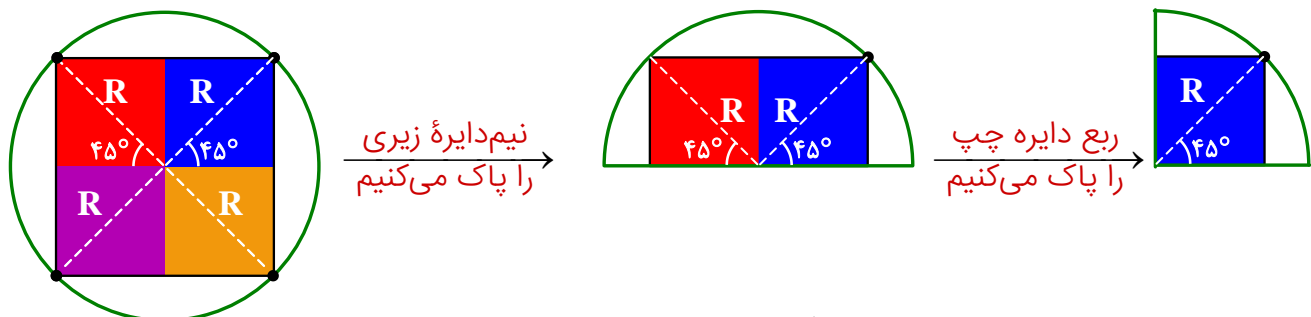
روش دوم:

نکته: ۱) داخل یک دایره به شعاع R بی‌شمار مستطیل می‌توان محاط کرد. بیشترین مساحت متعلق به مربع است (به شکل ۱ نگاه کنید).

۲) داخل یک نیم‌دایره به شعاع R بی‌شمار مستطیل می‌توان محاط کرد.

بیشترین مساحت متعلق به مستطیلی است که از دو مربع تشکیل شده است (به شکل ۲ نگاه کنید).

۳) داخل یک ربع دایره به شعاع R بی‌شمار مستطیل می‌توان محاط کرد بیشترین مساحت متعلق به مربع است (به شکل ۳ نگاه کنید).



نیم‌دایره زبری را پاک می‌کنیم

ربع دایره چپ را پاک می‌کنیم

$$S_{\text{مربع}} = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2 \xrightarrow{\text{نصف}} S_{\text{مستطیل}} = R^2 \xrightarrow{\text{نصف}} S_{\text{مربع}} = \frac{1}{2}R^2$$

با توجه به نکته (۲)، در این تست:

$$R = 6 \Rightarrow S_{\text{max}} = 6^2 = 36$$



۱۲۴. در بین مخروط هایی که طول مولد آن ها $3\sqrt{3}$ است، بیشترین حجم ممکن برای آن ها کدام است؟ (ریاضی ۸۱)

$$27\pi \quad (۴)$$

$$18\pi \quad (۳)$$

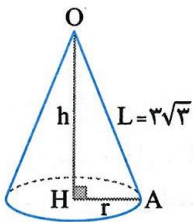
$$12\pi \quad (۲)$$

$$9\pi \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

فرآیند حل مسائل بهینه سازی را گام به گام اجرا کن:

(۱) رسم شکل:



(۲) تشکیل تابعی که قرار است ماکزیمم شود (حجم مخروط): (۱) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(۳) رابطه ای بین پارامترهای مجهول برقرار شود تا تعداد مجهولات کاهش یابد (پیتاغورس در مثلث OAH):

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow (3\sqrt{3})^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2 \quad (۲)$$

(۴) ترکیب رابطه های (۱) و (۲) و بیان حجم بر حسب یک متغیر:

$$V = \frac{1}{3}\pi(27 - h^2)h \xrightarrow{\text{ساده کن}} V = \frac{\pi}{3}(27h - h^3) \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} V' = \frac{\pi}{3}(27 - 3h^2) = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3 \rightarrow \text{طول نقطه ی ماکزیمم}$$

$$\xrightarrow{\text{در (۳)}} \max(V) = \frac{\pi}{3}(27 \times 3 - 3^3) = \frac{\pi}{3} \times 27(3 - 1) = 18\pi$$

۱۲۵. از بین مثلث های قائم الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از

(تجربی ۹۹)

دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

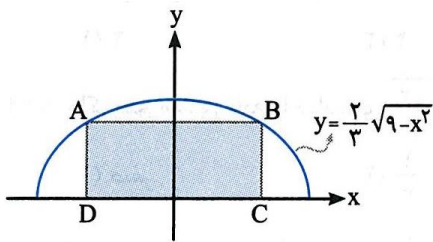
$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{1} \quad (۱)$$

خطرا!



۱۲۶. در شکل مقابل ABCD را حول محور x ها دوران می‌دهیم. بیشترین حجم استوانه‌ای قائم ایجاد شده چقدر است؟



$$\frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \quad (۱)$$

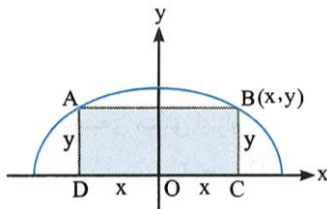
$$8\sqrt{3} \pi \quad (۲)$$

$$\frac{16\sqrt{3}}{3} \pi \quad (۳)$$

$$16\sqrt{3} \pi \quad (۴)$$

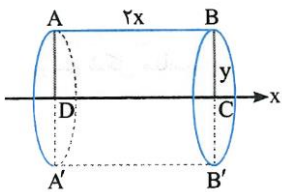
پاسخ: گزینه ۳

(۱) رسم شکل متناسب با داده‌های تست: اگر نقطه‌ی B را به صورت $B(x, y)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:



$$\begin{cases} BC = y \\ OC = x \end{cases} \Rightarrow DC = 2x$$

با دوران مستطیل ABCD حول محور x ها، استوانه‌ای به شکل مقابل ایجاد می‌شود:



(۲) تشکیل تابعی که قراره بهینه شود (حجم استوانه):

$$V = \pi r^2 h \xrightarrow[r=2x]{r=y} C = 2\pi y^2 x \quad (۱)$$

(۳) ایجاد رابطه‌ای بین x و y برای کاهش مجهولات: نقطه‌ی B روی منحنی $y = \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}$ قرار دارد، پس:

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \quad (۲)$$

(۴) ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) و تشکیل تابع تک متغیره:

$$V = 2\pi \left(\frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}\right)^2 x = 2\pi \times \frac{4}{9} (9-x^2) x$$

$$= \frac{8\pi}{9} (9x - x^3) \quad (۳)$$

(۵) محاسبه‌ی مشتق و تعیین طول نقطه‌ی بحرانی بهینه:

$$V' = \frac{8\pi}{9} (9 - 3x^2) = 0 \Rightarrow 9 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

با قرار دادن مقدار به دست آمده برای x در رابطه‌ی (۳) داریم:

$$\max(V) = \frac{8\pi}{9} (9 \times \sqrt{3} - (\sqrt{3})^3) = \frac{8\pi}{9} (9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = \frac{8\pi}{9} \times 6\sqrt{3} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$$



۱۲۷. بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها روی سهمی $y = 12 - x^2$ واقع می شود، کدام است؟

۱۶ (۴)

۲۰ (۳)

۳۲ (۲)

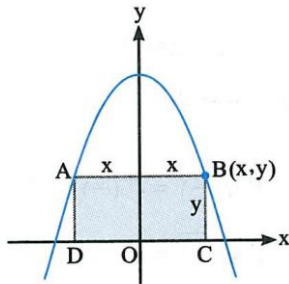
۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

(۱) رسم شکلی متناسب با داده های مسئله (محور y ها، محور تقارن سهمی و مستطیلی است)

(۲) تشکیل تابعی که قرار است ماکزیمم شود (مساحت مستطیل). (۱) $S = 2xy$

(۳) ایجاد رابطه ای برای کاهش مجهولات: نقطه B که یکی از رئوس مستطیل است بر روی سهمی قرار دارد، پس: $y = 12 - x^2$



(۴) ترکیب رابطه های (۱) و (۲) و بیان S بر حسب یک متغیر: (۳) $S = 24x - 2x^3$ $\xrightarrow{\text{ساده کن}}$ $S = 2x(12 - x^2)$

(۵) محاسبه مشتق و طول نقطه بحرانی: $S' = 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

$$\xrightarrow{\text{در (۳)}} \max(S) = 24 \times 2 - 2 \times 8 = 48 - 16 = 32$$

۱۲۸. بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12 - x}$ در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

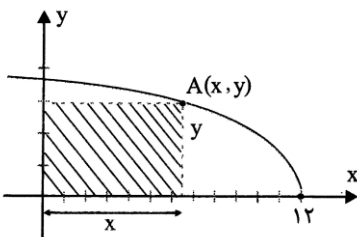
۸√۳ (۲)

۸√۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

یکی از بهترین روش ها برای حل این سؤال رسمه!

$\sqrt{12 - x}$ همون $\sqrt{-x}$ است که ۱۲ واحد جلو رفته!



$$S = xy = x\sqrt{12 - x}$$

چون بیشترین مساحت خواسته شده پس کافیست مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار بدیم:

$$S' = (1)\sqrt{12 - x} + \left(\frac{-1}{2\sqrt{12 - x}}\right)(x) = 0$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(12 - x) - x}{2\sqrt{12 - x}} = 0 \Rightarrow 24 - 3x = 0 \Rightarrow x = 8$$

$x = 8$ رو تو معادله $y = \sqrt{12 - x}$ جاگذاری می کنیم و $y = 2$ بدست میاد پس داریم:

$$S_{\max} = xy = 8 \times 2 = 16$$

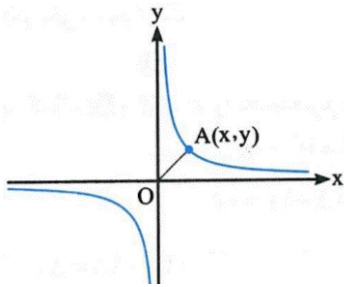


$$\bigcirc = \square = \leftarrow \begin{cases} \bigcirc \times \square = A \\ \bigcirc + \square : \text{Min} \end{cases}$$

مثال: $xy = 9$:

$$\begin{cases} x + y : \text{Min} \longrightarrow x = \quad y = \\ x^2 + y^2 : \text{Min} \longrightarrow x = \quad y = \end{cases}$$

مثال: $x^2 y^2 = 5$: $x^2 + y^2 : \text{Min} \longrightarrow x = \quad y =$



۱۲۹. کوتاه ترین فاصله ی نقاط منحنی $y = \frac{4}{x}$ تا مبدأ کدام است؟

۴ (۱)

۴√۲ (۲)

۲√۲ (۳)

۸√۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

فرآیند حل مسائل بهینه سازی را دنبال کن:

(۱) رسم شکل متناسب با داده های مسئله

(۲) تابعی را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود، بنویس: (۱) $P = OA = \sqrt{x^2 + y^2}$

(۳) یک رابطه ی کمکی بین x و y برای کاهش مجهولات در P برقرار کن:

نقطه ی A روی منحنی تابع $y = \frac{4}{x}$ قرار دارد، پس رابطه ی مورد نظر به صورت مقابل است: (۲) $y = \frac{4}{x}$

(۴) به کمکی (۱) و (۲)، P را تک متغیره کن: (۳) $P = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}$

(۵) برای پیدا کردن مینیمم P از رابطه ی (۳) مشتق می گیریم:

$$\xrightarrow{(۳)} P = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} P' = \frac{2x + \frac{0 - 16 \times 2x}{x^4}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{2x - \frac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{32}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{32}{x^3}$$

$$\Rightarrow 2x^4 = 32 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{در (۳)}} \min(P) = \sqrt{4 + \frac{16}{4}} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$$



۱۳۰. کمترین مقدار تابع $y = 3x^2 + \frac{27}{x}$ کدام است؟

$9\sqrt{3} \quad (۴)$

$۱۸ \quad (۳)$

$۸۱ \quad (۲)$

$۲۷ \quad (۱)$



(III) نکته ۳:

$$ax + by \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{O} + \square = A \\ \text{O} + \square : \text{Max or Min} \end{array} \right.$$

۱۳۱. اگر x و y دو ضلع قائم از یک مثلث قائم الزاویه به وتر ۵ باشند، بیشترین مقدار $2x + y$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

$$\sqrt{10} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{5} \quad (۳)$$

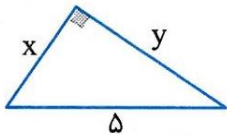
$$5\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$\sqrt{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

فرآیند حل مسائل بهینه‌سازی را انجام بده:

(۱) رسم شکلی متناسب به داده‌های مسئله:



(۲) تشکیل تابعی که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود: $P = 2x + y$

(۳) یک رابطه‌ی کمکی برای کاهش مجهولات بنویس:

$$\text{رابطه‌ی فیثاغورس } x^2 + y^2 = 25$$

(۴) با توجه به (۲) و (۳) P را به صورت یک تابع تک‌متغیره بنویس:

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2 \xrightarrow[\text{مثبت است}]{\text{ضلع مثلث}} y = \sqrt{25 - x^2} \xrightarrow[\text{در } P]{\text{جای‌گذاری}} P = 2x + \sqrt{25 - x^2} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}} P' = 2 + \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2 = \frac{x^2}{25 - x^2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} 100 - 4x^2 = x^2$$

$$\Rightarrow 100 = 5x^2 \xrightarrow{\div 5} x^2 = 20 \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \text{طول نقطه‌ی ماکزیمم}$$

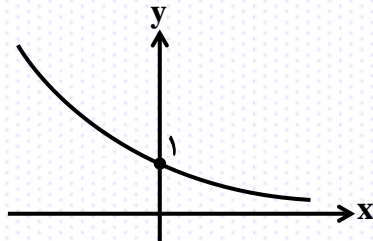
در P قرار بده تا بیشترین مقدار $2x + y$ به دست آید:

$$P = 2x + y = 2x + \sqrt{25 - x^2} \xrightarrow{x = 2\sqrt{5}} P = 2 \times 2\sqrt{5} + \sqrt{25 - 20} = 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$



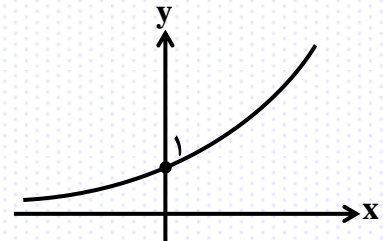
تابع نمایی

$$y = a^x \quad (0 < a) \neq 1$$



$$0 < a < 1$$

نزولی



$$a > 1$$

صعودی

دامنه:

برد:

عرض از مبدأ:

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty : \\ x \rightarrow -\infty : \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty : \\ x \rightarrow -\infty : \end{cases}$$

مثال: کدامیک از توابع زیر نمایی است؟

۱) $y = x^2$

۳) $y = 2^x$

۶) $y = (-2)^x$

۲) $y = \sqrt{x}$

۴) $y = 2^{-x}$

۷) $y = \left(\frac{-1}{2}\right)^x$

۵) $y = 3^{x+1}$

یادآوری قوانین توان:

۱) $(2^x)^2 = (2^2)^x = 2^{2x} = 4^x$

۲) $2^x \times 3^x =$

• $3^{2x+3} =$

۳) $2^x \times 2^y =$

• $3^x + 15^x =$



۱. در تجزیه‌ی یک ماده‌ی رادیواکتیو، وزن ماده در هر لحظه از رابطه‌ی $f(t) = Aa^t$ به دست می‌آید که در آن $f(t)$ وزن ماده پس از t ساعت و A وزن اولیه‌ی آن است. اگر بدانیم که وزن آن پس از ۳ ساعت $\frac{1}{64}$ وزن اولیه شده است، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۲. به ازای چند مقدار از a ، نقطه‌ی برخورد نمودار تابع نمایی $y = 3a^{1-2x} + 2$ با محور y ‌ها از مبدأ مختصات، فاصله‌ای برابر ۴ واحد دارد؟

- (۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک

خطر! **خطر!**

مثال: مطلوبست رسم نمودارهای زیر:

۳) $y = |(\frac{1}{2})^x - 1|$

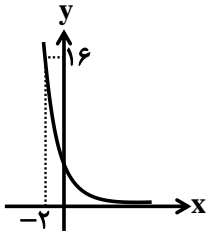
۴) $y = (a^2 + 1)^{-|x|}$

۵) $y = 5(\frac{3^x + 9^x}{2^x + 6^x})$



۶. با توجه به نمودار تابع نمایی $f(x) = a^{2-x}$ ، مقدار تابع به ازای $x = 8$ چقدر است؟

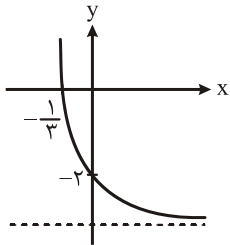
(کتاب درسی)



- (۱) $\frac{1}{32}$
- (۲) $\frac{1}{64}$
- (۳) $\frac{1}{12}$
- (۴) $\frac{1}{36}$

۷. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

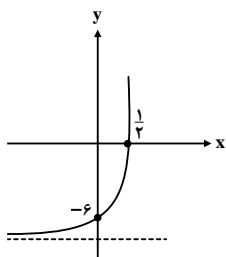
(تجربی ۹۹)



- (۱) ۵۴
- (۲) ۶۰
- (۳) ۴۸
- (۴) ۲۸

۸. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{ax+b}$ است. $f(2)$ کدام است؟

(تجربی قارج ۹۹)



- (۱) ۲۳۴
- (۲) ۱۰۸
- (۳) ۷۲
- (۴) ۱۸

۹. معادله $x^2 = 2^x$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(کتاب درسی)

- (۱) چهار
- (۲) سه
- (۳) دو
- (۴) یک

خطر!



مثال: مطلوبست وضعیت یکنوایی توابع زیر:

۱۰) $y = (\frac{1}{2\sqrt{2}-2})^x$

۱۲) $y = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{2-x}$

۱۵) $y = -(\sqrt{2})^{2x+1}$

۱۱) $y = 2^{x-1}$

۱۳) $y = (\frac{\pi}{3})^{2-x}$

۱۶) $y = -(\frac{\sqrt{3}}{\pi})^{-2x+3}$

۱۵) $y = (\frac{a^2+3}{a^2+2})^{-2x+1}$

نتیجه: تعیین یکنوایی تابع نمایی:

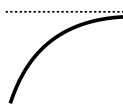
چی مهمه!؟

$\left\{ \begin{array}{l} a \\ x \end{array} \right.$ رو برعکس می کنه \rightarrow منفی پشت x
 منفی پشت تابع

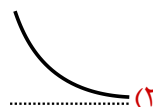
۱۷. هرگاه تابع $f(x) = (a^2 - 4)x + (a + 1)^{x+2}$ یک تابع نمایی باشد، نمودار تابع $g(x) = (\frac{2a-2}{2a-3})^x$ به کدام شکل

زیر شبیه است؟

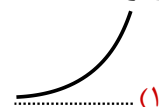
(۴) گزینه‌ی ۱ یا ۲



(۳)



(۲)



(۱)



۱۸. با کدام شرط، رابطه‌ی $y = (a^2 - a - 1)^x$ یک تابع نمایی صعودی است؟

(۴) $a > 2$ یا $a < -1$

(۳) $a < -1$

(۲) $a > 2$

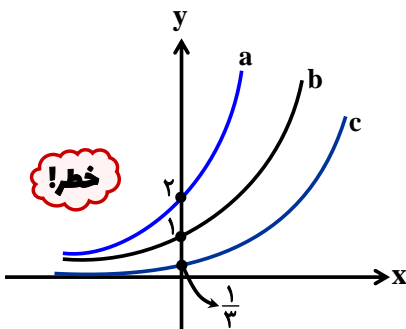
(۱) $-1 < a < 2$



جانمایی نمودارهای نمایی نسبت به هم

(I) یک تابع نمایی و انتقال یافته‌هایش

۱۹. در شکل مقابل، نمودار سه تابع نمایی رسم شده است. اگر ضابطه‌ی نمودار b به صورت $y = 3^x$ باشد، ضابطه‌های a و c به ترتیب کدام می‌توانند باشند؟ (هر سه نمودار به محور x ها نزدیک و نزدیک تر می‌شوند).
(کتاب درسی)



$$y = 3^{x-1}, y = 2 \times 3^x \quad (1)$$

$$y = \frac{3^x}{3}, y = 3^x + 1 \quad (2)$$

$$y = 3^x - \frac{2}{3}, y = 3^x + 1 \quad (3)$$

$$y = 3^x - \frac{2}{3}, y = 2 \times 3^x \quad (4)$$

۲۰. نمودار کدام تابع بالاتر از بقیه‌ی نمودارهاست؟

$$y = 4(3)^{2x-2} \quad (4)$$

$$y = 9^x \quad (3)$$

$$y = 3^{2x+1} \quad (2)$$

$$y = 3^{2x-1} \quad (1)$$



(II) چند تابع نمایی مختلف

مثال: مطلوبست رسم نمودارهای زیر در یک دستگاه مختصات:

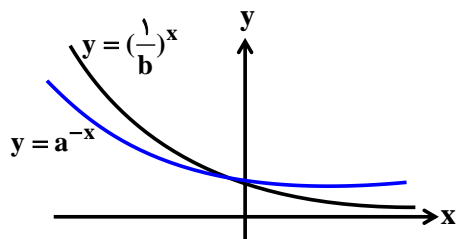
۲۱) $y = 2^x$, $y = 3^x$

۲۲) $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$

نتیجه: تعیین بالاتر، پایین تر بودن نمودارهای توابع نمایی نسبت به هم:

در $x < 0$ هر کی a بزرگ تره ←
در $x > 0$ ← برعکس

(کتاب درسی)



۲۳. با توجه به نمودار توابع $y = (\frac{1}{b})^x$ و $y = a^{-x}$ کدام رابطه درست است؟

- (۱) $b > a > 1$
- (۲) $a > b > 1$
- (۳) $0 < a < b < 1$
- (۴) $0 < b < a < 1$

۲۴. در بازه $(-1, 0)$ نمودار کدام تابع، پایین تر از بقیه قرار می گیرد؟

- (۱) $y = (\frac{3}{4})^{-x}$
- (۲) $y = (\frac{3}{4})^x$
- (۳) $y = (\frac{1}{8})^{\frac{x}{2}}$
- (۴) $y = (\frac{5}{4})^{2x}$



یه نکته مهم در مورد تابع نمایی

کاربرد نمایی در مسائل واقعی: باکتری

x	دنباله حسابی
$y = a^x$	

مثال: با توجه به جدول مقابل، مطلوبست:

x	۰	۴	۸	۱۲
y	۲/۵	۵	۱۰	۲۰

● $f(۱۶) = ?$

● $f(۷) = ?$

● $f(۱۰) = ?$

۲۵. در یک محیط کشت باکتری، در ابتدای کار ۲۰۰۰ باکتری موجود است. اگر پس از ۲ ساعت تعداد باکتری‌ها به ۸۰۰۰ برسد، پس از ۴ ساعت از شروع کار تعداد باکتری‌ها چقدر خواهد بود؟

- (۱) ۱۲۰۰۰
- (۲) ۱۶۰۰۰
- (۳) ۲۴۰۰۰
- (۴) ۳۲۰۰۰

* در چه زمانی تعداد باکتری‌ها برابر با ۱۲۸۰۰۰ خواهد بود؟

۲۶. در یک کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t دقیقه پس از شروع، از مدل $v(t) = Be^{kt}$ پیروی می‌کند. اگر پس از ۳ دقیقه تعداد باکتری‌ها دو برابر شود با این روند در پایان دقیقه ۱۲ تعداد آن‌ها چند برابر تعداد شروع آزمایش می‌شود؟

(تقریبی ۱۹)

- (۱) ۴
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۱۶



۲۷. جدول زیر معرف اندازه‌ی توده‌ی باکتری E.coli بعد از t ساعت است. تعداد باکتری‌ها بعد از گذشت ۶ ساعت برابر کدام گزینه خواهد بود؟

(کتاب درسی)

t	۰	۰/۵	۱	۱/۵
$p(t)$	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰	۸۰۰

(۱) 100×2^3

(۲) 100×2^6

(۳) 100×2^{12}

(۴) 100×2^8

۲۸. تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است. اگر تعداد باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه بیستم ۳۲۰۰ باشد، در دقیقه سی‌ام تعداد آن‌ها کدام است؟

(تجربی ۹۲)

(۴) ۷۲۰۰

(۳) ۶۴۰۰

(۲) ۵۶۰۰

(۱) ۴۸۰۰

۲۹. در کشت نوعی باکتری، پس از ۲ ساعت جرم باکتری‌ها ۵ برابر شده است. افزایش جرم این باکتری از رابطه‌ی $f(t) = ma^t$ پیروی می‌کند که در آن m جرم اولیه و $f(t)$ جرم پس از t ساعت است. بعد از گذشت ۳ ساعت از زمان کشت، جرم باکتری‌ها چند برابر می‌شود؟

(۴) $\sqrt{5}$

(۳) $\sqrt[3]{25}$

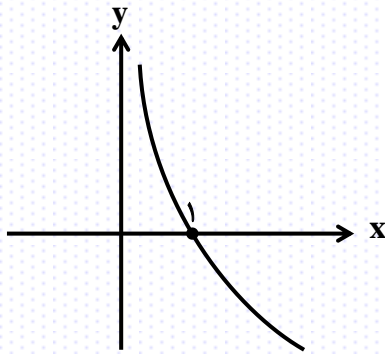
(۲) $\sqrt{125}$

(۱) ۵



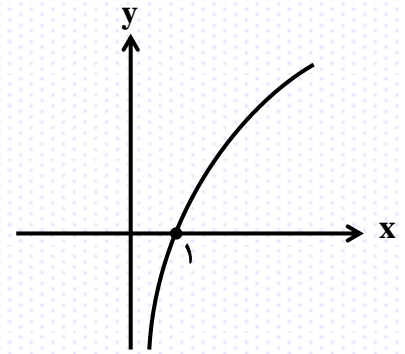
تابع لگاریتم

$$y = a^x \xrightarrow{\text{وارون}} x = a^y \xleftarrow{\text{زشت}} y = \log_a^x \quad (0 < a \neq 1)$$



$$0 < a < 1$$

نزولی



$$1 < a$$

صعودی

دامنه:

برد:

طول از مبدأ:

نکته مهم در مورد یکنوایی وارون یک تابع

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty : \\ x \rightarrow 0^+ : \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty : \\ x \rightarrow 0^+ : \end{cases}$$

(کتاب درسی)

۳۰. اگر $f(x) = 3 - 2 \log_4\left(\frac{x}{2} - 5\right)$ مقدار $f(42)$ کدام است؟

۷ (۴)

-۵ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۳۱. حاصل عبارت $A = \frac{1}{1 + \log_b a} + \frac{1}{1 + \log_a b}$ کدام است؟ $5^2 \log_a b$ (۴) $2 \log_b a$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



۲۲. اگر بدانیم $\log_3 A = -10/82$ است، عدد $\sqrt[4]{A}$ در کدام بازه‌ی زیر قرار می‌گیرد؟

- (۱) $(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$ (۲) $(\frac{1}{27}, \frac{1}{9})$ (۳) $(\frac{1}{81}, \frac{1}{27})$ (۴) $(\frac{1}{243}, \frac{1}{81})$

(ریاضی ۹۱)

۲۳. اگر $3^a = A$ باشد، مقدار $\log_3 9A^2$ کدام است؟

- (۱) $2+2a$ (۲) $3+2a$ (۳) $2+a^2$ (۴) $3+a^2$

۲۴. با فرض $\log_y x = \frac{3}{2}$ ، حاصل $\log \sqrt{y} xy^2$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۵. اگر $\log_2 x = k$ باشد، آن‌گاه حاصل لگاریتم $\sqrt[6]{2x}$ در مبنای ۲ چقدر است؟

- (۱) $\frac{k}{6}$ (۲) $\frac{k+1}{6}$ (۳) $\frac{k}{3}$ (۴) $\frac{k+1}{3}$



۳۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a + \log_2(3x + b)$ از دو نقطه‌ی $(5, 1)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد. a کدام است؟ (ریاضی قاجار ۹۶)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



۳۷. تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ ، آن‌گاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام

(ریاضی ۹۴)

است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

مثال: مطلوبست رسم نمودارهای زیر:

۳۸) $y = \log(x + 1)$

۳۹) $y = -\log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$

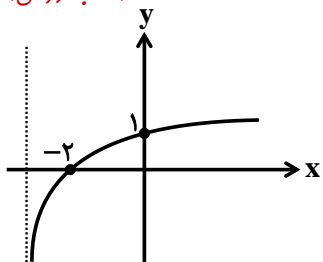


۴۰. نمودار تابع $f(x) = \log(x+2)$ و $g(x) = -\log(1-x)$ در چند نقطه متقاطع اند؟

- (۱) دو
- (۲) یک
- (۳) صفر
- (۴) سه

(کتاب درسی)

۴۱. شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \log_b(ax+3)$ را نمایش می دهد. حاصل $f(6)$ کدام است؟



(۱) ۲

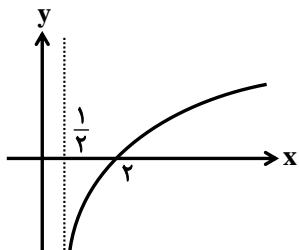
(۲) ۳

(۳) $\frac{9}{2}$

(۴) $\frac{11}{2}$

۴۲. شکل زیر، نمودار تابع $y = -1 + \log_b(2x+a)$ است. این منحنی خط $y = 1$ را با کدام طول، قطع می کند؟

(تجربی قاج ۹۸)



(۱) ۴

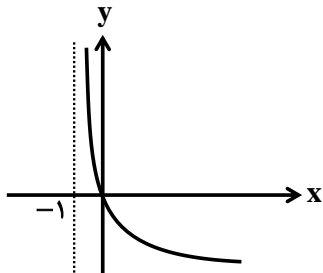
(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

(تجربی ۹۸)

۴۳. شکل زیر، نمودار تابع $y = \log_2 U(x)$ است. کدام است $U(x)$ ؟



(۱) $x+1$

(۲) $(x+1)^{-1}$

(۳) $x-1$

(۴) $1-x$



مثال: مطلوبست وضعیت یکنوایی توابع زیر:

$$۴۴) y = \log_{\sqrt{3}} x$$

$$۴۵) y = \log_{\frac{1}{4}}(-x + 3)$$

$$۴۶) y = -\log_{\frac{1}{2}} x$$

نتیجه: تعیین یکنوایی تابع لگاریتم:

دقیقاً مانند توابع نمایی!

۴۷. کدام گزینه درست است؟

$$\log_{\frac{1}{5}} 3 > \log_3 2 \quad (۲)$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 3 > \log_{\frac{1}{5}} 2 \quad (۴)$$

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{10} > \log_{\frac{1}{5}} 100 \quad (۱)$$

$$\log_5 3 > \log_3 5 \quad (۳)$$

نامساوی‌های لگاریتمی ← تعیین یکنوایی لگاریتم

۴۸. اگر $a = \log_{\frac{1}{3}} 4$ ، $b = \log_{\frac{1}{9}} 6$ و $c = \log_{\frac{1}{3}} 5$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$$b < c < a \quad (۴)$$

$$a < b < c \quad (۳)$$

$$a < c < b \quad (۲)$$

$$c < a < b \quad (۱)$$



جانمایی نمودارهای لگاریتمی نسبت به هم

مثال: مطلوبست رسم نمودارهای زیر در یک دستگاه مختصات:

۴۹) $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$

۵۰) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



نتیجه: تعیین بالاتر، پایین تر بودن نمودارهای توابع لگاریتمی نسبت به هم:

در $x < 1$ هرکی a بزرگ تره ←
 در $x > 1$ برعکس ←



کاربرد لگاریتم در مسائل واقعی: زلزله

یه نکته مهم در مورد لگاریتم

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

انرژی آزاد شده (ارگ) عدد زلزله (ریشتر)

مثال:

۵۱. برجی با قدرت مقاومت در برابر زلزله ۸ ریشتری، چقدر انرژی آزاد شده را تحمل می کند؟

۵۲. انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶ ریشتری چند برابر یک زلزله ۴ ریشتری است؟

۵۳. اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله، $10^{14/8}$ باشد، عدد زلزله برحسب ریشتر چقدر است؟



قوانین لگاریتم

$$1) \log_b n a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

توانی → برعکس، رادیکالی، گنده

۱) $\log_2 256 =$

۲) $\log \sqrt[3]{7} =$

۳) $\log \frac{1}{13} =$

$$2) \log_c a \times b = \log_c a \pm \log_c b$$

تقسیم → اعشاری

۴) $\log_2 2/6 =$

$$1) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} = \frac{\log a}{\log b}$$

$$\xrightarrow{\text{نتیجه}} = \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

تغییر مبنا

۵) $\log_3 2 =$

۵۴. کدام گزینه معادل $\log_{\frac{1}{b}} a$ نیست؟

(۴) $-\log_{\frac{1}{b}} a$

(۳) $\log_b \frac{1}{a}$

(۲) $-\log_b a$

(۱) $(\log_b a)^{-1}$

۵۵. نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2(\frac{1}{x})$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

(تعبیری خارج ۹۱)

(۴) فقط در یک نقطه متقاطع‌اند.

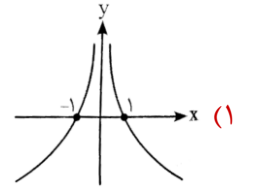
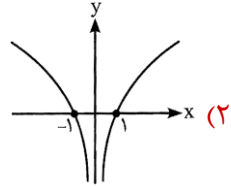
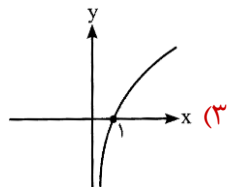
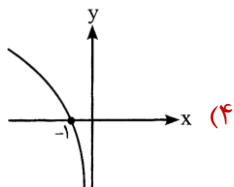
(۳) منطبق‌اند.

(۲) $g(x)$ بالاتر

(۱) $f(x)$ بالاتر

خطر!

۵۶. نمودار تابع $y = -\log_2 \frac{1}{x^2}$ کدام است؟





۵۷. لگاریتم x در مبنای a برابر لگاریتم $x^{\frac{2}{3}}$ در مبنای b است. کدام رابطه‌ی زیر برقرار است؟

(۱) $2a = 3b$ (۲) $3a = 2b$ (۳) $a^2 = b^3$ (۴) $a^3 = b^2$

۵۸. y تابعی از x بوده و در رابطه‌ی $\log_x y + \log_x \sqrt{y} = \frac{3}{2}$ صدق می‌کند. نمودار y بر حسب x ، نیمساز کدام ناحیه است؟

(۱) اول (۲) چهارم (۳) اول و سوم (۴) دوم و چهارم



۵۹. اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 10x + \frac{1}{10} = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b + \log(a+b)$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) صفر (۴) 1

(تقریبی قارج ۱۵)

۶۰. در رابطه‌ی $\log_b a = \log_a b$ ، اگر $a, b > 0$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) $ab = 1$ (۲) $a = b$ (۳) $b = \sqrt{a}$ (۴) $a = b$ یا $ab = 1$



۶۱. با فرض $\frac{1}{2} = \frac{1}{\log_x 5} + \frac{1}{\log_y 5} + \frac{1}{\log_z 5}$ ، حاصل عبارت $\log_{\sqrt[4]{xyz}} 25$ چقدر است؟

(۱) 16 (۲) 1 (۳) 4 (۴) $\frac{1}{16}$



۶۲. ساده شده‌ی عبارت $2(2\log_2 3 + \log_2 5)$ برابر است با:

۹۰ (۴)

۳۰ (۳)

۴۵ (۲)

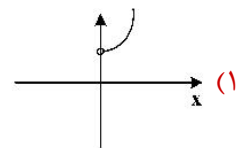
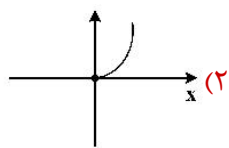
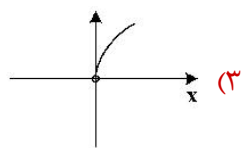
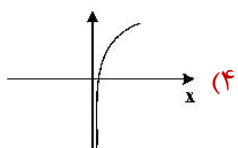
۴۰ (۱)

یادآوری: ترکیب تابع و وارونش:

$$f \circ f^{-1}(x) = x \rightarrow a^{\log_a b} = b$$

(ریاضی ۱۴۰۰)

۶۳. نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ کدام است؟



۶۴. اگر حاصل عبارت $\log_{\sqrt{2}} 100 - 2$ برابر با $\frac{64}{k}$ باشد، کدام است k (۵/۱۲۵)؟

۱۰^{۱۲} (۴)

۱۰^{-۱۲} (۳)

۱۰^{۱۸} (۲)

۱۰^{-۱۸} (۱)



محاسبه مقادیر لگاریتم

۱- تعریف

۲- فرمول

۳-

قانون ویژه آریائوف!! (لَعْنَتُ بَرِّ مُفْسِدِينَ!)

$$\log \bigcirc = \square / \triangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow \{ \\ 2 \rightarrow \{ \\ 3, 4, 5, 6 \rightarrow \\ 7, 8, 9 \rightarrow \end{array} \right.$$

۶۵) $\log_4 64 =$

۶۶) $\log_{(1+\sqrt{2})} (3+2\sqrt{2})^3 =$

۶۷) $[\log_8 9] + [\log_9 8] =$

۶۸) $\log_2 \sqrt[3]{8} =$

۶۹) $\log_8 256 =$

۷۰) $\log_{29} \frac{1}{7} =$

۷۱) $\log_2 \frac{1}{9} + \log_2 \frac{9}{10} + \log_2 \frac{10}{11} + \dots + \log_2 \frac{31}{32} =$

۷۲) $\log_6 2 \times \log_5 3 \times \log_{49} 216 \times \log_{27} \sqrt{7} \times \log_{16} 25 =$



۷۳) $\log 6 =$

۷۴) $\log_{25} 10 =$

۷۵) $[\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}] =$

۷۶) $\log 913 =$

۷۹) $\log 123 =$

۷۷) $\log 65312 =$

۸۰) $\log \sqrt[3]{1990} =$

۷۸) $\log 3871 / 23 =$

۸۱) $\log_{2.2} 28712 / 1 =$

نیا

۸۲. حاصل عبارت لگاریتمی $A = \log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \dots \times \log_{100} 99$ چقدر است؟

$$2(1 - \log 5) \quad (4) \quad 2(\log 5 - 1) \quad (3) \quad \frac{1}{2}(1 - \log 5) \quad (2) \quad \frac{1}{2}(\log 5 - 1) \quad (1)$$

۸۳. حاصل عبارت $(\log_6 2)^2 + (\log_6 12)(\log_6 3)$ برابر است با:

$$2 \log_6 3 \quad (1) \quad (\log_{12} 6)^2 \quad (2) \quad 1 + \log_{12} 6 \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$



(ریاضی ۱۴۰۰)

۸۴. حاصل عبارت $(\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147)\log_{21}(1323)$ ، کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$A = (\log_{21} 3)^2 + \log_{21} 147 \times \log_{21} 1323$$

(۱) مبنای همه لگاریتم ۲۱ است. پس ۱۴۷ و ۱۳۲۳ را بر ۲۱ تقسیم می‌کنیم و آن‌ها را به صورت مضارب ۲۱ می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 1323 \mid 21 \\ 126 \quad 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \qquad \qquad \qquad 21 \times 3 \\ \Rightarrow 1323 = 21^2 \times 3 \Rightarrow 1323 = 21 \times 63 \\ \hline 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

(۲) در A جایگزین می‌کنیم:

$$(\log_{21} 3)^2 + \log_{21} 21 \times 7 (\log_{21} 21^2 \times 3)$$

$$A = (\log_{21} 3)^2 + \overset{1}{\cancel{\log_{21} 21} + \log_{21} 7} (\overset{2}{\cancel{\log_{21} 21^2} + \log_{21} 3})$$

$$\Rightarrow A = (\log_{21} 3)^2 + (1 + \log_{21} 7)(2 + \log_{21} 3)$$

(۳) دو تا لگاریتم داریم: یکی $\log_{21} 3$ و دیگری $\log_{21} 7$.

از طرفی $3 \times 7 = 21$ است. برای سهولت در محاسبات $\log_{21} 3$ را x و $\log_{21} 7$ را y می‌نامیم:

$$\underbrace{\log_{21} 3}_x + \underbrace{\log_{21} 7}_y = \log_{21} 3 \times 7 = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - x}^*$$

(۴) x و y را در A جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow A = x^2 + \overset{*(1-x)}{\uparrow} (1+y)(2+x) \Rightarrow A = x^2 + \underbrace{(2-x)(2+x)}_{\text{مزدوج: } 4-x^2}$$

$$\Rightarrow A = x^2 + (4 - x^2) = 4$$

پس گزینه «۴» صحیح است.



تیپ ۲

۸۵. اگر $\log_2 12 = \alpha$ باشد، عدد $4^{\alpha-2}$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)

(تقریبی ۱۷)

۸۶. اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آن گاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه 8 کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

(ریاضی ۹۰)

۸۷. اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{5/25}$ در مبنای 8 برابر A باشد، آن گاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A} - 1)$ در پایه 4 کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

-3 (۱)



۸۸. اگر لگاریتم 9 را m فرض کنیم، حاصل $\log \sqrt[3]{7/29}$ بر حسب m کدام خواهد بود؟

$m + \frac{2}{3}$ (۴)

$m - \frac{2}{3}$ (۳)

$m - \frac{1}{3}$ (۲)

$m + \frac{1}{3}$ (۱)



۸۹. هرگاه $\log_2(64!) = a$ باشد، حاصل $\log_2(63!)$ بر حسب a کدام است؟

(۴) $a - 4$

(۳) $a + 6$

(۲) $a - 6$

(۱) $6a$

۹۰. هرگاه $\log_2 \sqrt{x} = \log_2 64$ باشد، حاصل $\log_x 100$ کدام است؟ ($\log 2 = 0.3$)

(۴) ۵

(۳) $\frac{10}{18}$

(۲) $\frac{1}{5}$

(۱) $\frac{20}{9}$

۹۱. اگر $\log 6 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log 25$ کدام است؟

(۴) $2(1 - a - b)$

(۳) $2(1 - a + b)$

(۲) $2(1 + a + b)$

(۱) $2(1 + a - b)$

(تجربی ۹۰)

۹۲. اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ ، کدام است؟

(۴) $2 + 4k$

(۳) $1 + k$

(۲) $4k$

(۱) $2k$



(تقریبی قارج ۹۰)

۹۳. اگر $\log_5 = 2k$ ، آن گاه $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

۱ - k (۴)

۱ - ۲k (۳)

۲ - ۵k (۲)

۱ - ۴k (۱)

۹۴. اگر $\log_2 = m$ و $\log_3 = n$ ، آن گاه $\log_5 6$ کدام است؟

$\frac{m+n}{m-n}$ (۴)

$\frac{m+n}{1-m}$ (۳)

$\frac{1-m}{m+n}$ (۲)

$\frac{mn}{m+n}$ (۱)



۹۵. اگر $\log_{12} 3 = a$ باشد، آن گاه حاصل $\log_3 2$ کدام است؟

$\frac{a-1}{a}$ (۴)

$\frac{1-a}{a}$ (۳)

$\frac{1-a}{2a}$ (۲)

$\frac{a-1}{2a}$ (۱)

۹۶. اگر $\log_{12} 4 + \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = a$ باشد، حاصل $\log_{12} 16 + \log_{12} 6 + \log_{12} 3$ کدام است؟

$2a+1$ (۴)

$a+1$ (۳)

$a+2$ (۲)

a (۱)



(ریاضی ۱۴۰۰)

۹۷. فرض کنید $\log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1$ مقدار x ، کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $\frac{17}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\left| \begin{array}{cc} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{array} \right| \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1$$

(۱) ابتدا دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\left| \begin{array}{cc} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{array} \right| = (\log 5)^2 - (\log 2)^2$$

(نکته ۱)

اتحاد مزدوج $\rightarrow (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = \log \frac{5}{2}$

$\log \frac{5}{2}$ $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$

(نکته ۲) (نکته ۳ و ۴)

(۲) در معادله اصلی جایگزین می‌کنیم:

(نکته ۵)

$$\log \frac{5}{2} \log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1 \Rightarrow \log(3x-2) = 1$$

(نکته ۶) $\rightarrow (3x-2) = 10 \Rightarrow x = 4$

پس گزینه «۳» صحیح است.
توضیح بیشتر و تشریح و آموزش نکات این تست:

نکته ۱: محاسبه دترمینان:

$$\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = ad - bc$$

$$\log_b a_1 - \log_b a_2 = \log_b \frac{a_1}{a_2} \quad \text{نکته ۲:}$$

$$\log_b a_1 - \log_b a_2 = \log_b a_1 a_2 \quad \text{نکته ۳:}$$

$$\log_b b = 1 \quad \text{نکته ۴:}$$

$$\log_b \sqrt{a} - \log_b \sqrt{c} = \log_b c \quad \text{نکته ۵:}$$

$$\log_b a = c \Rightarrow a = b^c \quad \text{نکته ۶:}$$



تیپ ۳

(تجربی قاج ۹۹)

۹۸. اگر $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ باشد، آن گاه $\log_{18} 8$ ، کدام است؟

۳/۴ (۴)

۸/۱۱ (۳)

۵/۷ (۲)

۱۵/۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

در این تست، مبنای داده‌ی طراح (اطلاعات مسئله) یعنی، عدد ۳ است. $\log_{18} 8$ را تغییر مبنا در مبنای ۳ می‌بریم تا شبیه داده‌ی مسئله شود:

$$\log_{18} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2 \times 3^2} = \frac{3 \log_3 2}{\log_3 2 + 2 \log_3 3} = \frac{3 \times (\frac{5}{8})}{(\frac{5}{8}) + 2 \times 1} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{5}{8} + 2}$$

صورت و مخرج کسر را در ۸ ضرب می‌کنیم:

$$= \frac{15}{5+16} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

(تجربی ۹۹)

۹۹. اگر $\log_4 3 = 0/8$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ ، کدام است؟

۷/۹ (۴)

۳/۴ (۳)

۸/۱۱ (۲)

۱۳/۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

در این سؤال $\log_4 3 = 0/8$ را داده و مقدار $\log_{12} 6$ را خواسته. پس باید سعی کنیم $\log_{12} 6$ را بر حسب $\log_4 3$ بنویسیم. برای این منظور سعی می‌کنیم $\log_{12} 6$ را به تدریج هم‌رنگ $\log_4 3$ کنیم.

تنها چیزی که داریم $\log_4 3$ است که مبنایش ۴ می‌باشد. پس $\log_{12} 6$ را تغییر مبنا می‌دهیم تا مبنایش ۴ شود:

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_4 6}{\log_4 12}$$

$$\frac{\log_4 3 + \log_4 2}{\log_4 3 + \log_4 4} = \frac{0/8 + \frac{1}{2}}{0/8 + 1} = \frac{1/3}{1/8} = \frac{13}{18}$$

نکته: می‌دانیم:

۱) $\log_b a^n = n \log_b a$

۲) $\log_b m^a = \frac{1}{m} \log_b a$

۳) $\log_a a = 1$

$$\log_4 4 = 1, \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

بنابراین:



نامعادلات نمایی و لگاریتمی

(۱)

(۲) پایه‌های یکسان / توجه به وضعیت یکنوایی

خواست به دامنه لگاریتم باشه

۱۰۰. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_2(x^2 - 4x) - 5 > 0$ کدام است؟

(۲) $(4, +\infty)$

(۱) $(0, 4)$

(۴) $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -4) \cup (8, +\infty)$

مثال: مطلوبست حل نامعادلات زیر:

۱۰۱) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^x$

۱۰۲) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \leq 3^{1-x}$

۱۰۳) $(7 + 4\sqrt{3})^{2x^2 - 4x} < (7 - 4\sqrt{3})^{2-x}$



$$۱۰۴) (۰/۰۴)^{\frac{1}{2}} x^2 - 3x > 3125$$

$$۱۰۵) \log_2(2x-1) < \log_2 x$$

$$۱۰۶) \log_2(2x-1) < 2 \log_2 x$$

خطرا!

$$۱۰۷) \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-4}{8} \geq 1$$



۱۰۸. چند عدد طبیعی در نامعادله $-1 < \log_{\frac{25}{2}}(2x-3) < -2$ صدق می‌کند؟

- (۱) شش (۲) هفت (۳) هشت (۴) پنج



۱۰۹. اگر دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{\log_5(x^2 - x) - 1}{5}}$ را به صورت $D_f = [m, 0) \cup (1, n]$ بیان کنیم، مقدار $n + m$ چقدر خواهد بود؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{45}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{45}}{5}$ (۴) ۱



۱۱۰. برد تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{12 + \sqrt{|x|} - |x|}\right) - 1$ برابر $(\log_2 3, \log_2 5)$ باشد، دامنه تابع f ، کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

- (۱) $[3, 9)$ (۲) $[3, 8]$ (۳) $[2, 9)$ (۴) $[2, 8]$



معادلات نمایی

(۱)

پایه‌های یکسان ←

(۲)

پایه‌های یکسان با حضور عدد ثابت مزاحم ←

پایه‌ها غیر یکسان ←

خواست به جواب‌های منفی باشه!

۱۱۱. مجموعه جواب معادله $3^x + |x-3| = 27$ کدام است؟

(۴) $(-\infty, 3]$

(۳) $[3, +\infty)$

(۲) $(-\infty, 3)$

(۱) $(3, +\infty)$

مثال: مطلوبست حل معادلات زیر:

$$112) 4^{2x+2} = \frac{1}{(64)^3}$$

(کتاب درسی)

$$113) 25^{2x-1} = 125^{2x+1}$$

$$114) \left(\frac{1}{27}\right)^{-2x^2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x+2} = (3^x)^2 \times 3$$



$$115) |2^{x+1} - 5| = |3 - 2^x|$$

$$116) 4^x - 2^x = 56$$

$$117) 2^{2x} - 2^{x+3} + 15 = 0$$

$$118) 2(\sqrt{3})^x + 3 = 3^x$$



$$119) 4^x = 5^{2-x}$$



تمرین

(تجربی قاج ۸۴)

۱۲۰. اگر $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2$ ، عدد A کدام است؟

۱۲√۲ (۴)

۸√۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

(تجربی قاج ۹۸)

۱۲۱. اگر $3^{x^2-2} = 81^x$ باشد، $\log_6(x-2)$ ، کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

(تجربی ۹۸)

۱۲۲. اگر $(\frac{125}{8})^{x^2} = (\frac{5}{4})^{2x-1}$ باشد، $\log_8(9x+1)$ ، کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۲۳. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ ، از نقطه‌ی $A(0, 4)$ ، کدام است؟

(تجربی قاج ۹۳)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



(ریاضی قارج ۱۴۰۰)

۱۲۴. مجموع جواب‌های معادله $\log_2(4^x + 15) = x + 3$ ، کدام است؟

- ۸ (۱)
- ۱۵ (۲)
- $\log_2 15$ (۳)
- $\log_4 15$ (۴)



۱۲۵. فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ ، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ ، کدام است (تجربی ۹۹)

- $\log_2(2 - \sqrt{3})$ (۱)
- $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ (۲)
- $\log_2(1 + \sqrt{3})$ (۳)
- $\log_2(2 + \sqrt{3})$ (۴)

۱۲۶. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟ (تجربی قارج ۹۹)



- $\log_2(-1 + \sqrt{5})$ (۱)
- $\log_2(1 + \sqrt{5})$ (۲)
- $\log_2(2 + \sqrt{5})$ (۳)
- $\log_2(3 + \sqrt{5})$ (۴)

۱۲۷. مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ ($\log 3 = 0.48$) (ریاضی ۹۹)

- ۳۶۰ (۱)
- ۳۰۰ (۲)
- ۲۷۰ (۳)
- ۲۴۰ (۴)

۱۲۸. در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم.

پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود؟ ($\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.48$) (ریاضی قارج ۹۹)

- ۲۰ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۳۰ (۳)
- ۳۲ (۴)



معادلات لگاریتمی

(۱)

قبل ذکر: پایه‌های یکسان /

ذکر: } (۲)

بعد ذکر: }

(۳)

مثال: مطلوبست حل معادلات زیر:

$$۱۲۹) \log_x(x^2 + 4) = 1 + 4 \log_x \sqrt{5}$$

(تجربی ۹۳ با تغییر)

$$۱۳۰) \log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$$

(ریاضی ۹۷)



$$۱۳۱) \log_{\sqrt[3]{2}} x \times \log_{\sqrt{2}} \frac{x}{4} = 18$$

$$۱۳۲) \log_a x + \log_x 3 = 1$$

$$۱۳۳) \log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2 \xrightarrow{x=9} a = ?$$

(تجربی خارج ۱۴۰۰)





(تجربی ۱۷)

۱۳۴. از دو معادله $\log(y+2) = 1$ و $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ ، مقدار x کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



(تجربی ۱۵)

۱۳۵. اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $1 + \log\sqrt{x+1} = \log y$ ، مقدار y کدام است؟

۲۵ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲/۵ (۲)

۷/۵ (۱)

(تجربی ۹۶)

۱۳۶. از دو معادله دو مجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2\log 3 + \log x$ ، مقدار y کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(تجربی ۱۹)

۱۳۷. از دو معادله $\log_3^x + \log_3^y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ ، لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴، کدام است؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

(تجربی ۱۴۰۰)

۱۳۸. اگر تساوی $\log_x y - 2\log_y x = 1$ به ازای $x, y > 1$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟ $xy = 2$ (۴) $y = \sqrt{x}$ (۳) $y = x^3$ (۲) $y = x^2$ (۱)

روش ۱:

روش ۲:



تمرین

(کتاب درسی)

۱۳۹. معادله $\log_2(b^2 - 3) = 2 - \log_2(12b - 21)$ چند جواب دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) فاقد جواب است.

۱۴۰. از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه ۸ کدام

(تجربی ۹۵)

است؟

(۱) $\frac{-2}{3}$ (۲) $\frac{-1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۴۱. از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴ کدام

(تجربی قاج ۹۵)

است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۱۴۲. از تساوی $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

(تجربی قاج ۹۳)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲



۱۴۳. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\log(x-3) - \sqrt{\log(x-3)} = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱۳
- (۳) ۵۲
- (۴) ۴۲

۱۴۴. اگر $a = \sqrt{3^{2 \log_3 8} - \log_3 16}$ باشد، مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\log_a(x+1) + \log_a(x-1) = 3$ چقدر است؟

- (۱) ۳
- (۲) صفر
- (۳) ۲
- (۴) -۲

۱۴۵. از دو معادله‌ی دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ ، مقدار x کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

- (۱) ۱/۲
- (۲) ۱/۴
- (۳) ۱/۵
- (۴) ۱/۶

۱۴۶. از دو معادله‌ی $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ ، مقدار y کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹

