* تابع:

- اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد؛ هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
- اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده باشد هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مختص اول مساوی نباشند.
- یک تابع زمانی یک به یک است که به هر عضو مجموعه‌ی دوم بیش از یک عضو از مجموعه‌ی اول نظیر نشود.
- یک تابع در صورتی وارون پذیر است که یک به یک باشد.
- یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محورها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

* توابع خاص و حل نامعادله:

- تابع همانی: دامنه و برد تابع برابرند $f(x)=x$
- تعیین علامت:

1) $f(x)=ax+b$ ، $x=-\frac{b}{a}$

x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

2) $f(x)=ax^2+bx+c$

$\Delta=b^2-4ac$

if: $\Delta>0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

x		x_1		x_2	
$f(x)$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

if: $\Delta=0 \longrightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ ریشه‌ی مضاعف

x		$x_1=x_2$	
$f(x)$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

if: $\Delta<0 \longrightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد

x	
$f(x)$	موافق علامت a

* اگر x_1, x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ax^2+bx+c باشند:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ، $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$

* حاصل جمع هر عدد مثبت با معکوس خودش حداقل 2 است

if: $a>0 \xrightarrow{\text{then}} a+\frac{1}{a}\geq 2$

* اگر $a,b>0 \xrightarrow{\text{then}} (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

* برای اینکه به ازای هر عدد حقیقی x، عبارت ax^2+bx+c همواره مثبت باشد باید:

$\Delta<0$ ، $a>0$

* برای اینکه به ازای هر عدد حقیقی x، عبارت ax^2+bx+c همواره منفی باشد، باید:

$\Delta<0$ ، $a<0$

* اتحادها :

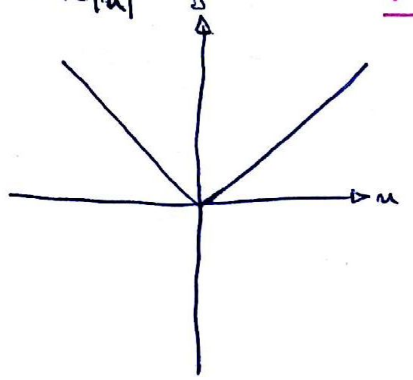
1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

* ساده‌گیری چند جمله‌ایها :

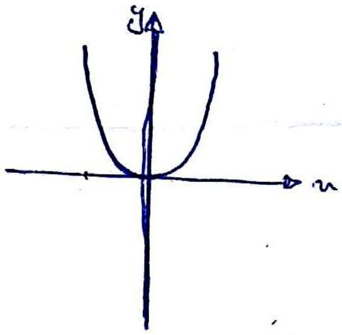
1. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
2. $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$
3. $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$
4. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
5. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

* نمودارهای مهم :

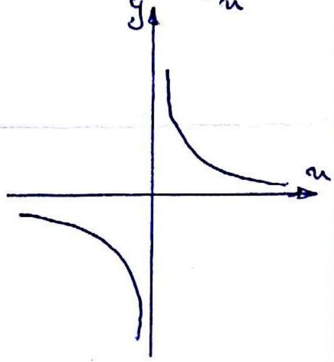
$f(x) = |x|$



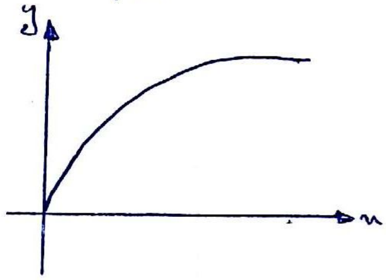
$f(x) = x^2$



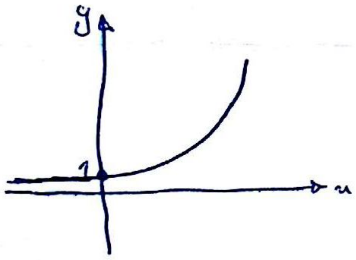
$f(x) = \frac{1}{x}$



$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = 2^x$



Scanned by CamScanner

* ماتریس:

- ضرب دو ماتریس در صورتی امکان پذیر است که تعداد ستون های اولی با سطرهای دومی برابر باشند.

- وارون ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\text{دترمینان}}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- نکته:

$$(AB)^{-1} \neq A^{-1}.B^{-1}$$

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$$

$$I^{-1}=I$$

$$(A^{-1})^{-1}=A \qquad A^{-1}.A=I$$

* نکته:

$$\text{if: } A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{then}} A^{n}=\begin{bmatrix} a^{n} & 0 \\ 0 & b^{n} \end{bmatrix}$$

* نکته:

$$*\ |A|=\frac{1}{|A^{-1}|} \qquad *\ |A^{n}|=|A|^{n}$$

$$*\ |A^{-1}|=\frac{1}{|A|} \qquad *\ |kA|=k^{2}|A|$$

* حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی با استفاده از ماتریس معکوس:

$$\text{if: } \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

* نکته: دستگاه فاقد جواب است

$$\text{if: } \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \xrightarrow{\text{then}}$$

* نکته:

$$\text{if, } A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{then}} A^{n}=\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* ترکیبات:

- اصل ضرب: هرگاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و به ازای هر کدام از آن ها جزء دوم به n طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه آن عمل $m \times n$ حالت مختلف دارد.

- جایگشت:

* تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.

* تعداد جایگشت های k تایی از n شیء متمایز:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!} \quad , k\leq n$$

- ترکیب: تعداد ترکیب های k تایی از n شیء متمایز:

$$\binom{n}{k} \equiv C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad k\leq n$$

$$*\ 0!=1$$

$$*\ \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$$

Scanned by CamScanner

ریاضی 2 :

* **دنباله‌ی حسابی:**
جمله‌ی اول a ، قدر نسبت d
$a_n=a+(n-1)d$

if: $d>0$ $\xrightarrow{then}$ جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند

if: $d<0$ $\xrightarrow{then}$ جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند

- در دنباله‌ی حسابی برای هر جمله با هر فاصله‌ای :

$$d=\frac{a_n-a_{n-1}}{n-(n-1)}$$

مثلا : $\begin{cases} a_5=17 \\ a_{12}=52 \end{cases} \longrightarrow d=\frac{52-17}{12-5}=5$

- در دنباله‌ی حسابی ← اگر x و y و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند :

$y=\frac{1}{2}(x+z)$

- اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ضرب کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی دنباله‌ی حسابی است.

- اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهند $\xrightarrow{then}$ یکی از زاویه‌های این مثلث $60°$ است.

* **دنباله‌ی هندسی:** $a_n=aq^{n-1}$

- اگر x,y,z جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند :

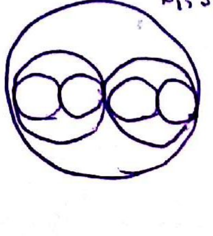
$y^2=xz$

- اگر دو جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب a $(a\neq0)$ ، b باشند، جمله‌ی بعد از b عبارت است از :

$a,b \longrightarrow b=aq \ , \ c=bq=aq^2 \longrightarrow c=\frac{b^2}{a}$

$q=\frac{a}{b}$

- اگر مساحت یک دایره برابر S_1 و داخل آن دو دایره به شکل زیر رسم کنیم و مجموع مساحت آنها را S_2 بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله‌ی $S_1, S_2, \dots, S_n$ ساخته می‌شود. (دنباله‌ی هندسی)



$a_n=\pi R^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

- اگر جملات دنباله‌ای را از یک عدد کم کنیم و جملات به سمت صفر نزدیک شوند، می‌گوییم جملات دنباله به آن عدد نزدیک می‌شوند.

- در دنباله‌ی حسابی ← درصورتی که قدر نسبت دنباله صفر باشد، یعنی دنباله، دنباله‌ی ثابت است.

- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی برابر 1 باشد ← جملات این دنباله به a نزدیک می‌شوند.

$a_n=aq^{n-1} \xrightarrow{q=1} a_n=a$

- توان اساسی با توان اعداد گویا و حقیقی :

1. $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ 2. $\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}$ 3. $a^{r+s}=a^r a^s$
4. $(a^r)^s=a^{rs}$ 5. $(ab)^r=a^r b^r$ 6. $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$
7. $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$

1. $\sqrt{a^b}=(\sqrt{a})^b$ 2. $\left(\frac{a}{c}\right)^b=\frac{a^b}{c^b}$
3. $\frac{a^b}{a^d}=a^{b-d}$ 4. $a^{-b}=\frac{1}{a^b}$

1/

ریاضیات - حد و پیوستگی

Subject :   Date :

* مفهوم حد ← $\lim_{x\to a} f(x) = l$

* مبهم:

انواع صفر: ① صفر نسبی - صفر حدی - بسیار نزدیک به صفر ولی دقیقاً با صفر برابر نیست ← 0^- 0^+ ← 0

② صفر مطلق ← دقیقاً خود صفر

* صفر مبهم: ① $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ ← جزء ابهام دارد، اعداد متفاوتی به ما می‌دهد ← باید رفع ابهام کنیم.

if: $\frac{0_{\text{مطلق}}}{0_{\text{حدی}}} = 0_{\text{مطلق}}$

$\frac{\text{هر چیزی}}{0_{\text{مطلق}}}$ = تعریف نشده

② $\frac{\infty}{\infty}$ ← اعداد متفاوتی به ما می‌دهد ← باید رفع ابهام کنیم.

③ $0_{\text{حدی}} \times \infty$

④ $\infty - \infty$

⑤ $1_{\text{حدی}}^{\infty}$

* رفع ابهام:

رفع ابهام حالت $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$:

روش ① (تشریحی) ← عامل صفر شونده را حذف می‌کنیم.

روش ② ← قاعده HOP ← $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ (مبهم) ← رفع ابهام ← $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(می‌توانیم پشت هم از این قاعده استفاده کنیم (مشتق توابع جدا ...)) $\rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

روش ③ ← تیلور ← هم‌ارزی:

$\sin x \simeq x \quad (x\to 0)$

روش ④ ← تغییر متغیر

تشریح روش‌ها:

① روش عامل صفر شونده: $x\to a$ ← $(x-a) \to 0$ (عامل صفرشونده)

نکته: $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\frac{n}{m}}$

$\boxed{\sqrt[n]{u} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}$

نکته مهم: هرگاه صورت و مخرج کسر یا صورت شامل رادیکال $\sqrt[n]{}$ باشد و با حالت $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ مواجه شدیم، برای رفع ابهام استفاده از روش HOP ممنوع است، زیرا نتیجه‌ای حاصل نخواهد شد و به جای آن از هم‌ارزی (؟) استفاده می‌کنیم:

$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^3-8}} = \frac{0}{0}$ مبهم

HOP → $\lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}}} = \frac{\frac{4}{0^+}}{\frac{12}{0^+}} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

نکته: هم‌ارزی تابع در اطراف ریشه‌اش:

$\boxed{f(x) \simeq f'(a)(x-a), \quad x\to a}$ ($f(a)=0$ ریشه)

جواب: $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{4(x-2)}}{\sqrt{12(x-2)}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

MICRO

Subject :

Date : / /

* تکنیک هم ارزی: ←

- هم ارزی در حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ و

① $if: u \to 0 \quad (1 \pm u)^n \cong 1 \pm nu$ هم ارزی برنولی

نکته ← برای اینکه عبارتهای کسری را از هم ارزی برنولی حل کنیم

← مخرج کسر را درصورت کسر ظاهر می‌کنیم.

② $if: u \to 0 \quad \sin u \cong tgu \cong \operatorname{Arc}\sin u$

$\cong \operatorname{Arc}tgu \cong u$

③ $if: u \to 0$

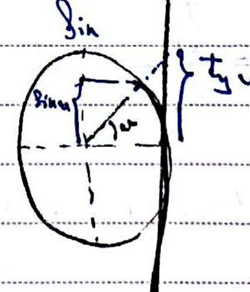
$\sin^n u \cong tg^n u \cong \operatorname{Arc}\sin^n u \cong \operatorname{Arc}tg^n u \cong u^n$

④ ~~$if: u \to 1 \quad \operatorname{Arc}\cos u \cong \sqrt{1-u^2}$~~ هم نیست

⑤ $if: u \to 0 \begin{cases} 1-\cos u \cong \frac{u^2}{2} \\ 1-\cos^n u \cong \frac{nu^2}{2} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{اینجا جابجایی داریم}} \begin{cases} \cos u = 1-\frac{u^2}{2} \\ \cos^n u = 1-\frac{nu^2}{2} \end{cases}$

⑥



$\longrightarrow \boxed{\sin u < u < tgu}$

$\sin u < u < tgu$

$if_{u \to 0} \begin{cases} u-\sin u \cong \frac{u^3}{6} \longrightarrow \sin u - u = -\frac{u^3}{6} \\ tgu - u \cong \frac{u^3}{3} \longrightarrow u - tgu = -\frac{u^3}{3} \\ tgu - \sin u \cong \frac{u^3}{2} \longrightarrow \sin u - tgu = -\frac{u^3}{2} \end{cases}$

بزرگ ـ کوچک ← کوچک ـ بزرگ

* نکتهٔ بسیار مهم ← در استفاده از هم ارزی، هرگاه عبارت ۲ جمله‌ای بر اثر هم ارزی حذف شوند، حق استفاده از هم ارزی را نداریم، زیرا صفر نسبی (یا حدی) را به صفر مطلق تبدیل کرده‌ایم.

مثال ← $\underset{u \to 0}{u - \sin u} \cong$ ~~$u - u$~~ $=$ صفر

$\underset{u \to 0}{u - \sin u} \cong \frac{u^3}{6} \qquad \boxed{\sin u < u}$

⑦ $if_{u \to 0}$

قسمتی که دارای کمترین توان است $\cong$ چند جمله‌ای

$\underset{u \to 0}{au^n + bu^{n-1} + \dots + \boxed{c}} \cong \boxed{c}$

⑧ $if: f, g \to 1$

$f - g \cong \frac{f^n - g^n}{n}$

توصیه $\begin{cases} if: \text{اگر یکی از } f \text{ و } g \text{ رادیکال باشد} \xrightarrow{then} n = \text{فرجهٔ همان رادیکال} \\ if: \text{هر دو رادیکال باشند} \xrightarrow{then} n = \text{حاصلضرب فرجه‌های دو رادیکال} \end{cases}$

* حد در بینهایت

$if: \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\xrightarrow{then}$ تابع در $x=a$ ← حد نامتناهی یا بی‌کران دارد.

تابع در $x=a$ ← حد ندارد.

* نکته: $if:$ r عدد گویای مثبت و c عدد حقیقی $\xrightarrow{then} \lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

MICRO®

ریاضیات - حد و پیوستگی

Subject : Date :

* نکات مهم :

① $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

② $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & n \text{ زوج} \\ -\infty, & n \text{ فرد} \end{cases}$

③ $\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$

④ $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} a<0,\ n \text{ فرد} \to +\infty \\ a<0,\ n \text{ زوج} \to -\infty \\ a>0,\ n \text{ فرد} \to -\infty \\ a>0,\ n \text{ زوج} \to +\infty \end{cases}$

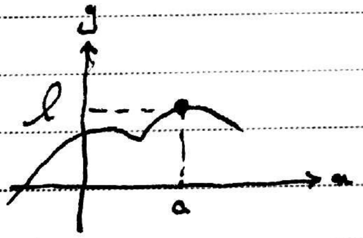
⑤ : if $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l_2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{then}}$ $\begin{cases} ① \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2 \\ ② \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = l_1 l_2 \\ ③ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2},\ l_2 \neq 0 \end{cases}$

این قضیه برای $x \to -\infty$ هم صدق می‌کند.

* رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$:

① توابع رادیکالی ← ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگترین توانی از x که $\boxed{\text{در مخرج}}$ وجود دارد تقسیم می‌کنیم. سپس با استفاده از $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{c}{x^n}$ حد را می‌یابیم.

② توابع گویا و کسری ← مثل بالا عمل می‌کنیم.



* پیوستگی در نقطه ← تابع f که در بازه‌ی I تعریف شده است را در نقطه‌ی a از دامنه‌ی آن پیوسته گوییم هرگاه : ① تابع در a حد داشته باشد ② حد تابع در a با مقدار تابع در a برابر باشد.

هر دو شرط برای پیوستگی مهم است.

* نکته : ① توابع چند جمله‌ای ← در هر نقطه‌ای پیوسته‌اند (یعنی روی R پیوسته‌اند)

② توابع کسری و گویا ← در هر نقطه‌ی دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. (در نقاطی که مخرج آنها صفر شود پیوسته نیستند)

③ توابع رادیکالی ← $y = \sqrt[n]{f(x)}$ ← n فرد ← در هر نقطه‌ای که f پیوسته باشد، پیوسته‌اند.

n زوج ← در هر نقطه‌ای که f پیوسته و نامنفی باشد، پیوسته‌اند.

④ توابع مثلثاتی ←

$f(x) = \sin x$ ← در R پیوسته

$f(x) = \cos x$ ← در R پیوسته

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ← در نقاطی به جز نقاطی که $\cos x = 0$ پیوسته

$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ← در تمام نقاط به جز نقاطی که $\sin x = 0$ پیوسته

مجانب:

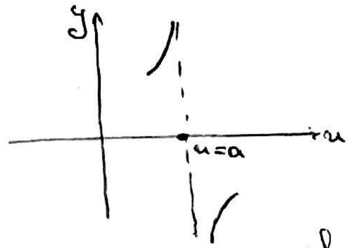
انواع مجانب

قائم:

if: $x \to a$ and $y \to \pm\infty \xrightarrow{\text{then}} x=a$ خط مجانب قائم

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

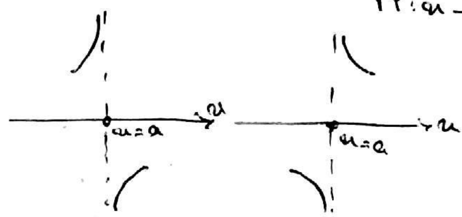
انواع مجانب قائم:
- مجانب قائم ساده (انفصال ساده)
- مجانب قائم مضاعف (انفصال مضاعف)
- مجانب قائم یک طرفه (انفصال یک طرفه)



مجانب قائم ساده:

if: $x \to a$ and $x \to a^{\pm}$

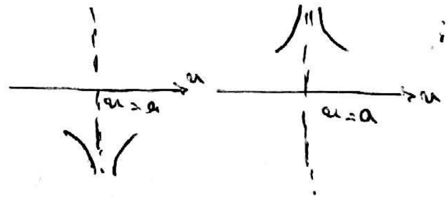
از یک طرف نمودار به $+\infty$ و از طرف دیگر به $-\infty$ میل می‌کند.



مجانب قائم مضاعف:

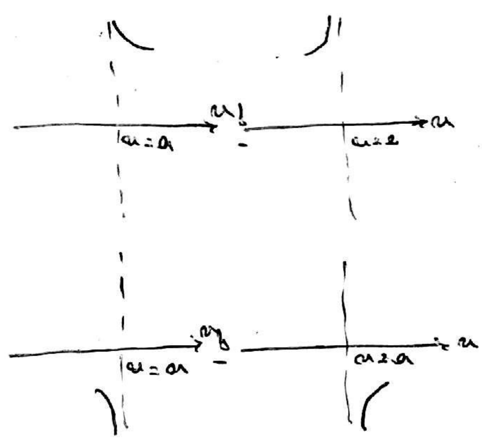
if: $x \to a$ and

نمودار از هر دو طرف یا به $+\infty$ یا به $-\infty$ میل می‌کند.



مجانب قائم یک طرفه:

نمودار از یک طرف تعریف شده و از یک طرف تعریف نشده است.



* نکته: برای تعیین مجانب یا مجانب‌های تابع داریم:

① اگر $x=a$ خط مجانب قائم تابع باشد، یا از هر دو طرف یا حداقل از یک طرف دامنه‌ی تابع به a چسبیده است.

② در توابع کسری، ریشه‌ی مخرج کسر نقش مجانب قائم را ایفا می‌کند. به شرطی که:

1. $x=a$ (ریشه‌ی مخرج) زیر رادیکال فرجه‌ی زوج یا آنتی لگاریتم را منفی نکند.

2. $x=a$ (ریشه‌ی مخرج) کمان ArcSin , ArcCos را بیشتر از 1 یا کمتر از -1 نکند (یعنی X)

3. $x=a$ (ریشه‌ی مخرج) صفر مطلق نباشد ⟵ این اتفاق تحت شرایطی می‌افتد در مخرج کسر یک عامل در صورت [x] داشته باشیم.

4. $x=a$ (ریشه‌ی مخرج)، ریشه‌ی صورت نباشد یا اگر هم بود ایجاد مجانب قائم کند.

روش‌ها:

روش ①: $\lim_{x \to a} f(x)$ ($f(x)$ تابع کسری است)
- $= \infty$ and ✓ $x=a$ مجانب قائم هست
- $=$ عدد and ✗ $x=a$ مجانب قائم نیست

روش ②: if: درجه‌ی ریشه‌ی در مخرج > درجه‌ی ریشه‌ی در صورت and ✓ $x=a$ مجانب قائم هست

۳) در توابع لگاریتمی ← هم ریشه‌ی مخرج و هم ریشه‌ی صورت آرگومان لگاریتم می‌تواند نقش مجانب قائم را ایفا کند. درست می‌گم!

حداقل در یک سمت ریشه، آرگومان لگاریتم مثبت باشد.

۴) در مورد توابع $\tan x$ و $\cot x$ داریم:

$\tan x$ ← به ازای $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ دارای مجانب قائم است.

$\cot x$ ← به ازای $x=k\pi$ دارای مجانب قائم است.

* نکته: روش تعیین درجه‌ی ریشه: (با مثال)

if: $x=1$ ریشه $\xrightarrow{\text{در مورد}}$ x^3-1 پس $1-1=0$

یک بار x^3-1 را صفر کرد. (مشتق آن)

مشتق می‌گیریم: $3x^2 \xrightarrow{x=1} 3 \neq 0$

پس ریشه درجه‌ی یک است.

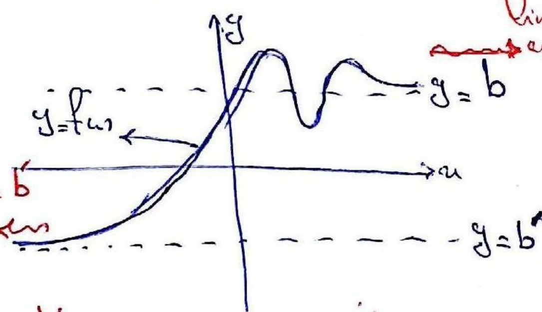
نکته‌ی بسیار بسیار مهم: ← $\tan x$, $\cot x$ ← هر جا باشند، به تنهایی ایجاد مجانب قائم می‌کنند.

← هم در صورت و هم در مخرج

انواع مجانب: مجانب افقی:

if: $x \to \pm\infty$ آنگاه $y \to b$ آنگاه $y=b$ خط مجانب افقی تابع

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = b$$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

← $y=b$ ← مجانب افقی سمت راست منحنی خواهد بود.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b'$

← $y=b'$ ← مجانب افقی سمت چپ منحنی خواهد بود.

* رفتارشناسی منحنی تابع در اطراف مجانب افقی:

مراحل ← بازنویسی تابع

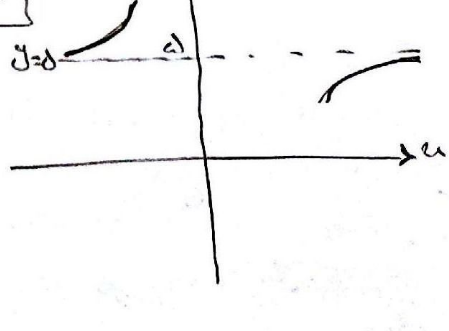
مثال: $y=\frac{5x^2-4}{x^2+3} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} y = 5$ $\boxed{y=5 \text{ مجانب افقی}}$

⟵ بازنویسی: $\frac{5(x^2+3)-19}{x^2+3} = 5-\frac{19}{x^2+3}$

⟶ ادامه:

$x\to+\infty$ آنگاه $5-\frac{19}{+\infty}=5-0^+=5^-$

$x\to-\infty$ آنگاه $5-\frac{19}{-\infty}=5-0^-=5^+$



* در توابع ضمنی $[f(x,y)=0]$

- مجانب قائم: برای پیدا کردن مجانب قائم چون $y\to\infty$ عبارت را برحسب y مرتب می‌کنیم و ضریب بزرگترین عامل را صفر در نظر می‌گیریم.
- مجانب افقی: برای پیدا کردن مجانب افقی چون $x\to\infty$ عبارت را برحسب x مرتب می‌کنیم و ضریب بزرگترین عامل را صفر در نظر می‌گیریم.

* نکته: در توابع به فرم: $(ax+b)(cy+d)=$ عدد ثابت غیر صفر داریم:

- ریشه‌ی پرانتز اول: $x=-\frac{b}{a}$ ← مجانب قائم
- ریشه‌ی پرانتز دوم: $y=-\frac{d}{c}$ ← مجانب افقی

انواع مجانب — مجانب مایل:

$$\text{if: } x\to\infty \Rightarrow y\sim ax+b$$

آنگاه $y=ax+b$ خط مجانب مایل

* نکته: توابع کسری فقط در شرایطی دارای مجانب مایل می‌باشند که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج $\boxed{\text{فقط یک واحد}}$ بیشتر باشد.

$$\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^{n-1}+b'x^{n-2}+\cdots} \sim \frac{a}{a'}x - \frac{ab'-ba'}{a'^2}$$

$x\to\infty$

فقط منها نه علاوه

* نکته:

$$(x+a)\sqrt[k]{\frac{x+b}{x+c}} \sim x+a+\frac{b-c}{k}$$

$x\to\infty$

* نکته: اگر θ زاویه‌ی بین دو خط به معادلات $y_1=m_1x+n_1$ و $y_2=m_2x+n_2$ باشد، داریم:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

1

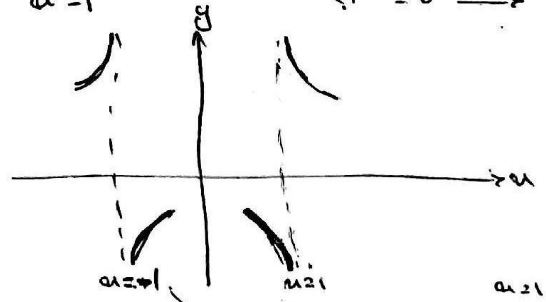
مجانب قائم

تمرین و تست

* $y = \dfrac{2x+3}{x^2-1} \xrightarrow{\text{حل}}$ مخرج $= 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=1 ✓ ,\ x=-1 ✓$

هیچ کدام صورت را صفر نمی‌کنند.

← دارای دو خط مجانب قائم است.



انفصال ساده

* حدود نمودار تابع در اطراف مجانب‌های قائم:

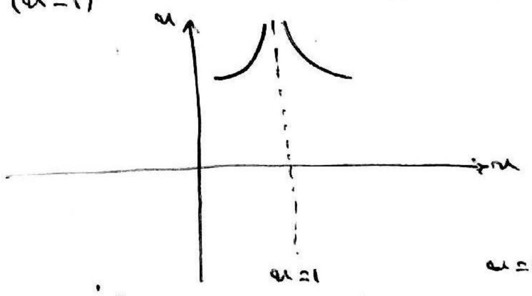
در اطراف $x=1$:
$x \to 1^+ \rightarrow \dfrac{5}{0^+} = +\infty$
$x \to 1^- \rightarrow \dfrac{5}{0^-} = -\infty$

در اطراف $x=-1$:
$x \to -1^+ \rightarrow \dfrac{1}{0^-} = -\infty$
$x \to -1^- \rightarrow \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

* $y = \dfrac{2x}{(x-1)^2} \xrightarrow{\text{حل}}$ مخرج $= 0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1 ✓$

صورت را صفر نکرد

← این تابع یک خط مجانب قائم دارد.



انفصال مضاعف

* رفتار تابع در اطراف خط $x=1$:

در اطراف $x=1$:
$x \to 1^+ \rightarrow \dfrac{2}{(0^+)^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$
$x \to 1^- \rightarrow \dfrac{2}{(0^-)^2} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

* $y = \dfrac{x^3-1}{x^2-1} \xrightarrow{\text{حل}}$ مخرج $= 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)=0$
$x=1 \rightarrow$ صورت $= 0$ * باید بررسی شود:
$x=-1 \rightarrow$ صورت $\neq 0$

* روش ①: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \to 1} \dfrac{3x^2}{2x} = \dfrac{3}{2} \neq \infty$ مجانب قائم نیست

روش ②: درجه ریشه در مخرج > درجه ریشه در صورت
$=1$ درجه ریشه در صورت → مجانب قائم نیست ✗
$=1$ درجه ریشه در مخرج

* $y = x - \sin x \xrightarrow{\text{می‌دانیم}} x=0$ ریشه y
↳ $0-0=0$

$y' = 1-\cos x \big|_{x=0} = 1-1=0$ $\qquad x=0 \rightarrow$ ریشه مرتبه سوم y است.

$y'' = \sin x \big|_{x=0} = 0$

$y''' = \cos x \big|_{x=0} = 1 \neq 0$

* نکته: $x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{6}$, $1-\cos x = \dfrac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$ $\longrightarrow y = x - \sin x$

$x \to 0 \rightarrow y \sim \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{(x-0)^3}{6}$ ← توان $= 3 \xrightarrow{then} x=0$ ریشه مرتبه سوم y است.

$* \; y = 1 - \cos x$ رادیان $x=0$

$y \sim \frac{x^2}{2} \longrightarrow$ در $x=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی دوم y است.

$* \; y = \frac{x}{[x]} \longrightarrow$ فاقد مجانب قائم $f(x)$

* اگر در مخرج کسر $[x]$ داشته باشیم، این عامل ایجاد مجانب قائم نمی‌کند.

$$* \; y = \frac{x^2+5}{x(3x-1)(3x-2)(2x-4)[x]}$$

* اگر در مخرج کسر در کنار عامل $[x]$ عوامل دیگری داشته باشیم، ریشه‌های آن عوامل در صورتی مجانب قائم خواهند بود که x ، $1 > x > 0$ نکنند.

تمام ریشه‌ها صورت را صفر نمی‌کنند.

ریشه‌های مخرج: $x=0 \longrightarrow [x]=0$ ✓

$x=\frac{1}{3} \longrightarrow [x]=0 \longrightarrow 0<\frac{1}{3}<1$ ✗

$x=\frac{2}{3} \longrightarrow [x]=0 \longrightarrow 0<\frac{2}{3}<1$ ✗

$x=\frac{4}{2}=2 \longrightarrow [x]=2$ ✓

دارای ۲ مجانب قائم $x=0$ ، $x=2$ است.

$$* \; y = \frac{x-4}{(2x-1)(2x-4)(3x-9)(4x-16)[\frac{x}{3}]}$$ $\longrightarrow$ ✗ ایجاد مجانب قائم نمی‌کند

$x=\frac{1}{2} \longrightarrow [\frac{1}{6}]=0 \longrightarrow 0<\frac{1}{6}<1$ ✗

$x=2 \longrightarrow [\frac{2}{3}]=0 \longrightarrow 0<\frac{2}{3}<1$

$x=3 \longrightarrow [\frac{3}{3}]=1$ ✓

$x=4 \longrightarrow$ صورت را صفر می‌کند ✗ $\longrightarrow$ درجه‌ی صورت = درجه‌ی مخرج

دارای ۱ مجانب قائم است $\longleftarrow x=3$

$$* \; y = \frac{[\frac{x}{2}]}{x(x-1)(x-2)(x-3)[x-3]}$$

$x=0 \longrightarrow$ صورت $=0$ ✗

$x=1 \longrightarrow$ صورت $=0$ ✗ $\longrightarrow$ درجه‌ی ریشه‌ی مخرج = درجه‌ی ریشه‌ی صورت

$x=2 \longrightarrow$ صورت $=1$ ، $[x-3]=-1$ ✓

$x=3 \longrightarrow$ صورت $=1$ ، $[x-3]=0$ ✓

دارای ۲ مجانب قائم است. $x=2$ ، $x=3$

$$* \; y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x}$$

$x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0 \rightarrow x=3$ ✓ ، $x=0$ ✗

$x=3 \rightarrow$ صورت را صفر نکرد / زیر رادیکال را منفی نکرد

رادیکال فرجه‌ی زوج

$x=0 \rightarrow$ صورت را صفر نکرد / زیر رادیکال را منفی کرد

یک مجانب قائم دارد $\longleftrightarrow x=3$

$$* \; y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6}$$ دارای یک مجانب قائم است $\longleftarrow x=-6$

مخرج $=0$

$x^2+5x-6=0 \rightarrow (x+6)(x-1)=0 \rightarrow x=-6$ ، $x=+1$

$x=-6 \rightarrow$ صورت: $36-18+2=20 \neq 0$ ✓

$x=+1 \rightarrow$ صورت: $1-3+2=0$

باید بررسی کنیم $\rightarrow x=+1$: صورت: $(x-1)(x-2)$ ؛ مخرج: $(x-1)(x+6)$

$(x-1) \longrightarrow$ درجه‌ی $x=+1$ در صورت و مخرج برابر ۱ است. پس مجانب قائم نیست.

$$* \; y = \frac{4x-\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+7}}$$

ریشه‌ی مخرج:

$2x-\sqrt{3x+7}=0 \rightarrow 2x=\sqrt{3x+7}$

توان ۲ $\rightarrow 4x^2=3x+7 \rightarrow 4x^2-3x-7=0$

$a+c=b \rightarrow x=-1$ ، $x=-\frac{c}{a}=\frac{7}{4}$

$x=-1 \rightarrow$ صورت $-4-\sqrt{-1} \rightarrow$ زیر رادیکال فرجه‌ی زوج را منفی کرد $\longleftarrow$ غ ق ق

$x=\frac{7}{4} \rightarrow$ صورت: $7-\sqrt{\frac{7}{4}} \neq 0$

دارای یک مجانب قائم است $\longleftarrow x=\frac{7}{4}$

مجانب قائم — تمرین و تست

$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{1-4x^2}$

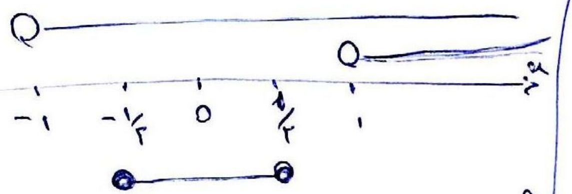
① $x-1>0$ ② $x+1>0$ ③ $1-4x^2\ge 0$

در این مواقع، اول شک می کنیم ← شاید دامنه ی تابع اجازه ی ادامه ی کار را به ما ندهد.

① $x-1>0 \rightarrow x>1$

② $x+1>0 \rightarrow x>-1$

③ $1-4x^2\ge 0 \rightarrow 4x^2\le 1 \rightarrow x^2\le \frac14 \rightarrow -\frac12\le x\le \frac12$



← دامنه ی تابع تهی می باشد و این تابع هیچ x ای نمی تواند داشته باشد و این تابع فاقد مجانب قائم خواهد بود.

$y=\frac{\sqrt{x}}{x} \rightarrow x\ge 0$

مخرج ؟ = 0 → $x=0$ → صورت $\sqrt{x}=0$ ← $0=0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac00$

HoP $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ ✓

چون بی نهایت شد $\xrightarrow{\text{then}}$ $x=0$ مجانب قائم است.

$y=\frac{\sqrt{3x-1}}{|x+1|-3}$

مخرج ؟ = 0 → $|x+1|=3$ $\begin{cases} x+1=-3 \rightarrow x=-4 ✗ \\ x+1=3 \rightarrow \boxed{x=2} ✓ \end{cases}$

← زیر رادیکال فرجه ی زوج را منفی کرد.

← این تابع دارای یک خط مجانب قائم است ← $\boxed{x=2}$

$y=\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{3x-1}}{x^2-4}+\frac{1}{x-5}$

$x=0$ → زیر رادیکال فرجه ی زوج منفی شد. غ ق ق ✗

$x^2-4=0$ $\begin{cases} x=2 ✓ \\ x=-2 ✗ \end{cases}$ غ ق ق — زیر رادیکال ها را منفی کرد.

$x=5$ ✓

$\left.\begin{matrix} x=2 \\ x=5 \end{matrix}\right\}$ تابع دارای دو مجانب قائم است

$*\ y=\frac{\sin x}{x}$

مخرج ؟ = 0 → $x=0$ → صورت هم صفر است.

حالا می کنیم ← $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ✗

$\boxed{\sin x \sim \tan x \sim x \quad (x\to 0)}$

$x=0$ مجانب قائم نیست.

$*\ y=\frac{\tan x}{x^2}$

مخرج = 0 → $x^2=0$ → $x=0$

صورت $\tan 0=0$

درجه ی ریشه در مخرج ؟ > درجه ی ریشه در صورت ؟

$2>1$

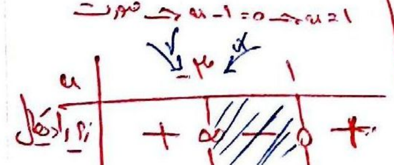
$\xleftarrow{\text{then}}$ $x=0$ خط مجانب قائم است.

$*\ y=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ $\neq$ $*\ y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

مخرج = 0 → $x=-3$

تعیین علامت می کنیم

صورت $x-1=0 \rightarrow x=1$



از سمت چپ تعریف می شود.

این تابع دارای یک مجانب قائم می باشد. $\boxed{x=-3}$

مخرج = 0 → $x+3=0 \rightarrow x=-3$

← زیر رادیکال فرجه ی زوج را منفی کرد.

غیر قابل قبول است.

این تابع فاقد مجانب قائم می باشد.

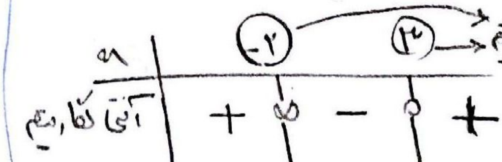
$*\ y=\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

ریشه های صورت و مخرج آنتی لگاریتم $\begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 ✓ \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 ✓ \end{cases}$

نکته: وقتی به این مرحله رسیدیم،

← آنتی لگاریتم را تعیین علامت می کنیم.

از یک سمت آنتی لگاریتم را مثبت کرده



$\left.\begin{matrix} \boxed{x=3} \\ \boxed{x=-2} \end{matrix}\right\}$ دارای دو مجانب قائم است

$*y = \dfrac{2x+5}{\sin^2 3x - \sin 3x}$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ چند مجانب قائم داریم.

مخرج $= 0 \to \sin^2 3x - \sin 3x = 0$

$\sin 3x(\sin 3x - 1) = 0 \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 3x = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = 0 \to x = k\pi \\ \sin x = 1 \to x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

$\sin 3x = 0 \to 3x = k\pi \to x = \frac{k\pi}{3}$

$x = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ ← بازه‌ی $[0,\pi]$ را هم دخالت می‌دهیم.

$\sin 3x = 1 \to 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$x = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

تابع دارای ۶ خط مجانب قائم است.

$*y = \dfrac{2 + \tan x}{\sin 5x}$ چند مجانب قائم در بازه‌ی $(0,\pi)$ ؟

مخرج $= 0 \to \sin 5x = 0 \to 5x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{5} \to x = \{0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi\}$

* نکته: tg و cot هر جا باشند (چه در صورت، چه در مخرج) ایجاد مجانب قائم می‌کنند.

$\tan x = \infty \to x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = \{\frac{\pi}{2}\}$

تابع دارای ۷ خط مجانب قائم است.

$*y = \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

ریشه‌های صورت و مخرج

آنتی لگاریتم

$\sqrt{x} = 0 \to x = 0 \to$ ابطال ← $\boxed{0 \text{ جزء}}$

$x - 5 = 0 \to x = 5$

برای $x=0$ ← باید حدهای 0^+ را بررسی کنیم

زیرا حدهای 0^- جزو دامنه نیستند

$\to x \to 0^+ \Rightarrow \dfrac{0^+}{0^+ - 5} < 0$

حدهای 0^- هم که اصلاً بررسی نمی‌کنیم

پس $x=0$ مجانب قائم نمی‌باشد.

x		0		5	
آنتی لگاریتم		0	$-$	∞	$+$

← حد $x=5$

جزو دامنه نیست

یک طرف مثبت شد $\xrightarrow{\text{then}}$ این تابع دارای یک خط مجانب قائم است ← $x=5$

$*y = \log \dfrac{x^4(x^2-9)}{x^2-25}$

ریشه‌های صورت و مخرج

$x^4(x^2-9) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ ریشه‌ی مضاعف} \\ x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

$x^2 - 25 = 0 \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$

← تعیین علامت

x		-5		-3		$\overset{*}{0}$		3		5	
آنتی لگاریتم	$+$	∞	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	∞	$+$

تمام ریشه‌ها حداقل از یک طرف آنتی لگاریتم را مثبت کردند.

$\xrightarrow{\text{then}}$ معادله دارای ۵ خط مجانب قائم است.

تمرین و تست — مجانب قائم

* $y = \tan 3x + \cot 2x$ در بازه‌ی $(0, \pi)$ چند مجانب قائم؟

$$\begin{cases} \tan u = \infty \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cot u = \infty \Rightarrow u = k\pi \end{cases}$$

$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$x = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

جواب مشترک بین این دو نیز جزء جواب می‌باشد

$2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

$x = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$

* تابع دارای ۵ مجانب قائم است.

---

* $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ چند خط مجانب قائم؟

مخرج $= 0$

$\rightarrow 1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$

$x = \{0\} \rightarrow \sin(0) = 0 \rightarrow$ صورت صفر کرد

← باید مورد بررسی قرار گیرد.

درجه‌ی ریشه در صورت $\rightarrow \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x = 0 \xrightarrow{\text{مرتبه‌ی ریشه}} (1)$

درجه‌ی ریشه در مخرج؟ $\rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow (2)$

$x \to 0$

مخرج $(2) > (1)$ صورت $\xrightarrow{\text{then}} x = 0$ ق ق

← then این تابع در این بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ دارای یک خط مجانب قائم می‌باشد.

---

* $y = \dfrac{x \sin x}{x - \sin x}$ چند خط مجانب قائم در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$؟

مخرج $= 0 \rightarrow x - \sin x = 0 \rightarrow x = \sin x \rightarrow x = 0$

← تنها ریشه‌ی ما در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است.

$x \sin x \big|_{x=0} = 0 \rightarrow$ باید بررسی کنیم

$x \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x^2 = 0$

$x - \sin x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^3}{6} = 0$

$\xrightarrow{\text{مرتبه‌ی ریشه}} (2) < (3)$

مخرج $(3) > (2)$ صورت

دارای یک خط مجانب قائم است.

← در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

---

* $y = \dfrac{2x - 4}{x^2 + mx + 9} \longrightarrow$ فقط یک مجانب قائم دارد. $m = ?$

← یعنی مخرج (چون درجه‌ی دوم است) باید دارای جواب یا ریشه‌ی مضاعف است.

مخرج؟ $\rightarrow \Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(9) = 0 \rightarrow \boxed{m = \pm 6}$ جواب

---

* $y = \dfrac{2x - 4}{x^2 + mx - 9} \longrightarrow$ فقط یک مجانب قائم دارد. $m = ?$

مخرج؟ $\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(-9) = m^2 + 36 \neq 0 \rightarrow > 0$

← دارای ۲ ریشه‌ی متمایز است.

← ریشه‌ی صورت هم $2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

← باید ریشه‌ی مخرج هم باشد.

$\xrightarrow{\text{then}} 4 + 2m - 9 = 0 \rightarrow 2m = 5$

جواب $\boxed{m = \frac{5}{2}}$

مجانب افقی

* $y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$

حل: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{x - 1} = 2$

$y = 2 \rightarrow$ تابع دارای یک خط مجانب افقی است.

نمودار اسم ۸

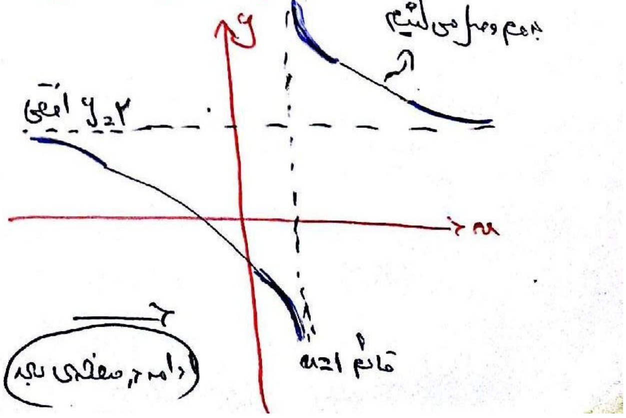
(۱) ابتدا مجانب‌های تابع را بدست می‌آوریم

بررسی رفتار تابع

$\rightarrow$ قائم: مخرج $= 0 \rightarrow x = 1$ ✓ $\begin{cases} x \to 1^+ \to \frac{5}{0^+} = +\infty \\ x \to 1^- \to \frac{5}{0^-} = -\infty \end{cases}$

افقی: $y = 2$ ✓

به هم وصل می‌کنیم



ادامه در صفحه بعد

* نکته: برای بررسی رفتار تابع حول مجانب افقی ← ① مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$y=\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2(x-1)+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}$$

② یک بار $x\to+\infty$ و یک بار $x\to-\infty$

$$x\to+\infty \Rightarrow y\to 2+\frac{5}{+\infty}=2+0^+=2^+$$

$$x\to-\infty \Rightarrow y\to 2+\frac{5}{-\infty}=2+0^-=2^-$$

شکل رسم شود، مقدمه‌ی قبل ←

---

* $y=\dfrac{2x^2+5x-4}{x^2+8}$

$\lim_{x\to\infty} y=2 \Rightarrow y=2$ مجانب افقی

---

* $y=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+1}+9x}{x-2}$

نکته: $\sqrt[2n]{x^{2n}}=|x|$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+\cancel{3x}+\cancel{1}}+9x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|+9x}{x\cancel{-2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|+9x}{x}\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x+9x}{x}=\boxed{10}\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+9x}{x}=\boxed{8}\end{cases}$$

---

* $y=\dfrac{2x+4}{|3x|+[x]}$

نکته: if: $x\to\infty \Rightarrow [x]=x$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\cancel{4}}{|3x|+x}$$

$$\to\begin{cases}+\infty: \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x+x}=\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}\\ -\infty: \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-3x+x}=\frac{2}{-2}=\boxed{-1}\end{cases}$$

---

* $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\log_5\frac{x-3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\log_5 1$$

صفر

$\boxed{y=0}$

---

* $y=\dfrac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\text{عددی بین } -1 , +1}{\infty}=0$$

$\boxed{y=0}$

---

* $y=\sqrt{4x^2+8x-1}-2x$

نکته: $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}$, $x\to\infty$

n زوج ← با: $\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$

n فرد ← نیازی به قدر مطلق نداریم: $\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+8x-1}-2x$$

فرم زوج ← $\sqrt{4}\left|x+\frac{8}{8}\right|=2|x+1|$

$$\begin{cases}+\infty: \lim_{x\to+\infty} 2x+2-2x=2 \to \boxed{y=2} \to \text{نصف مجانب افقی‌ها است}\\ -\infty: \lim_{x\to-\infty} -2x-2-2x=\boxed{-4x-2} \to \text{مجانب مایل}\end{cases}$$

مجانب افقی   تمرین و تست

$x\to\infty$

* $y=\sqrt[3]{x^3+12x^2-1}-\sqrt{x^2-2x}$

$\sqrt[3]{1}\left(x+\frac{12}{3}\right)=x+4$

$\sqrt{1}\left|x+\frac{-2}{2}\right|=|x-1|$

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(x+4-|x-1|\right)$

$+\infty$: $x+4-x+1=5\to$ مجانب افقی

$-\infty$: $x+4+x-1=2x+3\to$ مجانب مایل

---

* $y=\sqrt{9x^2+5x}\ \tan\frac{15}{4x+2}$

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}3\left|x+\frac{5}{18}\right|\times\tan\frac{15}{4x+2}$

حالا tg و lim هم ارز ؟ میل کند ، tg و lim کمان را حذف کنید

$+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}\left(3x+\frac{5}{6}\right)\times\frac{15}{4x+2}=3x\times\frac{15}{4x}=\frac{15}{2}$

$-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}\left(-3x-\frac{5}{6}\right)\times\frac{15}{4x+2}=-3x\times\frac{15}{4x}=-\frac{15}{2}$

$y=\frac{15}{2}$ از سمت راست ← مس

$y=-\frac{15}{2}$ از سمت چپ ← مس

دو مجانب افقی

---

* $y=\sqrt{4x^2-x-2}-\sqrt{4x^2+2x+1}$

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(2\left|x+\frac{-1}{8}\right|-2\left|x+\frac{2}{8}\right|\right)$

$\left|2x-\frac{1}{4}\right|-\left|2x+\frac{1}{2}\right|$

$+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\cancel{2x}-\frac{1}{4}-\cancel{2x}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$

$-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}=\lim_{x\to-\infty}-\cancel{2x}+\frac{1}{4}+\cancel{2x}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$y=-\frac{3}{4}$ از سمت راست

$y=\frac{3}{4}$ از سمت چپ

دارای دو مجانب افقی

---

* $y=\frac{4x+\sqrt{x-5}}{\sqrt{4-x}+x^3}$

این تابع فاقد مجانب قائم است. زیرا دامنه ی تابع اجازه نمی دهد x به سمت $\pm\infty$ میل کند.

---

* if: $y=\frac{(a-1)x^3+2x^2-1}{bx^2-x-1}$ دارای یک مجانب افقی به صورت $y=3$ باشد

$a+b=?$

① $(a-1)x^3=0$ باید then $a-1=0\to\boxed{a=1}$

$y=\frac{2x^2-1}{bx^2-x-1}\to\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{bx^2}=3$

$\frac{2}{b}=3\to\boxed{b=\frac{2}{3}}$

$a+b=1+\frac{2}{3}=\boxed{\frac{5}{3}}$ جواب

---

* if: $y=\frac{3}{2}\longrightarrow$ مجانب افقی تابع $f(x)$ باشد معادله ی مجانب قائم تابع چیست؟

$f(x)=\frac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+16}$

① مجانب افقی: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{A}{A-1}=\frac{3}{2}$

$2A=3A-3\to\boxed{A=3}$

$f(x)=\frac{3x^3+1}{2x^3+16}$

② مجانب قائم = مخرج = 0 → $2x^3+16=0$

$x^3=-8\to\boxed{x=-2}$

---

* if: $y=\frac{3}{2}\longrightarrow$ مجانب افقی تابع $f(x)$ باشد

$a=?\to\boxed{4}$

$b=?\to\boxed{-10}$

$f(x)=2x-1+\sqrt{ax^2+bx}$

باید فاقد مجانب مایل باشد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ←

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2x-1+\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right)$

در اینجا ← if $x\to+\infty$ ← مجانب مایل

$x\to-\infty$ ← x ← مجانب افقی ← بین این ها b, a را طوری پیدا کنیم که دارای دو مجانب افقی

$\to 2x-1+\sqrt{a}x-\frac{b\sqrt{a}}{2a}=\frac{3}{2}$

$\to 2x-\sqrt{a}x=0\to\boxed{a=4}$

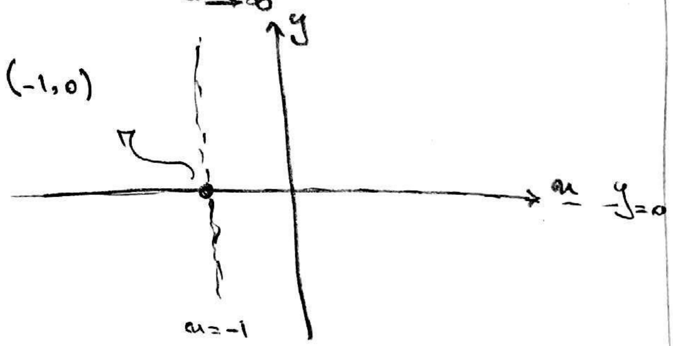
$\to -1-\frac{b\times2}{8}=\frac{3}{2}\to b=-10$

* if $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+11}{x^2-3x-4} \\ \quad (x-4)(x+1) \\ g(x) = \dfrac{3}{x-4} \end{cases}$ نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع $f-g$ کدام است؟

$$f-g = \frac{(x+11) - 3(x+1)}{(x-4)(x+1)} = \frac{-2x+8}{(x-4)(x+1)}$$

مخرج $=0$ ؟ جمع مجانب قائم $\begin{cases} x=4 \ ✗ \ \text{صورت را صفر کند} \\ x=-1 \ ✓ \ \text{مجانب قائم} \end{cases}$

مجانب افقی $\to \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x+8}{x^2-3x-4} = 0$



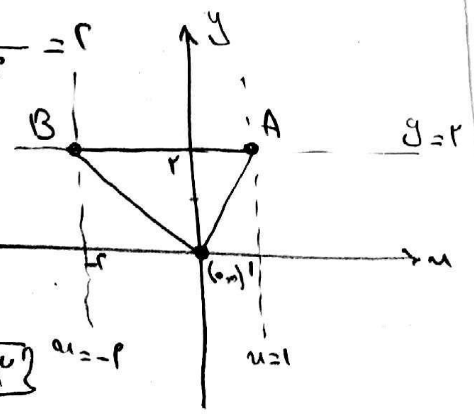
* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+2} \\ g(x) = \dfrac{x^2}{x-1} \end{cases}$ اگر A , B محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی تابع $(g-f)$ و O مبدأ مختصات باشند. مساحت مثلث OAB کدام است؟

$$g-f = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{x^2(x+2) - (x^2+x)(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

قائم ، مخرج $=0$ ؟ $\begin{cases} x=1 \ ✓ \\ x=-2 \ ✓ \end{cases}$

$$\frac{\cancel{x^3}+2x^2-\cancel{x^3}+x}{x^2+x-2} = \frac{2x^2+x}{x^2+x-2}$$

افقی $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x}{x^2+x-2} = 2$



$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \boxed{3}$

* $x^2y^2 - 4x^2 + xy - 2x + 1 = 0$ مجانب افقی = ؟

چون صحبت از مجانب افقی است عبارت بر حسب x

منحنی ضمنی ، تابع ضمنی $f(x,y)=0$

$\underbrace{x^2}(y^2-4) + x(y-2) + 1 = 0$

بزرگترین عامل $\to y^2-4=0 \to y^2=4 \to y=\pm 2$ دو مجانب افقی داریم

* $x^2 + y^2 + x^2y - 3xy^2 = 0$ مجانب قائم = ؟

چون صحبت از مجانب قائم عبارت بر حسب y

$\underbrace{y^2}(1-3x) + x^2y + x^2 = 0$

بزرگترین عامل $\to 1-3x=0 \to x = 1/3 \leftarrow$ مجانب قائم

* فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد مجانب‌های $(2x-2)(y-1)=3$ دو تابع تا خط $3x+4y+23=0$ کدام است؟

$2x-2=0 \to x=1 \leftarrow$ مجانب قائم

$y-1=0 \to y=1 \leftarrow$ مجانب افقی

نقطه‌ی تلاقی $\leftarrow (1,1)$

فاصله‌ی نقطه از خط $\leftarrow d = \dfrac{|3(1)+4(1)+23|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{30}{5} = 6$

مجانب مایل | تمرین و تست

* $y = \dfrac{2x^4+3x^2+5}{x^2+9x-1}$ درجه صورت بیشتر است $4>2$ ← این تابع مجانب مایل ندارد.

* $y = \dfrac{2x^3+x^2+4x-1}{x^2+5x+1}$ مجانب مایل = ؟ ← می‌تواند مجانب مایل داشته باشد

$\sim \frac{2}{1}x - \dfrac{10-1}{1^2} = 2x-9$

$y=2x-9 \leftarrow$ مجانب مایل

Scanned by CamScanner

مجانب مایل — تمرین تست

$*\; y=\frac{4x^3-3x^2+3}{2x^2+7}$ مجانب مایل=؟

$a=4 \quad b=-3 \quad a'=2 \quad b'=0$

$\sim 2x-\frac{4(0)-2(-3)}{4}=2x-1$

$*\; y=\frac{2x^3-7x-1}{x^2+5x+4}$ مجانب مایل=؟

$a=2 \quad b=0 \quad a'=1 \quad b'=5$

$\sim \frac{2}{1}x-\frac{10-0(1)}{1^2}=2x-10$

$*\; y=\frac{ax^3-ax^2+x-1}{ax^2-2x}$ اگر عرض از مبدأ مجانب مایل این تابع برابر ۲ باشد $a=?$

$x\to\infty \quad a=1 \quad b=-a \quad a'=1 \quad b'=-2$

$y\sim\frac{1}{1}x-\frac{-2(1)-(1)(-a)}{1^2}=x-(-2+a)$

$y\sim x+2-a \qquad y\sim ax+\underbrace{b}_{\text{عرض از مبدأ}}$

عرض از مبدأ $=2-a=-2\to -a=-4\to\boxed{a=4}$

$*\; y=3x+[2x]+\frac{2x^3+4x^2-9x+1}{x^2-3x+10}+\frac{|2x|+\cancel{8x}}{x+4}$ مجانب مایل=؟

$\to 2x-\frac{-6-6}{1}=2x+12$

$\lim_{x\to\infty} y \Longrightarrow$ هم ارز تابع وقتی $x\to\infty$

if: $x\to\infty \quad x>[x]\sim x$

$y\sim 3x+2x+(2x+12)+\frac{|2x|}{x}$

$+\infty:\; y=3x+2x+2x+12+2=7x+14$

$-\infty:\; y=3x+2x+2x+12-2=7x+10$

$y=7x+14$, $y=7x+10$ دو خط مجانب مایل داریم

$*\; y=2x+5+\frac{3x^2+\cancel{5x}}{x^2+\cancel{4}}$ مجانب مایل=؟

$x\to\infty$

$y\sim 2x+5+3=2x+8$ مجانب مایل $\boxed{y=2x+8}$

$*\; y=2x+\sqrt[3]{x^3-27x^2-9x-1}$ مجانب مایل=؟

$x\to\infty$ چون فرجه فرد است قدر مطلق نیاز نداریم

$y\sim 2x+\sqrt[3]{1}\left(x+\frac{-27}{3}\right)=2x+x-9=3x-9$

مجانب مایل $\boxed{y=3x-9}$

$*\; y=5x-3+\sqrt{x^2-4x-1}$ مجانب مایل=؟

$x\to\infty$

$y\sim 5x-3+\sqrt{1}\left|x+\frac{-4}{2(1)}\right|=5x-3+|x-2|$

$+\infty:\; y\sim 5x-3+x-2=6x-5$

$-\infty:\; y\sim 5x-3-(x-2)=4x-1$

$y=6x-5$, $y=4x-1$ دو مجانب مایل داریم

$*\; y=x\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\sim x+\frac{2-(-1)}{2}=x+\frac{3}{2} \quad (x\to\infty)$

$*\; y=(x+5)\sqrt[3]{\frac{x+10}{x+2}}\sim x+5+\frac{10-2}{3}=x+\frac{23}{3} \quad (x\to\infty)$

* $y=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}}$ مجانب مایل وقتی $x\to-\infty$ ؟ =

سوال ۲: I) اگر محل تلاقی مجانب‌ها (a,b) باشد، $a+b$ کدام است؟

II) فاصله‌ی محل تلاقی مجانب‌ها از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x-2}} = |x|\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \underset{x\to-\infty}{=} -x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$x\to-\infty \Rightarrow -\left(x+\frac{1-(-2)}{2}\right) = -\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$y=-x-\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{یا}} y+x+\frac{3}{2}=0$$

$$2y+2x+3=0$$

↳ $y=-x-\frac{3}{2}$

I) محل تلاقی مجانب‌ها (a,b) → $a+b=?$

$$y=|x|\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

مایل:
- $x\to+\infty \Rightarrow y=x+\frac{3}{2}$
- $x\to-\infty \Rightarrow y=-x-\frac{3}{2}$

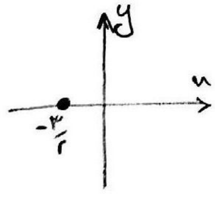
$\rightarrow x+\frac{3}{2}=-x-\frac{3}{2}$

$2x=-\frac{6}{2} \rightarrow x=-\frac{3}{2} \rightarrow$ طول نقطه‌ی تقاطع

↳ $y=0$ عرض نقطه‌ی تقاطع

$(a,b)=\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow a+b=-\frac{3}{2}$

II)



$\rightarrow$ فاصله $=\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$

---

* $y=(x-2)\sqrt{\frac{x+a}{x-1}}$ ، $y=x+2$ مجانب مایل این تابع است. $a=?$

مجانب مایل، $x\to\infty$

$$y\sim(x-2)+\frac{a-(-1)}{2} = x-2+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$$

$$-2+\frac{1}{2}+\frac{a}{2}=2$$

$$\frac{a}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{8-1}{2}=\frac{7}{2}\rightarrow\boxed{a=7}$$

---

* $y=2x\sqrt{\frac{x-1}{9x-1}}$ شیب مجانب = ؟ عرض از مبدأ مجانب = ؟

↳ برای این x ضریب باید ۱ باشد.

$$9x-1=9\left(x-\frac{1}{9}\right)$$

$$y=\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{9}}}\sim\frac{2}{3}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{9}}}\right)$$

$x\to\infty$

$$y\sim\frac{2}{3}\left(x+\frac{-\frac{8}{9}}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(x-\frac{4}{9}\right)$$

$$y=\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{شیب مجانب}}x-\underbrace{\frac{8}{27}}_{\text{عرض از مبدأ}}$$ مجانب مایل

---

* مجانب‌های مایل منحنی‌های $y=\frac{x^2+3}{5-2x}$ ، $y=\frac{x^2-1}{2+3x}$ با هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

$$y=\frac{x^2+3}{-2x+5}\rightarrow\underbrace{-\frac{1}{2}}_{m_1}x-\bigcirc$$

$x\to\infty$

$$y=\frac{x^2-1}{3x+2}\sim\underbrace{\frac{1}{3}}_{m_2}x-\bigcirc$$

$x\to\infty$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right|=\left|\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right|$$

$$\tan\theta=1\rightarrow\boxed{\theta=45^\circ}$$

تمرین تستی

* $y = \dfrac{9x^2+12x+2}{3x+2}$ اسم مجانب مایل و منحنی در اطرافش؟

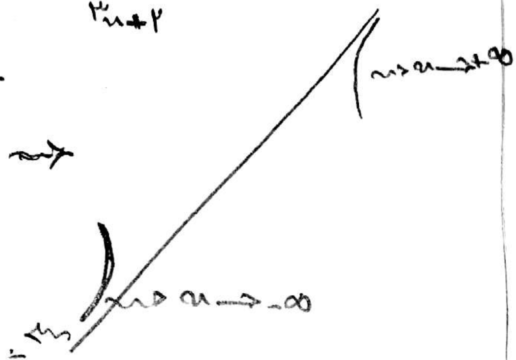
برای مجانب شناسی ← بازنویسی تابع

$$\begin{array}{r|l} 9x^2+12x+2 & 3x+2 \\ -9x^2-6x & \hline 3x+2 \rightarrow \text{مجانب مایل} \\ \hline 6x+2 & \\ -6x-4 & \\ \hline -2 \rightarrow \text{غیر صفر} & \end{array}$$

$$y = 3x+2 - \frac{2}{3x+2}$$

$+\infty$: $y=(3x+2)^-$

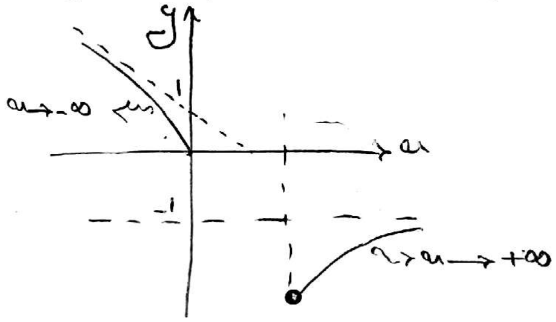
$-\infty$: $y=(3x+2)^+$



$y = 3x+2$

شیب مجانب مایل مثبت

* $y = ax + \sqrt{x^2 + bx} \longrightarrow (a,b) = ?$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

هم ارز تابع وقتی $x \to \infty$: $f(x) \sim ax + \left|x + \frac{b}{2}\right|$, $x \to \infty$

$+\infty$: $ax + x + \frac{b}{2} = x(a+1) + \frac{b}{2} = -1$

$\hookrightarrow a+1=0 \rightarrow a=-1$

$\frac{b}{2} = -1 \rightarrow b=-2$

$-\infty$

$$\boxed{(a,b)=(-1,-2)}$$

۱/

* هندسه‌ی مختصاتی و منحنی‌های درجه‌ی دوم:

تشخیص نوع مقطع مخروطی: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

- دایره $\xrightarrow{\text{if}}$ $A=B\neq 0$
- سهمی $\xrightarrow{\text{if}}$ $B=0$ یا $A=0$
- بیضی $\xrightarrow{\text{if}}$ $A\neq B\,,\ A.B>0$
- هذلولی $\xrightarrow{\text{if}}$ $A.B<0$

* نقطه:

① **مختصات وسط پاره خط:** اگر M وسط دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ باشد $\xrightarrow{\text{then}}$ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

② **فاصله‌ی دو نقطه از هم:**

if: $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ $\xrightarrow{\text{then}}$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

③ **شرط هم‌راستا بودن سه نقطه:**

if: $A(x_1,y_1)\,,B(x_2,y_2)\,,C(x_3,y_3)$ در یک راستا باشند

$\xrightarrow{\text{then}} m_{AB}=m_{AC} \longrightarrow \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$

* خط:

- معادله‌ی ساده: $y=mx+b$
- معادله‌ی گسترده: $Ax+By+C=0$

معادله‌ی دو خط با هم:

معادلات گسترده		معادلات ساده	
$ax+by+C=0$, $a'x+b'y+C'=0$		$y=mx+h$, $y=m'x+h'$	
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{C}{C'}$	موازی	$m=m'$, $h\neq h'$	موازی
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{C}{C'}$	منطبق	$m=m'$, $h=h'$	منطبق
$aa'+bb'=0$	متعامد	$m\times m'=-1$	متعامد

* فاصله‌ی نقطه از خط و دو خط موازی از هم:

نقطه از خط:

$ax+by+C=0 \qquad A(x_A,y_A)$

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

دو خط موازی از هم:

$ax+by+C=0$, $ax+by+C'$

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

* نکته:

- سه خط متمایز زمانی متقاربند هم مختصات ۲ تای آنها در معادله‌ی سومی صدق کند.
- برای یافتن نقطه‌ی ثابت یک دسته خط، کافی است دو خط از دسته خط‌ها داده شده را یافته و محل برخورد آنها را تعیین کنیم.

* دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases} ax+by=C \\ a'x+b'y=C' \end{cases}$$

- $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \longrightarrow$ یک جواب دارد (خطوط متقاطعند)
- $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{C}{C'} \longrightarrow$ جواب ندارد (موازی اند)
- $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{C}{C'} \longrightarrow$ بیشمار جواب دارد (منطبق اند)

* دستگاه چند معادله چند مجهول: یک دستگاه شامل m معادله‌ی خطی و n مجهول را، یک دستگاه m معادله‌ی n مجهولی می‌نامیم.

اگر دستگاه جواب نداشته باشد، آن را ناسازگار، و اگر جواب داشته باشد، آن را سازگار می‌نامیم.

در این دستگاه اگر ثابت‌های معادلات همگی صفر باشند، آن را دستگاه همگن می‌نامیم.

* نکته:

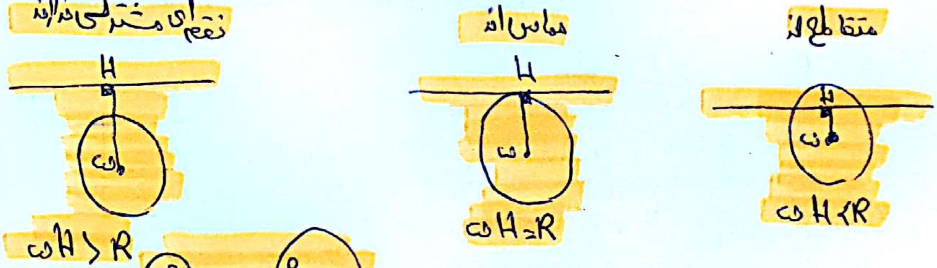
- هرگاه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر باشد ⟵ دستگاه زمانی جواب دارد که جواب به دست آمده از تعدادی معادله در بقیه‌ی معادلات صدق کند.
- در دستگاه‌هایی به شکل کلی $\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \\ a_1x+b_1y+c_1z=k \end{cases}$ با فرض $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$ ، x, y, z را برحسب t یافته، در معادله‌ی دوم قرار داده و سپس مجهول مورد نظر را می‌یابیم.

* دایره:

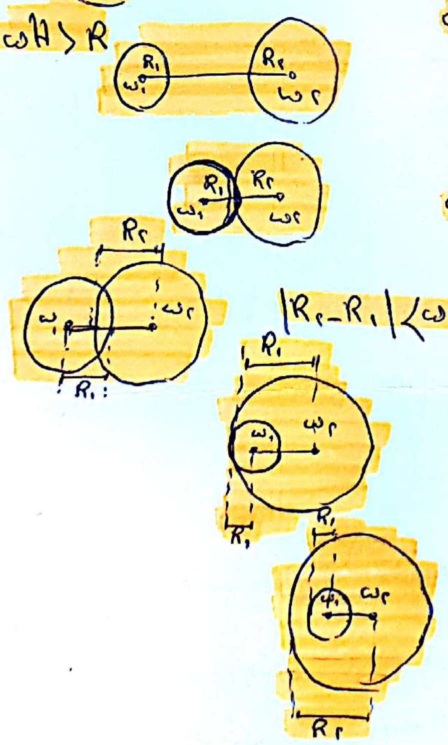
- معادله‌ی استاندارد: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ ⟵ مرکز $\omega(\alpha, \beta)$
- معادله‌ی گسترده: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ⟵ مرکز $\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ و $R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$

* وضعیت دایره‌ی $x^2+y^2+ax+by+c=0$:

- با نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$:
  - $f(x_0, y_0) > 0$ ⟵ خارج منحنی
  - $f(x_0, y_0) = 0$ ⟵ روی منحنی
  - $f(x_0, y_0) < 0$ ⟵ داخل منحنی
- با خط: نقطه‌ی مشترکی ندارند، مماس‌اند، متقاطع‌اند



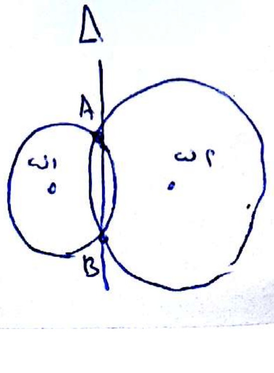
- دو دایره با هم:
  - متخارج: $\omega_1\omega_2 > R_1+R_2$
  - مماس خارج: $\omega_1\omega_2 = R_1+R_2$
  - متقاطع: $|R_2-R_1| < \omega_1\omega_2 < R_1+R_2$
  - مماس داخل: $\omega_1\omega_2 = |R_2-R_1|$
  - متداخل: $\omega_1\omega_2 < R_2-R_1$



* وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع:

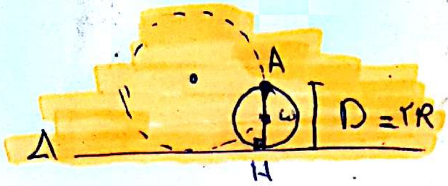
$$\begin{cases} C_1: x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ C_2: x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

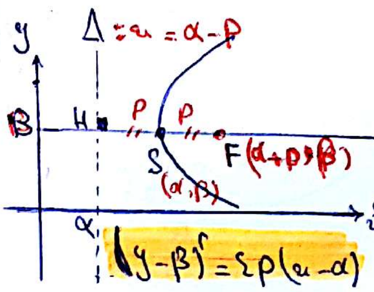
برای به دست آوردن معادله‌ی وتر مشترک ⟵ دو دایره را از هم کم می‌کنیم:



$$\Delta: C_1-C_2 \longrightarrow (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)$$

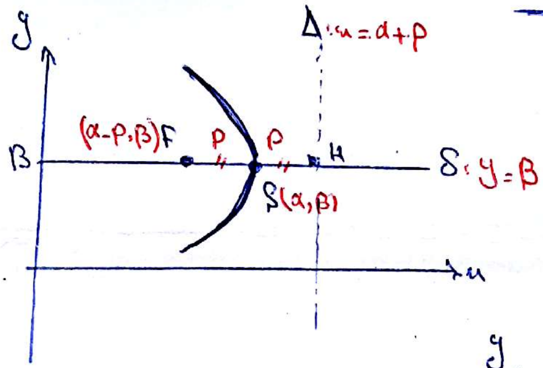
* سهمی





دهانه راست

$$(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$$



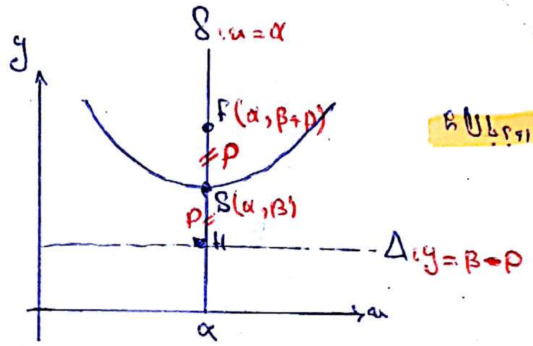
دهانه چپ

$$(y-\beta)^2=-4p(x-\alpha)$$

افقی

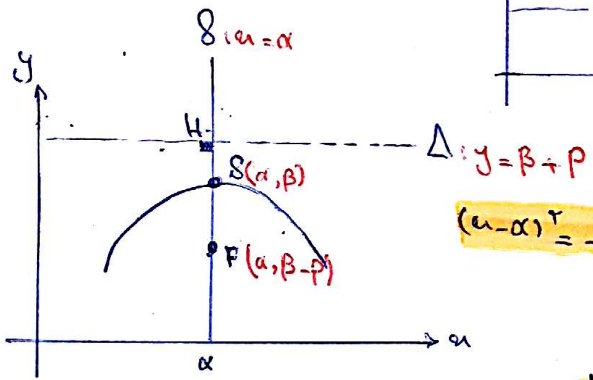
سهمی

$$(x-\alpha)^2=4p(y-\beta)$$



دهانه بالا

قائم



$$(x-\alpha)^2=-4p(y-\beta)$$

دهانه پایین

$$Ay^2+By+Cx+D=0$$

$$y_S=-\frac{B}{2A} \quad \left| \quad p=\left|\frac{C}{4A}\right| \right.$$

افقی

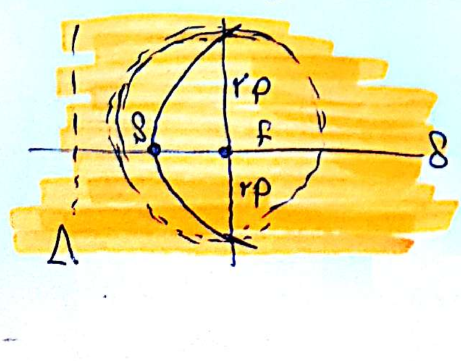
معادلهٔ گسترده سهمی

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0$$

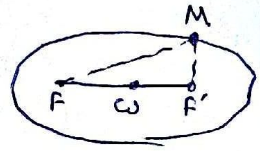
قائم

$$x_S=-\frac{B}{2A} \quad \left| \quad p=\left|\frac{C}{4A}\right| \right.$$

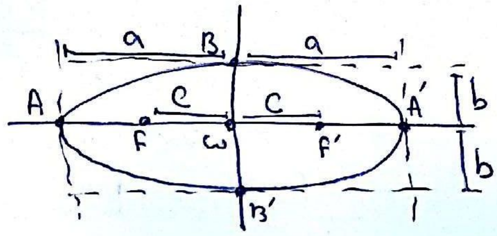
* وتر کانونی در سهمی، در هر سهمی به معادلهٔ $(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$ یا $(x-\alpha)^2=4p(y-\beta)$، طول وتری از سهمی که در کانون بر محور تقارن آن عمود باشد (وتر کانونی) برابر $4p$ است.



* بیضی :



$MF + MF' = 2a$



$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

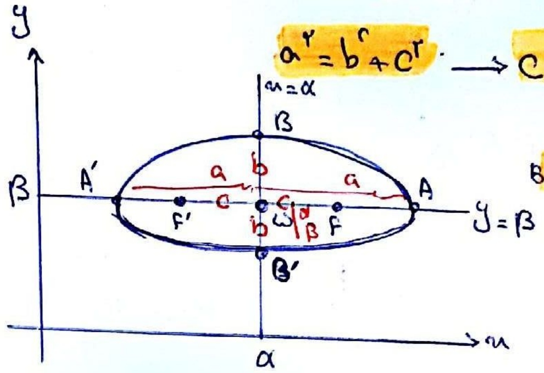
بیضی
- افقی :
- قائم :

$\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$

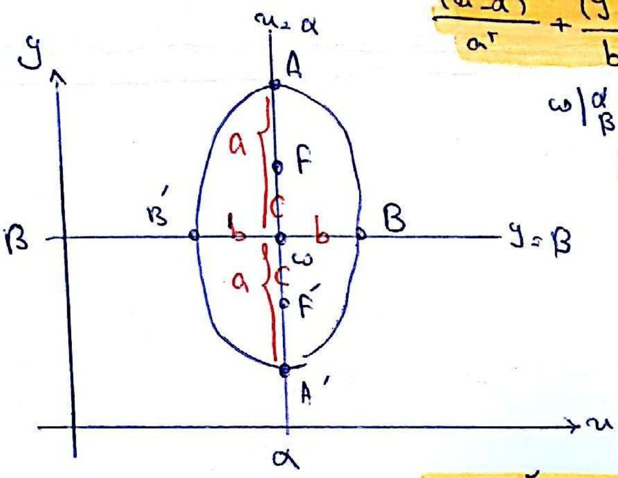
$A \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix}$ $A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix}$

$F \begin{vmatrix} \alpha + c \\ \beta \end{vmatrix}$ $F' \begin{vmatrix} \alpha - c \\ \beta \end{vmatrix}$

$B \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + b \end{vmatrix}$ $B' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - b \end{vmatrix}$



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



$\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$

$A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + a \end{vmatrix}$ $A' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - a \end{vmatrix}$

$F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + c \end{vmatrix}$ $F' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - c \end{vmatrix}$

$B \begin{vmatrix} \alpha + b \\ \beta \end{vmatrix}$ $B' \begin{vmatrix} \alpha - b \\ \beta \end{vmatrix}$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

معادله‌ی گسترده‌ی بیضی :

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, $\omega\left(\frac{-C}{2A}, \frac{-D}{2B}\right)$

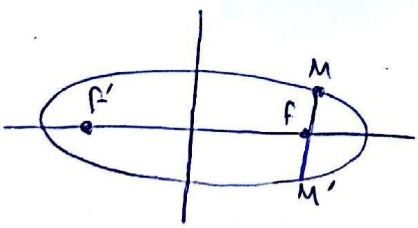
اگر $|A| < |B|$ ⟵ بیضی افقی

اگر $|A| > |B|$ ⟵ بیضی قائم

خروج از مرکز بیضی :

$$\sqrt{1 - \frac{\min\{|A|,|B|\}}{\max\{|A|,|B|\}}} = e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

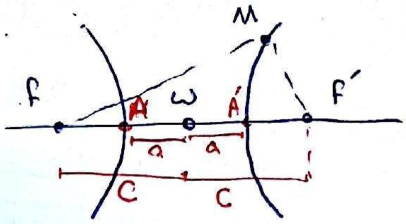
* نکته : در هر بیضی طول وتری که از کانون بر محور کانونی (قطر بزرگ) عمود شود ⟵ $MM' = \frac{2b^2}{a}$



* هذلولی

$$|MF - MF'| = 2a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



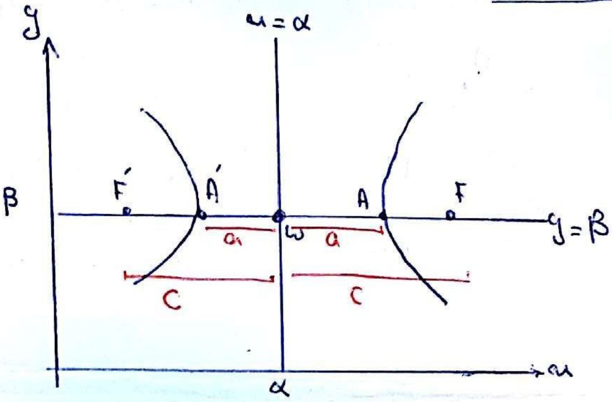
در هر هذلولی افقی یا قائم، فاصله‌ی هر کانون از هر مجانب برابر b است.

هذلولی ← افقی ، قائم

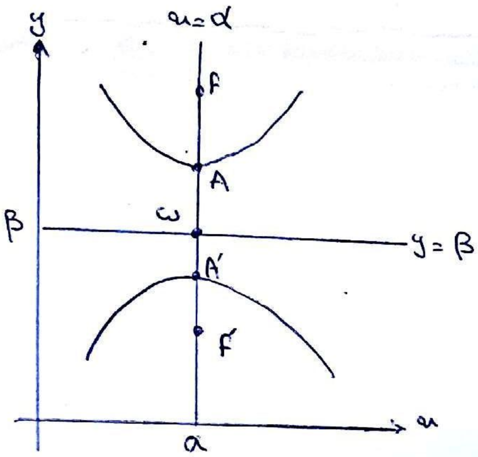
$\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$

$A \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix}$ $\quad A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix}$

$F \begin{vmatrix} \alpha + c \\ \beta \end{vmatrix}$ $\quad F' \begin{vmatrix} \alpha - c \\ \beta \end{vmatrix}$



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



$\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$

$A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + a \end{vmatrix}$ $\quad A' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - a \end{vmatrix}$

$F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + c \end{vmatrix}$ $\quad F' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - c \end{vmatrix}$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$$\omega\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B}\right)$$

مجانب‌های هذلولی:

هذلولی افقی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ (1 حذف می‌شود، منفی ← راست) $\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = \frac{(y-\beta)^2}{b^2}$

هذلولی قائم: $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$ (1 حذف می‌شود، منفی ← راست) $\Rightarrow \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = \frac{(x-\alpha)^2}{b^2}$

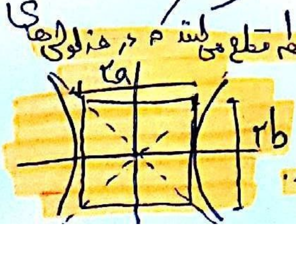
خروج از مرکز هذلولی:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

* نکته:

اگر زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی θ باشد ← $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$

اگر خطوط موازی محورهای یک هذلولی را از رأس‌های آن رسم کنیم، این دو خط، مجانب‌های هذلولی را در چهار نقطه قطع می‌کنند که در هذلولی‌های افقی و قائم، این چهار نقطه رأس‌های یک مستطیل به ابعاد $2a$ و $2b$ هستند. طول قطر این مستطیل همواره $2c$ است. در ضمن مجانب‌های هذلولی بر امتداد قطرهای این مستطیل منطبق‌اند.



* هذلولی متساوی الساقین (متساوی القطرین): هر هذلولی که در آن $a=b$ باشد.

ویژگی‌ها:

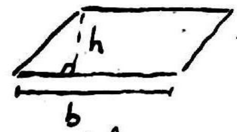
- $c^2=a^2+b^2 \longrightarrow c=a\sqrt{2}=b\sqrt{2}$
- در معادله‌ی گسترده ← ضریب‌های x^2 و y^2 قرینه‌اند.
- $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$
- شیب مجانب‌ها ±1 ← بر هم عمودند (مجانب‌ها)

* نکته: هر معادله به فرم $axy=k$ به شرط $a,k\neq0$ یک هذلولی متساوی الساقین مایل را مشخص می‌کند؛ از آنجا که معادله‌ی هر تابع هموگرافیک با انتقال مبدأ مختصات به نقطه‌ی برخورد مجانب‌هایش به این فرم تبدیل می‌شود، می‌توان گفت که هم تابع هموگرافیک و معادله‌ی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ نیز یک هذلولی متساوی الساقین مایل را مشخص می‌کند.

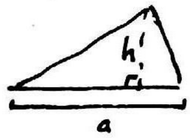
- تعداد قطرهای یک n ضلعی:

$$N = \frac{n(n-3)}{2}$$

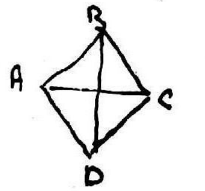
- مساحت‌ها:



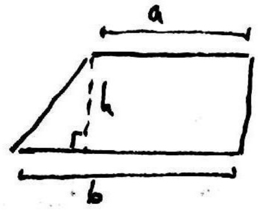
$$S = bh$$



$$S = \frac{1}{2}ah$$

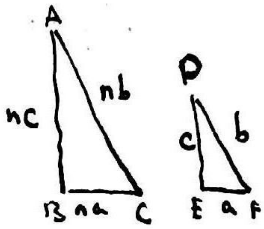


$$S = \frac{1}{2}(AC \times BD)$$



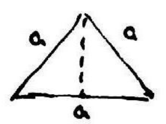
$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$

- در مثلث‌های هم‌نهشت اگر طول اضلاع مثلث بزرگتر n برابر طول اضلاع مثلث کوچکتر باشد:



$$\xrightarrow{\text{then}} \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}} = n^2$$

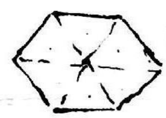
- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع:



$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

- مساحت شش ضلعی منتظم:



$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

- میانگین هندسی دو جمله‌ی کناری:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \longrightarrow b$$

$$\boxed{b^2 = ac}$$

- ویژگی‌های تناسب:

$$\text{if: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \begin{cases} \xrightarrow{\text{then}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \xrightarrow{\text{then}} \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \\ \xrightarrow{\text{then}} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \end{cases}$$

$$\text{if: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \xrightarrow{\text{then}} \frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

- حالت‌های تشابه دو مثلث:

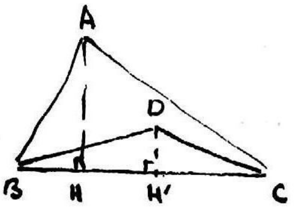
۱) تساوی دو زاویه
۲) تناسب دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین
۳) تناسب سه ضلع

- پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه:

نسبت میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌های متناظر برابر با نسبت تشابه است.

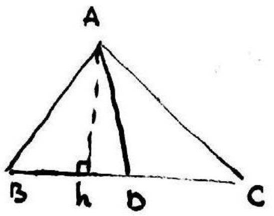
نکات مهم تستی:

۱) اگر دو مثلث دارای قاعده‌ی برابر باشند:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DBC}}} = \frac{H}{H'}$$

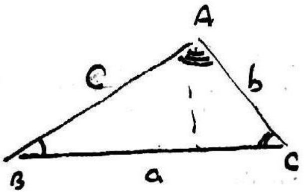
۲) اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابر باشند:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \frac{BC}{BD}$$

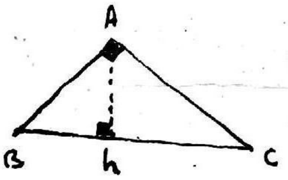
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}} = \frac{BC}{DC}, \quad \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}} = \frac{BD}{DC}$$

۳) مساحت مثلث:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$

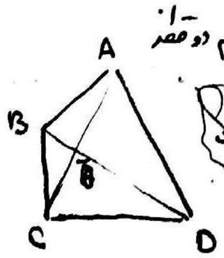
۴) در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصلضرب وتر در ارتفاع وارد بر آن، برابر است با حاصلضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه:



$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}h \times BC \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times AC \times AB \end{cases}$$

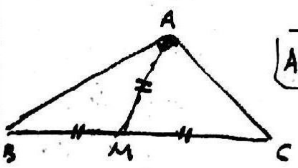
$$\xrightarrow{\text{then}} \boxed{h \times BC = AC \times AB}$$

۵) مساحت چهارضلعی‌های محدب در حالت کلی ← برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر آن در سینوس زاویه‌ی حاده‌ی بین آن دو قطر



$$\boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \times BD \times \sin\theta}$$

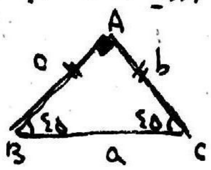
⑥ خط میانه: ← در هر مثلث قائم الزاویه طول میانه‌ی وارد بر وتر نصف طول وتر است.



$\boxed{AM = \frac{1}{2} BC}$ → $\boxed{AM = BM = MC}$

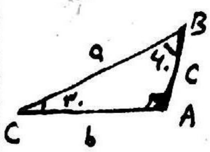
⑦ مثلث قائم الزاویه ←

① با زاویه‌ی حاده ۴۵ درجه ←



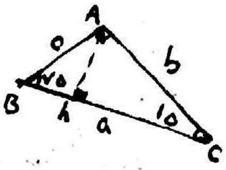
$$\begin{cases} b = c = \frac{\sqrt{2}}{2} a \\ a = \sqrt{2} c = \sqrt{2} b \end{cases}$$

② با زاویه‌ی حاده ۳۰ درجه ←



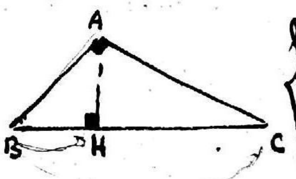
$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} a ,\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ b = \sqrt{3} c \end{cases}$$

③ با زاویه‌ی حاده ۱۵ درجه ←



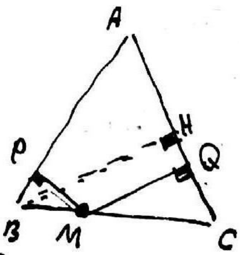
$h = \frac{1}{4} a$

⑧ خواص ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه:



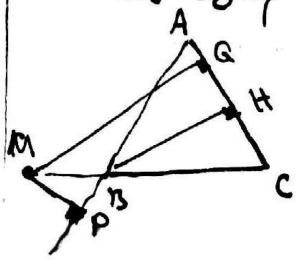
$$\begin{cases} AH^2 = BC \times CH \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases}$$

⑨ مجموع فاصله‌ی هر نقطه روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن برابر با ارتفاع وارد بر ساق آن است.



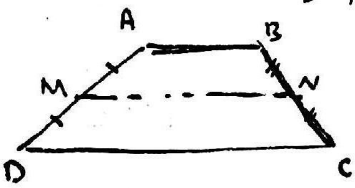
$MP + MQ = BH$

⑩ قدر مطلق تفاضل فاصله‌ی هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن برابر با ارتفاع وارد بر ساق آن است.



$|MQ - MP| = BH$

⑪ در هر ذوزنقه پاره خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند با قاعده‌ها موازی بود و طول آن برابر میانگین طول قاعده‌ها است.

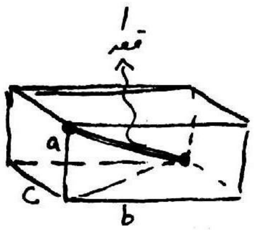


$AM = MD ,\ BN = NC$

$$\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN \parallel DC \end{cases} \longrightarrow \boxed{MN = \frac{AB + DC}{2}}$$

شکل‌های فضایی: ←

* طول قطر مکعب مستطیل:



قطر مکعب مستطیل $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

* طول قطر مکعب: $a\sqrt{3}$

نکته: اگر طول یال مکعب n برابر شود طول قطر آن نیز n برابر می‌شود.

* حجم‌ها:

مکعب مستطیل: $V = S_{\text{قاعده}} \times h$

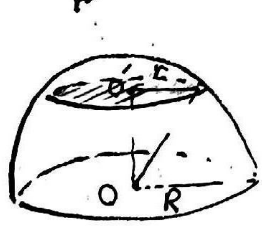
مکعب مربع: $V = a^3$

حجم هرمی به مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h ⟵ $V = \frac{1}{3} S \times h$

حجم مخروطی به شعاع r و ارتفاع h ⟵ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

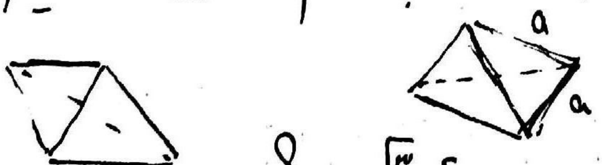
- کره: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad S = 4\pi r^2$

$r = \sqrt{R^2 - h^2}$



$h \quad S = \pi (R^2 - h^2)$

~~حجم~~ هرمی که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی الساقین است.



$S_{\text{قاعده}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$

$V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a\right)$

آمار و مدل سازی

* سرشماری ← اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم سرشماری کرده‌ایم

* نمونه ← زیر مجموعه‌ای از جامعه‌ی آماری

* اندازه‌ی جامعه ← تعداد اعضای جامعه

* اندازه‌ی نمونه ← تعداد اعضای نمونه

* داده (نمره) ← نتایج حاصل از اندازه‌گیری یا بررسی نمونه

- راه‌های جمع آوری داده:
  ۱. استفاده از داده‌های از پیش تهیه شده
  ۲. پرسش
  ۳. مشاهده و ثبت وقایع
  ۴. انجام آزمایش

* متغیرها
  کمی ← قابل اندازه‌گیری
  کیفی ← غیر قابل اندازه‌گیری

* متغیر کمی
  ۱) کمی پیوسته: قابل اندازه‌گیری اند ← حجم، طول، وزن ...
  ۲) کمی گسسته: قابل شمارش اند ← تعداد دانش آموزان کلاس

* متغیر کیفی
  ۱) ترتیبی: نوعی ترتیب در آنها وجود دارد ← مراحل تحصیل، مراحل رشد انسان
  ۲) اسمی: ترتیب در آنها مطرح نیست ← گروه خونی افراد، نوع آلایندگی هوا

* آمارگیری به دو روش انجام می‌شود
  نمونه‌گیری ← بخشی از جامعه
  سرشماری ← تمام افراد جامعه

* فراوانی مطلق ← به تعداد دفعاتی که یک داده‌ی آماری تکرار می‌شود، فراوانی مطلق گوییم، و با f_i نمایش می‌دهیم.

* فراوانی نسبی ← نسبت فراوانی مطلق هر دسته به کل داده‌ها را فراوانی نسبی آن دسته می‌نامیم. (F_i)

$$F_i = \frac{f_i}{n} \quad , \quad n = \sum f_i$$

$\frac{f_i}{n} \times 100$ ← درصد فراوانی نسبی

- نکته‌ی مهم: ← در یک جدول توزیع فراوانی، مجموع فراوانی‌های نسبی همواره ۱ است. و جمع درصد فراوانی‌های نسبی ۱۰۰ است.

* فراوانی تجمعی ← برابر است با فراوانی آن دسته علاوه‌ی مجموع فراوانی‌های دسته‌های قبل از آن. (F_{c_i}).

* دسته‌بندی داده‌ها ←

۱) دامنه‌ی تغییرات (فاصله‌ی کمترین و بیشترین داده) $R = b - a$

۲) تعداد و فاصله‌ی طبقات: ←

طول طبقات $C = \frac{R}{k}$

تعداد طبقات $k = \frac{R}{C}$

۳) مرکز دسته (نشان دسته): ←

X_i : مرکز دسته‌ی iام [illegible] $= \dfrac{\text{کران بالای دسته‌ی iام} + \text{کران پایین دسته‌ی iام}}{۲}$

مرکز دسته‌ی iام $\Rightarrow X_i = X_1 + (i-1)C$

---

* نمودارهای آماری: ←

۱) نمودار میله‌ای ←
  محور طول‌ها ← نماینده‌ی طبقه (مرکز دسته) یا خود داده
  محور عرض‌ها ← فراوانی مطلق هر طبقه یا داده

برای متغیرهای گسسته مناسب تر است.
برای متغیرهای پیوسته ← با استفاده از مراکز دسته‌ها

۲) نمودار مستطیلی ←
  محور طول‌ها ← حدود طبقات
  محور عرض‌ها ← فراوانی مطلق هر طبقه

← برای متغیرهای پیوسته مناسب

۳) نمودار چندبر فراوانی ← (در توزیع فراوانی داده‌های پیوسته مناسب است)
  محور طول‌ها ← مراکز دسته‌ها یا خود داده
  محور عرض‌ها ← فراوانی مطلق نظیر آنها

- نقاط به دست آمده را به هم وصل می‌کنیم
- دو دسته‌ی مجازی با فراوانی $f=0$ به ابتدا و انتهای مراکز اضافه می‌کنیم تا سطح چندبر فراوانی به دست آید.

نکته ← سطح زیر نمودار چندبر فراوانی با مجموع مساحت مستطیل‌های نمودار مستطیلی برابر است.

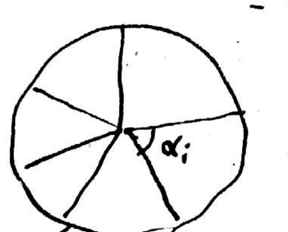
۴) نمودار فراوانی تجمعی ←
  محور طول‌ها ← کران بالای دسته‌ها
  محور عرض‌ها ← فراوانی تجمعی هر دسته

و نقاط به دست آمده را به هم وصل می‌کنیم.

نکته: ۱) نمودار فراوانی تجمعی ← همواره صعودی است.
۲) اگر قسمتی از نمودار فراوانی تجمعی به صورت خطی موازی محور xها باشد یعنی ← فراوانی مطلق آن طبقه صفر است.

⑤ نمودار دایره‌ای ← دایره را به قسمت‌های مناسب تقسیم می‌کنیم

k ← تعداد دسته‌ها



$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$

$\frac{f_i}{n}$: فراوانی نسبی

⑥ نمودار ساقه و برگ ←
- ساقه ← ارقام مشترک
- برگ ← ارقام غیر مشترک

- اگر داده‌های آماری عددی باشند $\xrightarrow{\text{then}}$ ابتدا به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم
- در برگ ← داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب می‌شوند.
- در قسمت برگ ← مجموع تعداد اعداد برابر کل داده‌هاست.

---

* شاخص‌های آماری ←
  ۱. شاخص‌های مرکزی
  ۲. شاخص‌های پراکندگی

- شاخص‌های مرکزی ←

① مُد ← داده‌ای که فراوانی آن از همه‌ی داده‌ها بیشتر باشد.
(ممکن است یک جامعه چند مدی باشد یا اصلاً مد نداشته باشد)

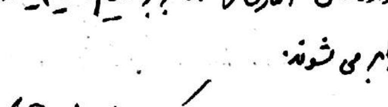
② میانه ←
- تعداد داده‌ها زوج ← میانگین دو عنصر وسط
- تعداد داده‌ها فرد ← عنصر وسط

(داده‌ها به ترتیب صعودی باید مرتب شوند)

* نکته‌ی مهم ←
① اگر به داده‌های آماری k واحد بیافزائیم، مد یا میانه به اندازه‌ی k واحد افزایش می‌یابند.
② اگر داده‌های آماری را k برابر کنیم، میانه یا مد k برابر می‌شوند.

③ چارک‌ها ←
- میانه‌ی نیمه‌ی اول ← چارک اول (Q_1)
- میانه‌ی نیمه‌ی دوم ← چارک سوم (Q_3)
- چارک دوم (Q_2) ← همان میانه است.

④ نمودار جعبه‌ای ←



⑤ میانگین: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

* نکته ← با استفاده از جدول توزیع فراوانی داریم:

مرکز دسته	a_1	a_2	...	a_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

$\longrightarrow \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ ، $\sum f_i = n$

* نکته مهم:

① اگر همه‌ی داده‌های آماری با هم برابر باشند ← میانگین برابر یکی از آنهاست.

② اگر همه‌ی داده‌ها را در a ضرب کنیم، میانگین a برابر می‌شود و اگر به هر یک از داده‌ها عدد b را اضافه کنیم ← میانگین b واحد اضافه می‌شود.

- شاخص‌های پراکندگی ←

① دامنه‌ی تغییرات ← اختلاف بزرگترین و کوچکترین داده است

$R = b - a$

* نکته‌ی مهم:
① اگر به همه‌ی داده‌های آماری یک عدد بیافزائیم $\xrightarrow{\text{then}}$ R ثابت می‌ماند.
② اگر همه‌ی داده‌های آماری را در k ضرب کنیم $\xrightarrow{\text{then}}$ $R \to |k|R$
③ if $R = 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ همه‌ی داده‌ها با هم برابرند.
و میانگین، میانه و مد بر هم منطبق‌اند

② انحراف از میانگین ← اختلاف هر داده از میانگین $x_i - \bar{x}$

نکته ← در حالت کلی مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر است

$\sum f_i(x_i - \bar{x}) = 0$

$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$

③ واریانس ←

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

* نکته: با استفاده از جدول توزیع فراوانی داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} \quad \text{or} \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

④ انحراف معیار

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{or} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

نکته: ① اگر همه‌ی داده‌های آماری با هم برابر باشند ← $\sigma^2 = 0$, $\sigma = 0$
② به همه " " عددی را بیافزائیم ← σ^2 , σ
③ اگر همه‌ی داده‌ها را در $a \neq 0$ ضرب کنیم ← $\sigma \to |a|\sigma$, $\sigma^2 \to a^2\sigma^2$
④ اگر داده‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند ← قدر نسبت d

$$\sigma^2 = \frac{d^2(n^2 - 1)}{12}$$

⑤ ضریب تغییرات ← نسبت انحراف معیار به میانگین $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

نکته: ① هر چه ضریب تغییرات به صفر نزدیک‌تر باشد ← داده استانداردتر است.
② اگر ضریب تغییرات داده‌ها صفر باشد ← داده‌ها با هم برابرند.

(کاربرد مشتق)

موضوع : .... تاریخ : ....

$f(x) = \sqrt[n]{x^m}\ (\text{عبارت درجه ۱})$ <u>نقاط عطف</u> ← ① ریشه‌ی عبارت رادیکالی

$\frac{n-m}{n+m} \times$ ضریب x / عدد ثابت

مثال ← $\sqrt[5]{x^3}\,(x-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x = \frac{5-3}{5+3}(-1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$

(سوال : در بازه‌ای تقعر تابع مورد نظر رو به پایین است آن بازه کدام است.)

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m}\,(ax+b)$$

طول نقطه‌ای عطف مایل ← $x = \frac{n-m}{n+m} \times \left(\frac{b}{a}\right)$

* نکته: معادله‌ی درجه‌ی چهارم $ax^4+bx^2+c=0$ زمانی دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز است که بعد از تبدیل آن به معادله‌ی درجه‌ی دو، Δ ، S ، P در معادله‌ی جدید هر سه مثبت باشند.

* نکته: اجتماع ۲ تابع ممکن است یک تابع نباشد.

ریاضیات ـ توابع و معادلات

ـ معادلهٔ درجهٔ دوم : $\longleftarrow$ $f(x)=ax^2+bx+c=0 \quad , \quad a\neq 0$

$\Delta=b^2-4ac \longrightarrow$ ریشه‌ها $\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

مجموع ریشه‌ها $\longrightarrow S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ تفاضل ریشه‌ها $\longrightarrow |x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

حاصلضرب ریشه‌ها $\longrightarrow P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

واسطهٔ هندسی بین ریشه‌ها $\longrightarrow k^2=x_1\cdot x_2=P$

واسطهٔ عددی بین ریشه‌ها $\longrightarrow k=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{S}{2}$

$\boxed{*\ x^2-Sx+P=0}$

if: β , α ریشه‌های معادله باشند $\xrightarrow{\text{then}}$ $\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=S^2-2P \\ \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS \\ (\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2=S\pm 2\sqrt{P} \end{cases}$

* نکته :

(1) $\Delta>0 \longrightarrow$ دو ریشهٔ حقیقی و متمایز $\longrightarrow$
- $\dfrac{c}{a}>0$ ریشه‌ها هم‌علامت $\longrightarrow$
  - $-\dfrac{b}{a}>0$ ریشه‌ها مثبت
  - $-\dfrac{b}{a}<0$ ریشه‌ها منفی
- $\dfrac{c}{a}<0$ ریشه‌ها مختلف‌العلامه $\longrightarrow$ شرط لازم و کافی

(2) $\Delta=0 \longrightarrow$ ریشه‌های مضاعف $\longrightarrow x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ در این حالت معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود.

(3) $\Delta<0 \longrightarrow$ ریشهٔ حقیقی ندارد

* نکته :

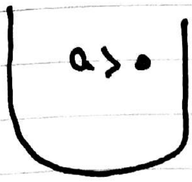
(1) if: $a+b+c=0$ (مجموع ضرایب صفر باشد) $\xrightarrow{\text{then}} x_1=1 \ , \ x_2=\dfrac{c}{a}$

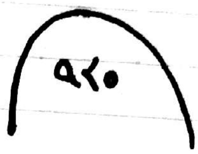
(2) if: $a+c=b \xrightarrow{\text{then}} x_1=-1 \ , \ x_2=-\dfrac{c}{a}$

* نکته : معادلهٔ درجهٔ چهارم $ax^4+bx^2+c=0$ زمانی دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز است که بعد از تبدیل کردن به معادلهٔ درجهٔ ۲ ، Δ ، S و P در معادلهٔ جدید هر سه مثبت باشند.

تابع درجه‌ی دوم ← $y=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$

① if: $a>0$ → min دارد ، ② if: $a<0$ → Max دارد





Min یا Max ← در نقطه‌ای $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید.

مقدار آن ← $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

* نکته کاملاً مهم ← ① اگر تابع به شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ ← مختصات Min یا Max

$S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

② اگر تابع به شکل $f(x)=a(x-h)^2+k$ ← مختصات Min یا Max

$S(h,k)$

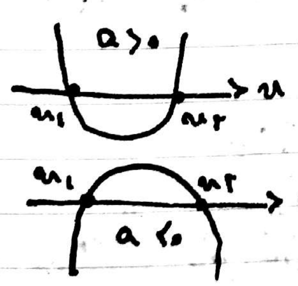
③ اگر تابع به شکل $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ ← مختصات Min یا Max

$S=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$

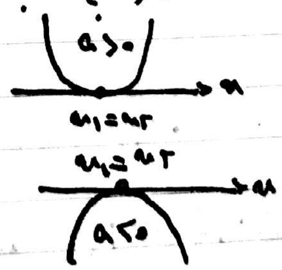
* محور تقارن ← محور تقارن تابع، خط $x=-\frac{b}{2a}$ است که از نقطه‌ی Min یا Max عبور می‌کند

* نمودار تابع درجه‌ی دوم ← $f(x)=ax^2+bx+c$

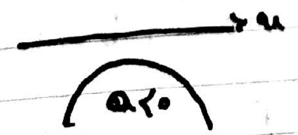
if: $\Delta>0$ →



if: $\Delta=0$ →



if: $\Delta<0$



* نکته: اگر $ac<0$ $\xrightarrow{then}$ نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

تابع قدر مطلق

$$\text{if: } a\in\mathbb{R} \xrightarrow{then} |a|=\begin{cases} a & ; a\geq 0 \\ -a & ; a<0 \end{cases}$$

* خواص قدر مطلق

① $|u|\geq 0$

② $|u|=|-u|$

③ $\sqrt{u^2}=|u| \longrightarrow \sqrt[2n]{u^{2n}}=|u| \ , n\in\mathbb{N}$

④ $|u|\leq a \xrightarrow{a>0} -a\leq u\leq a$

⑤ $|u|\geq a \xrightarrow{a>0} u\geq a \ , u\leq -a$

⑥ $\text{if: } a,b\in\mathbb{R} \ , ab\geq 0 \xrightarrow{then} |a+b|\leq|a|+|b|$ نامساوی مثلثی

معادلات قدر مطلقی

① نوع اول

① $|u|=a \xrightarrow{a>0} u=a \ , u=-a$

② $|u|=|v| \longrightarrow u=v \ , u=-v$

③ $|u|=v \xrightarrow{v\geq 0} u=v \ , u=-v$

② نوع دوم

برای حل یک معادله‌ی قدر مطلقی، باید عبارت را به ازای ریشه‌ی یا ریشه‌های داخل قدر مطلق تعیین علامت کنیم. جواب‌هایی قابل قبول‌اند که در بازه‌ی انتخابی صدق کنند.

مثال: معادله‌ی $x-2+|x-3|=1$ را حل کنید.

حل ← ریشه‌ی داخل قدر مطلق ← $x=3$

$\text{if: } x\geq 3 \longrightarrow x-2+(x-3)=1 \longrightarrow x=3$ قابل قبول

$\text{if: } x<3 \longrightarrow x-2-(x-3)=1 \longrightarrow 1=1$ همواره برقرار است

$\xrightarrow{then} x<3 \cup \{3\} \longrightarrow (-\infty,3]$

- نامعادلات قدر مطلقی ←

(۱) نوع اول ←

① $|u| \le a \xrightarrow{a>0} -a \le u \le a$

② $|u| \ge a \xrightarrow{a>0} u \ge a$ یا $u \le -a$

③ $\boxed{|u| \le |v| \longrightarrow u^2 \le v^2}$ مهم

(۲) نوع دوم ← مثال: نامعادله‌ی $2x + |x-1| < 1$ را حل کنید.

حل ← ریشه‌ی قدر مطلق $x = 1$

اشتراکی ندارند

if: $x \ge 1 \rightarrow 2x + (x-1) < 1 \rightarrow x < \frac{2}{3}$

if: $x < 1 \rightarrow 2x - (x-1) < 1 \rightarrow x < 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ $(-\infty, 0)$ بازه‌ی مورد نظر

اشتراک دارند

- تابع جزء صحیح ←

if: $n \le x < n+1 \xrightarrow{\text{then}} [x] = n$

* خواص و ویژگی‌ها ←

① if: $x \in Z \xrightarrow{\text{then}} [x] = x , [-x] = -x$

② if: $x \notin Z \xrightarrow{\text{then}} [-x] = -[x] - 1$

③ if: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in Z \\ -1 & ; x \notin Z \end{cases}$

④ if: $k \in Z \xrightarrow{\text{then}} [x+k] = [x] + k$

⑤ $[x] \ge a \xrightarrow{a \in Z} x \ge a+1$

⑥ $[x] \le a \xrightarrow{a \in Z} x < a+1$

⑦ if: $[x] > x \xrightarrow{\text{then}} x \in \emptyset$

⑧ $[x] \le x < [x] + 1$

⑨ $\boxed{0 \le x - [x] < 1}$ مهم

Scanned by CamScanner

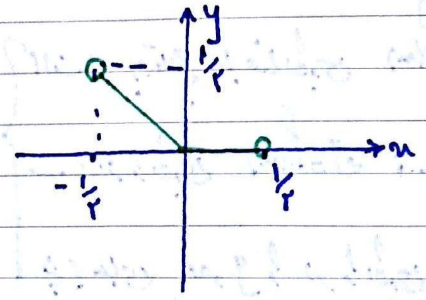
نمودار توابع شامل جزء صحیح

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x[2x]$ را در بازه‌ی $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ رسم کنید.

حل: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \to -1 < 2x < 1 \xrightarrow{\text{۲ بازه در نظر می‌گیریم}} \begin{cases} -1 < 2x < 0 \to y = x(-1) = -x \\ 0 \le 2x < 1 \to y = x(0) = 0 \end{cases}$

$-\frac{1}{2} < x < 0$

$0 \le x < \frac{1}{2}$

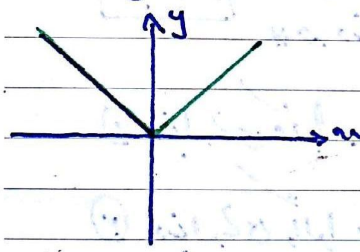


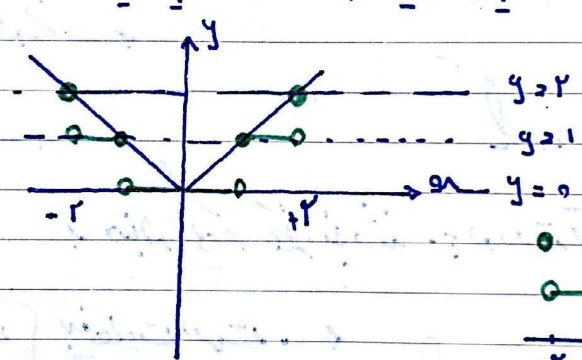
رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [f(x)]$

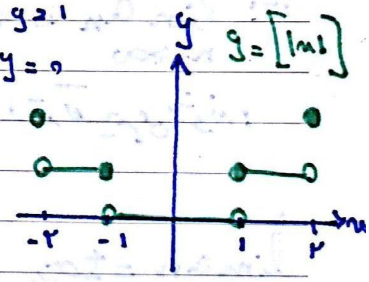
مثال: نمودار تابع $y = [|x|]$ را در بازه‌ی $-2 \le x \le 2$ رسم کنید.

حل: $y = |x|$

$-2 \le x \le 2 \xrightarrow{then} 0 \le |x| \le 2 \to \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$







تابع یک‌به‌یک

تابع f را یک‌به‌یک گوییم هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داشته باشیم:

$f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$

* تابع $f(x) = |x|$ یک‌به‌یک نیست. $\xrightarrow{\text{زیرا}} |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

تابع وارون

هرگاه f یک‌به‌یک باشد ← $f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$

$\to y = f(x) \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

همچنین $D_{f^{-1}} = R_f$ ، $R_{f^{-1}} = D_f$

نتیجه: if: $f(a) = b \xrightarrow{then} f^{-1}(b) = a$

* نکته: تابع f معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر یک‌به‌یک باشد.

* نکته ← اگر تابعی در دامنه‌ی خود صعودی یا نزولی اکید باشد، آنگاه یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر خواهد بود.

* یافتن ضابطه‌ی تابع معکوس ←

الف) برد تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$ را پیدا می‌کنیم. ← که همان دامنه‌ی تابع f^{-1} است.

ب) از رابطه‌ی $y=f(x)$ ، x را برحسب y می‌یابیم.

ج) جای x و y را در رابطه‌ی بدست آمده عوض می‌کنیم. در نتیجه $y=f^{-1}(x)$ خواهد بود.

* نمودار تابع معکوس ← قرینه‌ی تابع یک به یک f نسبت به خط $x=y$ را رسم می‌کنیم.

دنباله ←

* حد دنباله ←

① دنباله‌ی همگرا : ← if: $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

② دنباله‌ی واگرا : ← دنباله‌ای که همگرا نباشند. به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) حد شان بینهایت است ←

$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

* نکته‌ی مهم ← حد هر چند جمله‌ای وقتی $n \to +\infty$ ، با حد بزرگترین جمله‌ی آن چند جمله‌ای در بینهایت برابر است.

ب) واگرای نوسانی ← دنباله‌ی نوسانی که در بینهایت دارای حد نباشند، واگرا هستند. ← مثل: $\{(-1)^n\}$ نوسانی و واگرا

* مقایسه‌ی همگرایی و واگرایی دنباله ←

① واگرا و همگرا ←

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1n^k+a_2n^{k-1}+\dots}{b_1n^p+b_2n^{p-1}+\dots}=\begin{cases}\infty & ;k>p\\ \frac{a_1}{b_1} & ;k=p\\ 0 & ;k<p\end{cases}$$

② دنباله‌ی نمایی (C^n) ← C عدد ثابت

الف) $\text{if}: |C|<1 \xrightarrow{\text{then}}$ همگرا به صفر

ب) $\text{if}: C=1 \xrightarrow{\text{then}}$ همگرا به 1

پ) $\text{if}: |C|>1 \xrightarrow{\text{then}}$ واگراست

ت) $\text{if}: C=-1 \xrightarrow{\text{then}}$ واگراست.

③ دنباله‌ی $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ← همگرا به عدد نپر یا e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{an+b}\right)^{cn+d}=e^{\frac{ck}{a}}$$

* دنباله‌های یکنوا ← دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد یکنواست.

دنباله‌ی صعودی $\longrightarrow a_{n+1}\geq a_n$

دنباله‌ی نزولی $\longrightarrow a_{n+1}\leq a_n$

* روش‌های تشخیص یکنوایی دنباله ←

① تفاضل a_{n+1} و a_n ← $a_{n+1}-a_n$ را حساب می‌کنیم. اگر به ازای هر عدد طبیعی ←

≥ 0 باشد ← صعودی

≤ 0 باشد ← نزولی

اگر $a_n>0$:

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ ← صعودی

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1$ ← نزولی

② استفاده از مشتق تابع حقیقی ← اگر به ازای $x\geq 1$، $f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشد $\xrightarrow{\text{then}}$

$f'(x)\geq 0$ ← صعودی

$f'(x)\leq 0$ ← نزولی

* دنباله‌ی کراندار ← اگر یک دنباله همگرا باشد، آنگاه کراندار است و دارای کران بالا و پایین است.

* بررسی کرانداری دنباله ←

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} l \rightarrow \text{دنباله همگرا} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{دارای کران بالا و پایین است} \rightarrow \left\{\frac{n}{2n^2+1}\right\} \\ +\infty \text{ یا } -\infty \text{ یا } \pm\infty \rightarrow \text{واگرای بی‌نهایتی} \rightarrow \text{بیکران} \begin{cases} =+\infty \rightarrow \text{از پایین کراندار} \quad \sqrt{n} \\ =-\infty \rightarrow \text{از بالا کراندار} \quad -\sqrt{n} \\ =\pm\infty \rightarrow \text{از هر دو طرف بیکران} \quad (-1)^n\sqrt{n} \end{cases} \\ \text{واگرای غیر بی‌نهایتی} \rightarrow \text{کراندار} \rightarrow \text{کران‌دار از بالا و پایین} \quad \sin(n\pi), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

مثال: $S_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

با افزایش n، $\frac{1}{2n}$ کاهش می‌یابد. لذا کل عبارت کاهش می‌یابد.

← پس S_n نزولی است.

* مجموع جملات دنباله‌ی حسابی ←

$$\boxed{a_n = a_1+(n-1)d}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)} = \boxed{\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)}$$

وقتی a_1، d داده شده باشد از این رابطه استفاده می‌کنیم.

وقتی جمله‌ی عمومی a_n داده شده باشد از این رابطه استفاده می‌کنیم.

* رابطه‌ی S_n و S_{n-1} با a_n ←

$$\begin{cases} S_n = a_1+a_2+\dots+a_n \\ S_{n-1} = a_1+a_2+\dots+a_{n-1} \end{cases} \longrightarrow \boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$$

* اگر a_n، a_m دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی حسابی باشند ←

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$$

* مجموع جملات دنباله‌ی هندسی ⟵ $a_n = aq^{n-1}$

$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} \;, q \neq 1 \longrightarrow \boxed{S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}} \;, q \neq 1$

* رابطه‌ی S_{2n} , S_n : ⟵ $\boxed{\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n}$

* در مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی ⟵ اگر $|q|<1$ then

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

مجموع همه جملات ⟵ $\boxed{S = \frac{a}{1-q}}$

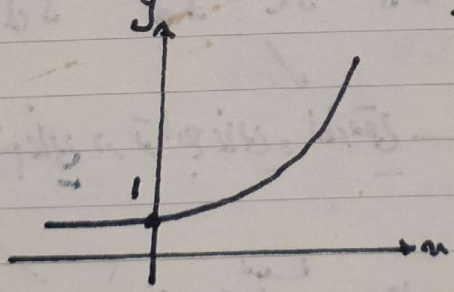
* نکته ⟵ در دنباله‌ی حسابی ⟵ تعداد جملات = (جمله‌ی آخر − جمله‌ی اول) / قدر نسبت + 1

- توابع نمایی و لگاریتمی ⟵ $f(x) = a^x \;, a>0 \,, a \neq 1 \,, x \in \mathbb{R}$

* نمودار توابع نمایی ⟵ نمودار تابع $y = a^x$

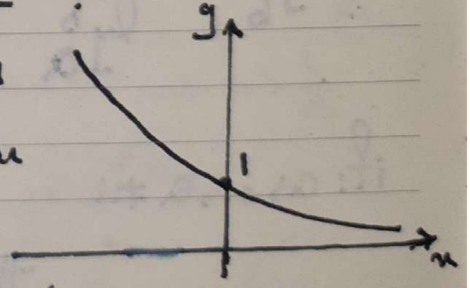
if: $a>1$

$f(x) = a^x$



if: $0<a<1$

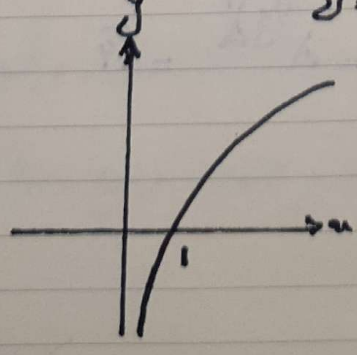
$f(x) = a^x$



* نمودار توابع لگاریتمی ⟵ $y = \log_a x$

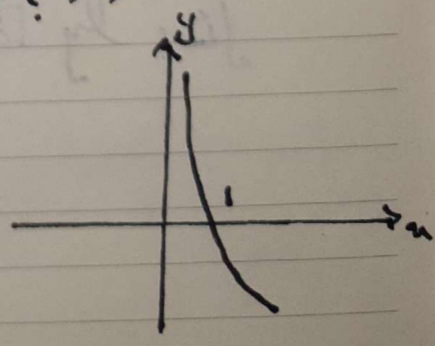
if: $a>1$

$y = \log_a x$



if: $0<a<1$

$y = \log_a x$



* قوانین ضرب، تقسیم و توان در توابع نمایی و لگاریتمی ←

① $\log_a^{AB} = \log_a^{A} + \log_a^{B}$ قانون ضرب

② $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a^{A} - \log_a^{B}$ قانون تقسیم

③ $\log_a A^n = n \log_a^{A}$ قانون توان

تعمیم → ④ $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m} \log_a^{A}$

* قوانین تغییر مبنا در توابع لگاریتمی ←

⑤ if: $a, b > 0$, $c \neq 1$, $b \neq 1$

$\xrightarrow{\text{then}} \log_b^{a} = \frac{\log_c^{a}}{\log_c^{b}}$

* $\boxed{\log 5 = 1 - \log 2}$

⑥ $\log_b^{a} = \frac{1}{\log_a^{b}}$

⑦ $\log_b^{a} \times \log_c^{b} \times \log_d^{c} = \log_d^{a}$

* قوانین نمایی در توابع نمایی و لگاریتمی ←

if: $a > 0$, $a \neq 1$

$\xrightarrow{\text{then}}$ ⑧ $a^{\log_a^{n}} = n$. $n > 0$ در درآمن بست

مثال: $\sqrt{5}^{\log_5^{4}} = 5^{\frac{1}{2}\log_5^{4}} = 5^{\log_5^{\sqrt{4}}} = \sqrt{4}$

* معادلات نمایی ← $a^{f(x)}=b$ یا $a^{f(x)}=b^{g(x)}$

۱) اگر بتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم ←

مثال: $27^{2x}=9^{5x-1}$ $\rightarrow (3^3)^{2x}=(3^2)^{5x-1} \rightarrow 3^{6x}=3^{10x-2}$

$\rightarrow 6x=10x-2 \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

۲) اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم ← برای حل معادله‌ی $a^{f(x)}=b$ ، اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم، از دو طرف معادله، در پایه‌ی a لگاریتم می‌گیریم.

مثال: $5^x=4 \rightarrow \log_5 5^x=\log_5 4 \rightarrow x\log_5 5=\log_5 4 \rightarrow \boxed{x=\log_5 4}$

* نامعادلات نمایی ← برای حل نامعادلات نمایی، ابتدا سعی می‌کنیم پایه‌ها را برابر کنیم، اگر پایه بزرگتر از ۱ بود، در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض نمی‌شود. اگر پایه بین صفر و ۱ بود، در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال: $32^{-3x}<\frac{1}{8}$ $\rightarrow$

① $2^{-15x}<2^{-3} \rightarrow -15x<-3 \rightarrow x>\frac{1}{5}$

② $(\frac{1}{2})^{15x}<(\frac{1}{2})^{3} \rightarrow 15x>3 \rightarrow x>\frac{1}{5}$

* معادلات لگاریتمی ← هدف ← یافتن مقدار یا مقادیری برای x که در معادله صدق کند.

نکات: ۱) دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم.

۲) اگر از تعریف و خواص و ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم، ممکن است جواب خارجی ظاهر شود. باید بدانیم جواب را با توجه به دامنه‌ی تعریف معادله، از مجموعه‌ی جواب‌ها کم کنیم.

* در حل معادلات لگاریتمی به حالت های زیر برمی خوریم:

(1) معادلاتی به شکل کلی $\log_a^{f(x)} = b$ به تساوی $f(x) = a^b$ می رسیم.

اینجا معادله را با توجه به شرایط $f(x) > 0$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ حل می کنیم.

مثال: $\log_2^{x^2-3} = 3 \rightarrow$ (1) $x^2 - 3 > 0 \rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $x^2 - 3 = 2^3 \rightarrow x^2 = 11 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{11} \checkmark & \text{قابل قبول} \\ x = -\sqrt{11} \checkmark & \text{قابل قبول} \end{cases}$

(2) معادلاتی به شکل کلی $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)}$ به تساوی $f(x) = g(x)$ می رسیم.

ریشه معادله را یافته و شرایط $f(x) > 0$ ، $g(x) > 0$ ، $a > 0$ ، $a \neq 1$ را بررسی می کنیم.

مثال: $\log^{x^2-3} = \log^{2x} \rightarrow$ (1) $x^2 - 3 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \checkmark \\ x = -1 \times \end{cases}$

(2) $x^2 - 3 > 0 \rightarrow x^2 > 3 \rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}$

(3) $2x > 0 \rightarrow x > 0$

* تابع رشد و زوال $\rightarrow$ تابع با ضابطه ی $P(t) = P(0)e^{kt}$ را تابع رشد با نسبت افزایشی

k برای $(k > 0)$ و تابع نمایی زوال با نسبت کاهشی k برای $(k < 0)$ می نامیم.

در این تابع $P(0)$ مقدار اولیه در $t = 0$ است:

(1) if: $k > 0 \xrightarrow{\text{then}}$ اکیداً صعودی

(2) if: $k < 0 \xrightarrow{\text{then}}$ اکیداً نزولی

$k \rightarrow$ نرخ

$$\boxed{\log_e^a = \ln a}$$

$$\boxed{\ln e = 1}$$

سوال مهم: $\rightarrow$ if: $\begin{cases} 4^x + 2^x = 72 \\ \log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \end{cases} \xrightarrow{then} y = ?$

$4^x + 2^x = (2^x)^2 + 2^x = 72 \longrightarrow 2^x = t > 0$

$\xrightarrow{then} t^2 + t - 72 = 0 \longrightarrow (t+9)(t-8) = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = -9 \ ✗ \\ \boxed{t = 8} \ ✓ \end{cases}$

$\longrightarrow 2^x = 2^3 \longrightarrow x = 3$

$\log 4 + \log(2y+9) = 2 \rightarrow \log 4(2y+9) = \log 10^2 \longrightarrow 4(2y+9) = 100$

$2y + 9 = 25 \longrightarrow \boxed{y = 8}$

* سوال مهم: در یک نوع گوشت، تعداد باکتری که پس از گذشت t دقیقه برابر $f(t)$ است که $f(t) = 2000\, e^{0/012t}$، پس از چه مدت تعداد باکتری ها ۱۰۰۰۰ می شود؟ $(\ln 5 = 1/48)$

$\rightarrow f(t) = 10000 = 2000\, e^{0.012t} \longrightarrow e^{0.012t} = 5$

$\xrightarrow{then}$ از طرفین معادله بر مبنای e لگاریتم می گیریم $\longrightarrow \ln 5 = 0/012t = 1/48$

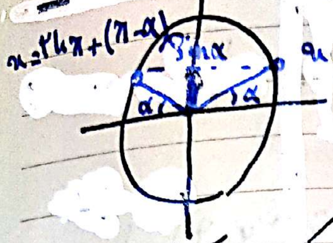
$t = \frac{1/48}{0/012} = 120\, min$

معادلات مثلثاتی ←

(1) معادلات ساده‌ی مثلثاتی ←

$\sin x = a = \sin\alpha$ ← برای حل اینها معادله باید x هایی را پیدا کنیم که سینوسشان برابر $\sin x = \sin\alpha$ باشد.

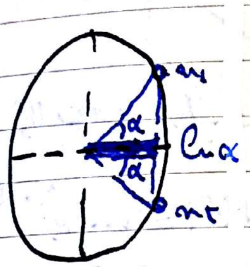
$-1 \le a \le 1$



$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

$\cos x = a = \cos\alpha$ ← برای حل اینها معادله باید x هایی را پیدا کنیم که کسینوسشان برابر $\cos\alpha$ باشد.

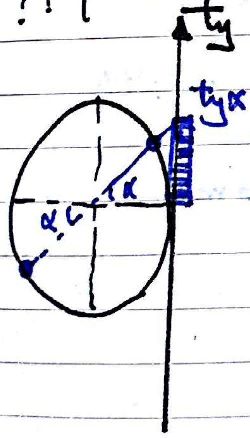
$-1 \le a \le 1$



$$\begin{cases} x_1 = 2k\pi + \alpha \\ x_2 = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

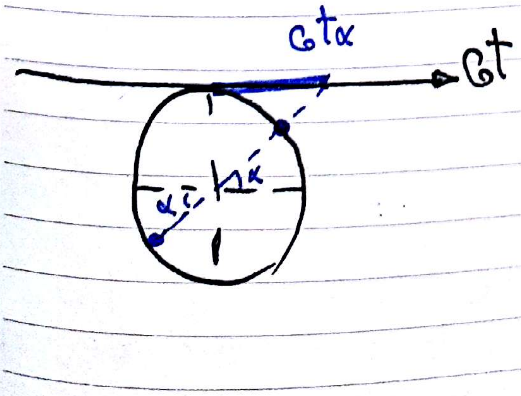
$$\boxed{x = 2k\pi \pm \alpha}$$

$\tg x = a = \tg\alpha$ ← برای حل اینها معادله باید x هایی را پیدا کنیم که تانژانتشان برابر $\tg\alpha$ باشد.



$$x = k\pi + \alpha$$

$\cotg x = a = \cotg\alpha$ ← برای حل اینها معادله باید x هایی را پیدا کنیم که کتانژانتشان برابر $\cotg\alpha$ باشد.



$$x = k\pi + \alpha$$

(۲) تبدیل معادلات مثلثاتی به دو نسبت مثلثاتی هم نام ← در معادلاتی به شکل کلی $\sin\alpha = \cos\beta$

یا $tg\alpha = \cot\beta$ با استفاده از فرمول های تبدیل $\frac{\pi}{2} - \alpha$ دو طرف را به دو نسبت مثلثاتی هم نام تبدیل می کنیم.

مثال: $\cos 3x = \sin x$

حل $\longrightarrow \cos 3x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\longrightarrow 3x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

* حالت های خاص ← $k \in Z$

(۱)
$\sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

$\sin x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

(۳) $tg\, x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

(۴) $\cot x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۲)
$\cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi$

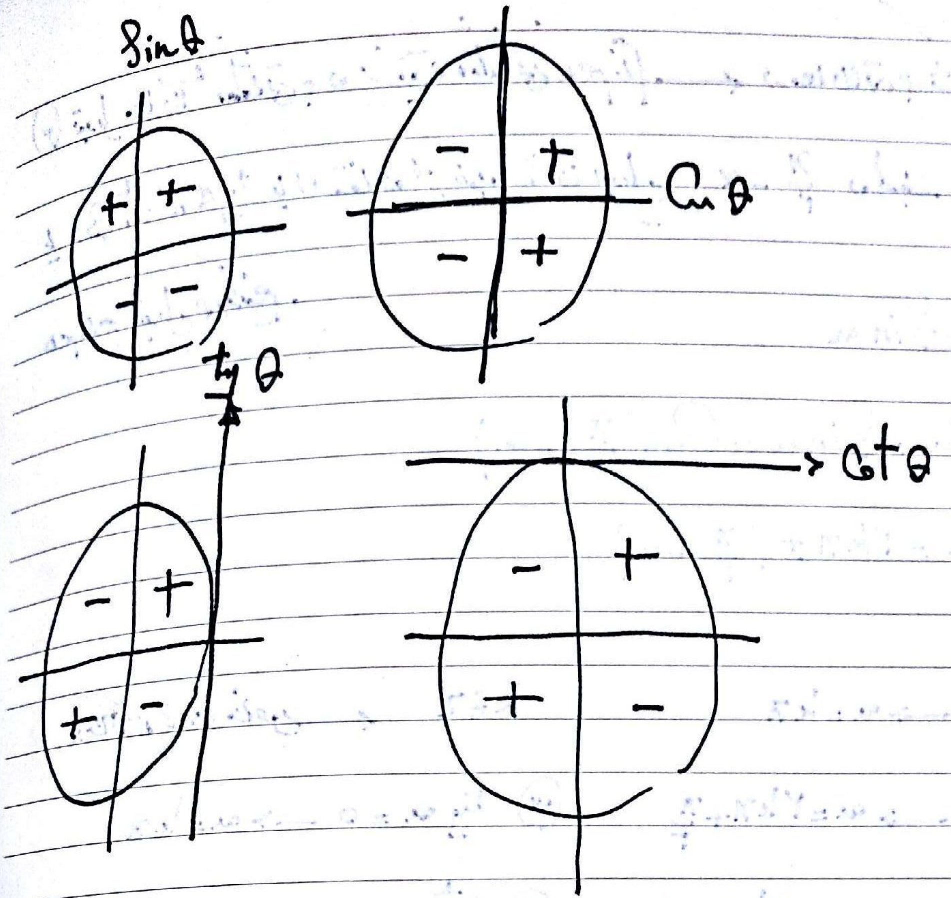
$\cos x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi + \pi$

* نکته ← (۱) $R = \frac{\pi}{180} D$

(۲) if: $\theta \xrightarrow{\text{در رادیان؛ شعاع}} r \longrightarrow$ کمان؛ طول l را بیابید

then →

$\} l \quad \theta = \frac{l}{r}$ برحسب رادیان



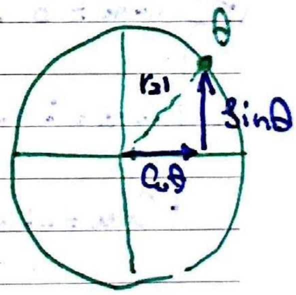
* نکته: ←

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$$

* نکته ← روابط بین نسبت های مثلثاتی θ ←

$$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \begin{cases}\sin^2\theta=1-\cos^2\theta\\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta\end{cases}\\ \left.\begin{aligned}\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \tan\theta\times\cot\theta=1 \longrightarrow \begin{cases}\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}\\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}\end{cases}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta\\ \sin^6+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta\end{cases}$$

$\cot a-\tan a=2\cot 2a$

* نکته ←

منفی اندار $\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\\ \cot(-\theta)=-\cot\theta\end{cases}$

منفی خور $\cos(-\theta)=\cos\theta$

* نسبت های مثلثاتی $(k\pi \pm \theta)$: ⟵

① اگر ضریب π عددی زوج باشد، آنگاه را از کمان های sin و Cos حذف می کنیم:

$$\begin{cases} \sin(\cancel{2k\pi} \pm \theta) = \sin(\pm\theta) \\ \cos(\cancel{2k\pi} \pm \theta) = \cos(\pm\theta) \end{cases}$$

② اگر ضریب π فرد باشد، آنگاه را از کمان های sin و Cos حذف می کنیم، اما نسبت مثلثاتی را قرینه می کنیم.

$$\begin{cases} \sin(\cancel{(2k+1)\pi} \pm \theta) = -\sin(\pm\theta) \\ \cos(\cancel{(2k+1)\pi} \pm \theta) = -\cos(\pm\theta) \end{cases}$$

③ ضریب π چه زوج و چه فرد باشد، آنگاه را از کمان های tg و Cot حذف می کنیم.

$$\begin{cases} tg(\cancel{k\pi} \pm \theta) = tg(\pm\theta) \\ Cot(\cancel{k\pi} \pm \theta) = Cot(\pm\theta) \end{cases}$$

* نسبت های مثلثاتی $\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$

$$\begin{cases} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = (?)\cos\theta \\ \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = (?)\sin\theta \\ tg\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = (?)\cot\theta \\ Cot\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = ?\ tg\,\theta \end{cases}$$

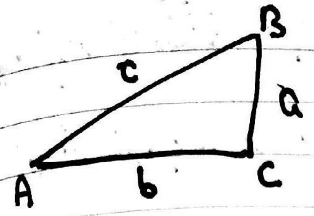
برای تشخیص علامت (?) که نسبت علامت سمت چپ معادله را به دست بیاوریم و به جای (?) قرار دهیم.

* نکته ⟵ در توابع $y = a\cos bx$ ، $y = a\sin bx$ داریم:

$$\begin{cases} Y_{max} = |a| \\ Y_{min} = -|a| \\ T = \left|\frac{2\pi}{b}\right| \end{cases} \longrightarrow$$

$$* y = \sin ax \xrightarrow{a>0} \begin{cases} x_{max} = \frac{\pi}{2a} \longrightarrow y_{max} \\ x_{min} = \frac{3\pi}{2a} \longrightarrow y_{min} \end{cases}$$

$$* y = \cos ax \xrightarrow{a>0} \begin{cases} x_{max} = \frac{2\pi}{a} \longrightarrow y_{max} \\ x_{min} = \frac{\pi}{a} \longrightarrow y_{min} \end{cases}$$



* قانون Sin , قانون Cos :

قانون Sin ⟵ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

قانون Cos ⟵
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

* مقادیر مهم مثلثاتی ⟵

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	

* چاق و لاغر
$$\boxed{\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}}$$

* روابط دوست دشمن :

دوست — دشمن

$$\begin{cases} \sin^2\theta = \frac{tg^2\theta}{1 + tg^2\theta} = \frac{1}{1 + \cot^2\theta} \\ \cos^2\theta = \frac{\cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta} = \frac{1}{1 + tg^2\theta} \end{cases}$$

دوست — دشمن

$$\begin{cases} \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$ ← نکته *

$$\begin{cases} tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta} \\ tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta} \end{cases}$$

ص ۱۱۵ – از اینم روابط بدست →

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) \\ 2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) \\ -2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+tg\theta}{1-tg\theta}=\dfrac{tg45+tg\theta}{1-tg45\, tg\theta}=tg(45+\theta) \\ \dfrac{1-tg\theta}{1+tg\theta}=\dfrac{tg45-tg\theta}{1+tg45\, tg\theta}=tg(45-\theta) \end{cases}$$ ← روابط ناقلا *

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\ \dfrac{\times\frac{1}{\cos\theta}}{\times\frac{1}{\cos\theta}}\ \dfrac{1+tg\theta}{1-tg\theta}=tg(45+\theta) \\ \dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{1-tg\theta}{1+tg\theta}=tg(45-\theta) \end{cases}$$ ← روابط ناقلای مخفی *

Scanned by CamScanner

* روابط اصلی $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، $tg\,2\theta$ ⟵

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\,tg\,\theta}{1+tg^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1-tg^2\theta}{1+tg^2\theta}$$

$$tg\,\theta = \frac{2\,tg\,\theta}{1-tg^2\theta}$$

* روابط فرعی 2θ ⟵

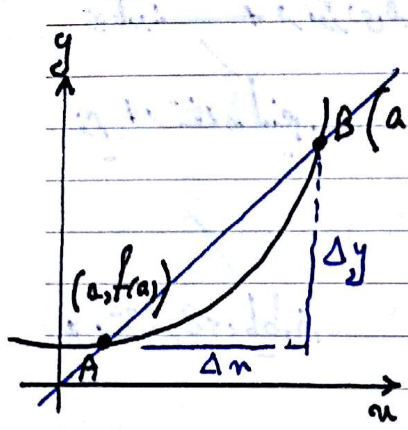
① $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+\sin 2\theta$

② $(\sin\theta-\cos\theta)^2 = 1-\sin 2\theta$

③ $$tg\,\theta+\cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\overbrace{\sin^2+\cos^2\theta}^{1}}{\underbrace{\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$$

④ $$tg\,\theta-\cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{-\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta} = -2\cot 2\theta$$

ریاضیات - مشتق



- تعریف مشتق و مشتق‌پذیری ←

* خط مماس ← هرگاه تابع f بر بازه‌ی باز شامل a تعریف شده باشد و حد زیر برقرار باشد، آنگاه خط گذرنده از نقطه‌ی $A(a,f(a))$ با شیب m_A را، خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی A می‌نامیم.

$$\boxed{m_A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}$$

* آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ←

① آهنگ متوسط تغییر $y=f(x)$ روی بازه‌ی x تا $x+\Delta x$ ← $\boxed{\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$

② آهنگ لحظه‌ای تغییر f در x ← $\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$ به شرطی که حد موجود باشد.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (\text{آهنگ متوسط تغییر})$$

* نکته ← در تابع f، برای بازه‌ی $[x_1,x_2]$ آهنگ متوسط تغییر به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

* تعریف مشتق ← اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده است، در این صورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

اگر حد بالا موجود نباشد ← f در a مشتق‌پذیر نیست.

* نکته: ← در مواردی که بخواهیم مشتق یک تابع را در یک نقطه بیابیم بهتر است از فرمول زیر استفاده کنیم.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

* مشتق‌های یک‌طرفه ←

$$① \; f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ مشتق راست

$$② \; f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ مشتق چپ

مثال: مشتق راست تابع $f(x) = x[-x]$ در $x = 0$ ←

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x[-x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} [-x] = -1$$

* مشتق‌پذیری و پیوستگی ←

* قضیه ← اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

* نتیجه ← ① اگر تابع f در نقطه‌ی درونی a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه دو شرط زیر برقرار است:

$$① \; \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \longrightarrow$$ شرط پیوستگی

$$② \; f'_+(a) = f'_-(a) \longrightarrow$$ هر دو موجود.

③ اگر مشتق‌های چپ و راست تابعی در یک نقطه موجود و با هم برابر باشند، تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر است.

④ اگر $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود نباشد ← f در a مشتق‌ناپذیر است.

* نکته ← در حالت کلی تابع با ضابطه‌ی $g = |f(x)|$ به ازای ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

مشتق‌گیری و قضایا ←

* قواعد ←

① $y = c\,f(x) \xrightarrow{\prime} y' = c\,f'(x)$

② $y = f(x) \pm g(x) \xrightarrow{\prime} y' = f'(x) \pm g'(x)$

③ $y = f(x)\cdot g(x) \xrightarrow{\prime} y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

④ $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}\ ,\ g(x) \neq 0$

⑤ قاعده‌ی زنجیری →

① $(f\circ g)'(x) = g'(x)\,f'(g(x))$

② $y = f(u) \longrightarrow y' = u' f'(u)$

③ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

④ $y'_x = u'_x \times y'_u$

* مشتق‌گیری توابع ←

① $y = u^n \xrightarrow{\prime} y' = n u' u^{n-1}$

② $y = \sqrt{u} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

③ $y = \sqrt[m]{u^n} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{n u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

④ $y = \dfrac{au+b}{cu+d} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{ad-bc}{(cu+d)^2} \times u'$

⑤ $y = \sin x \xrightarrow{\prime} y' = \cos x \Longrightarrow y = \sin u \xrightarrow{\prime} y' = u' \sin u$

⑥ $y = \cos u \xrightarrow{\prime} y' = -u' \sin u$

⑦ $y = \tan u \xrightarrow{\prime} y' = u'(1+\tan^2 u)$

⑧ $y = \cot u \xrightarrow{\prime} y' = -u'(1+\cot^2 u)$

* مشتق توابع قدر مطلق در یک نقطه ← در حالت عادی مشتق توابع قدر مطلق در یک نقطه اگر ریشه ی داخل قدر مطلق نباشد، کافی است قدر مطلق را در همسایگی آن نقطه تعیین علامت کنیم، سپس از تابع بدون قدر مطلق مشتق گرفته و مقدار قرار دهیم.

* $\boxed{\text{if: } f(x) = \frac{a}{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{-a}{x^2}}$

یافتن خط مماس یا قائم با مشتق ←

* معادله ی خط مماس ← $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

* معادله ی خط قائم ← $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

* یافتن نقطه ی تماس با داشتن شیب معلوم ←

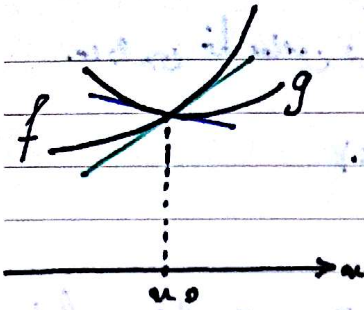
در این حالت از تابع مشتق گرفته و برابر ضریب زاویه ی معلوم قرار می دهیم و با توجه به شرایط مسئله طول نقطه ی (عرض آن یا رابطه ی بین طول و عرض نقطه ی) تماس به دست می آید.

مثال ← طول نقطه ای از تابع $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ را تعیین کنید که خط مماس در آن نقطه موازی محور xها باشد.

حل ← باید شیب خط مماس صفر باشد:

$$y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

• زاویه‌ی بین دو منحنی یا یک خط و یک منحنی ←



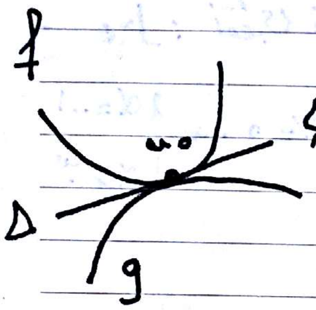
زاویه‌ی دو منحنی، زاویه‌ی بین مماس رسم شده بر دو منحنی است.

(در نقطه‌ی تقاطع)

ابتدا دو منحنی را با هم قطع داده، طول نقطه‌ی تقاطع را یافته، سپس شیب خط مماس بر دو منحنی را در این نقطه می‌یابیم و از رابطه‌ی زیر زاویه را پیدا می‌کنیم:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

* مماس بودن یک خط بر یک منحنی یا دو منحنی بر هم: ←



اگر دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بر هم مماس باشند، آنگاه معادله‌ی تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف خواهد داشت. اگر نقطه‌ی تماس را x_0 بنامیم آنگاه:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$$

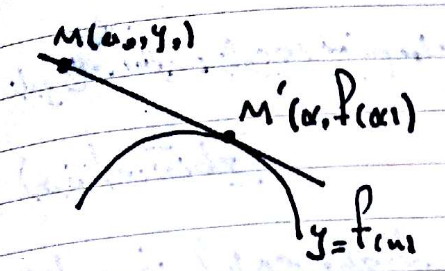
* مماس بودن یک تابع چند جمله‌ای بر محور xها ← در توابع چند جمله‌ای به شکل $f(x)=(x-a)^n g(x)$ ، $g(a)\neq 0$ ، $n\in N$ ، اگر تابع بخواهد بر محور xها مماس شود باید در آن عامل صفر شونده از مرتبه‌ی بیشتر یا مساوی ۲ ظاهر شود.

مثال ← $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ ← محور xها را در نقطه‌ی $x=2$ قطع می‌کند.
در نقطه‌ی $x=1$ با محور xها مماس است.

* خط مماس از نقطه‌ای خارج منحنی ← ۲ روش داریم:

روش ۱ ← برای یافتن خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ از نقطه‌ی $M(x_0,y_0)$ خارج منحنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی تماس $M(\alpha, f(\alpha))$ باشد. با یافتن شیب خط مماس در α ،

معادله‌ی خط مماس در M' را می‌نویسیم، مختصات نقطه‌ی M در این خط صدق می‌کند.



$$\underbrace{y}_{y_0} - f(\alpha) = f'(\alpha)(\underbrace{x}_{x_0} - \alpha)$$

از این معادله α بدست می‌آید، سپس نقطه‌ی تماس و معادله‌ی خط مماس پیدا می‌شود.

مثال: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = x^2+1$ از نقطه‌ی $A(1,-2)$ را بیابید.

حل: نقطه‌ی فرضی $M(\alpha,\alpha^2+1) \longrightarrow m = y'(\alpha) = 2\alpha$

معادله‌ی مماس $\longrightarrow y-(\alpha^2+1) = 2\alpha(x-\alpha) \Big|_{\substack{x=1\\ y=-2}} \longrightarrow \alpha^2-2\alpha-3=0 \longrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=3\end{cases}$

معادله‌ی خطوط مماس $\longrightarrow \begin{cases} y-2 = -2(x+1) \longrightarrow y = -2x \\ y-10 = 6(x-3) \longrightarrow y = 6x-8 \end{cases}$

* روش m: معادله‌ی خطوط گذرنده از نقطه‌ی M با شیب m را می‌نویسیم و آن را با منحنی قطع می‌دهیم. از $\Delta=0$ مقدار m بدست می‌آید و معادله‌ی خط مماس پیدا می‌شود.

مثال: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=x^2+1$ از نقطه‌ی $A(1,-2)$ را بیابید.

$$\begin{cases} y+2 = m(x-1) \\ y = x^2+1 \end{cases} \longrightarrow x^2+1 = m(x-1)-2 \longrightarrow \Delta=0 \longrightarrow \begin{cases} m=6 \\ m=-2 \end{cases}$$

معادله‌ی خطوط مماس $\longrightarrow \begin{cases} y+2 = 6(x-1) \longrightarrow y = 6x-8 \\ y+2 = -2(x-1) \longrightarrow y = -2x \end{cases}$

* مشتق تابع حاصلضرب دو تابع: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)g(a+\Delta x) - f(a)g(a)}{\Delta x}$

* مشتق ضمنی: $f(x,y)=0 \longrightarrow y'_x = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$

نکته‌ی مهم: عرض از مبدأ مماس بر منحنی ← در معادله‌ی مماس $x=0$

طول از مبدأ مماس بر منحنی ← در معادله‌ی مماس $y=0$

ریاضیات - کاربردهای مشتق

- اکسترمم‌های نسبی، مطلق و نقطه‌ی بحرانی ←

* ماکزیمم و مینیمم نسبی ←

① if: $c \in I$, $f(c) \geq f(x)$, $x \in I$ $\xrightarrow{\text{then}}$ f در نقطه‌ی c دارای ماکزیمم نسبی است.

② if: $c \in I$, $f(c) \leq f(x)$, $x \in I$ $\xrightarrow{\text{then}}$ f در نقطه‌ی c دارای مینیمم نسبی است.

* ماکزیمم و مینیمم مطلق ← نقطه‌ای ماکزیمم مطلق (مینیمم مطلق) تابع f است که عرض آن از کلیه‌ی نقاط دامنه‌ی تابع یا بازه‌ی $[a,b]$ بیشتر (کمتر) باشد.

* نقاط بحرانی ← نقطه‌ی درونی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

* نتیجه ← نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی بسته، نقاط بحرانی نیستند.

* طریقه‌ی یافتن نقاط بحرانی ← وقتی ضابطه‌ی تابع داده شده است، برای یافتن نقاط بحرانی، ابتدا دامنه‌ی تابع را یافته، سپس از تابع مشتق گرفته و نقاطی درونی از دامنه را که مشتق در آنها صفر است یا وجود ندارد، به دست می‌آوریم.

* نکته‌ها:
① در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادله‌ی $y'=0$ به دست می‌آید.
② در توابع به شکل $y=|f(x)|$ نقاط بحرانی از حل معادله‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ به دست می‌آید.

* اکسترمم‌های مطلق در توابع پیوسته ←

۲ روش داریم:

① استفاده از مشتق و تعیین نقاط بحرانی ←

مثال: ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-3x^2+1$ را در بازه‌ی $[-\frac{1}{2}, 2]$ را بیابید.

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \longrightarrow x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\underbrace{f(0)=1}_{\text{Max مطلق}} \qquad \underbrace{f(2)=-3}_{\text{مینیمم مطلق}} \qquad f(-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{8}$$

② استفاده از مجهول کمکی ←

مثال: Max و Min مطلق تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{\sin x}-\sin x$ را بیابید.

فرض: $\sqrt{\sin x}=t \longrightarrow 0\le \sin x\le 1 \xrightarrow{then} 0\le t\le 1$

$y=t-t^2 \longrightarrow y'=1-2t=0 \longrightarrow t=\frac{1}{2}$ در بازه‌ی $0\le t\le 1$ قرار دارد.

$$\underbrace{y(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}}_{\text{Max}} \qquad \underbrace{y(1)=0 \quad y(0)=0}_{\text{Min}}$$

* تشخیص یکنوایی تابع با استفاده از مشتق ←

قضیه ← فرض کنیم تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

① if: $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) < 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ اکیداً نزولی (نزولی)

② if: $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ صعودی اکیداً (صعودی)

③ if: $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) = 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ f ثابت است.

* تعیین یکنوایی ←

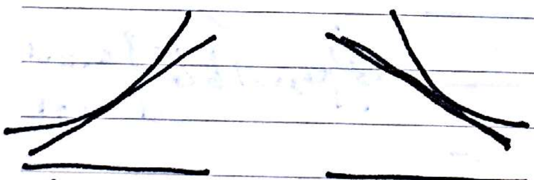
مثال: یکنوایی تابع با ضابطه‌ی $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3$ را بررسی کنید.

حل ← مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی را می‌یابیم ←

$y' = 5x^4 - 5x^2 = 0 \rightarrow 5x^2(x^2-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
	اکیداً صعودی		اکیداً نزولی		اکیداً نزولی		اکیداً صعودی

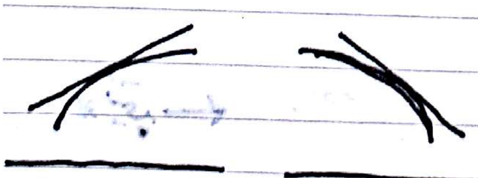
* تقعر منحنی ←



$f'(x) > 0, f'' > 0$ $f' < 0, f'' > 0$

الف) تقعر رو به بالا ← هرگاه مماس بر منحنی در همه‌ی نقاط بازه، زیر منحنی باشد. ← $f'' > 0$

ب) تقعر رو به پایین ← هرگاه مماس بر منحنی در همه‌ی نقاط بازه، بالای منحنی باشد. ← $f'' < 0$



$f' > 0, f'' < 0$ $f' < 0, f'' < 0$

نکته‌ی مهم ← عبارت درجه‌ی دوم ax^2+bx+c وقتی همواره نامنفی است که $a>0$ ، $\Delta \le 0$ باشد.

همواره $e^{-x} > 0$

* تشخیص نوع‌های نقاط اکسترمم نسبی ←

* آزمون مشتق اول ← اگر c عدد بحرانی تابع f باشد ←

الف) اگر f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد ← c ، Min تابع f

ب) اگر f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد ← c ، Max تابع f

* طرز تهیه‌ی یافتن نقاط اکسترمم نسبی با مشتق اول ←

مثال ← از تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-3x^5+5x^3$ نقاط اکسترمم نسبی را بیابید.

حل ← $f'(x)=-15x^4+15x^2=0 \longrightarrow 15x^2(1-x^2)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ نقاط بحرانی

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$15x^2$	+		+	0	+		+	
$1-x$	+		+		+	0	−	
$1+x$	−	0	+		+		+	
f'	−		+		+		−	
f	↘		↗		↗		↘	

نقاط اکسترمم نسبی $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

* آزمون مشتق دوم ← اگر c عدد بحرانی تابع f باشد و $f'(c)=0$ باشد ←

الف) اگر $f''(c)>0$ ← c ← نسبی Min

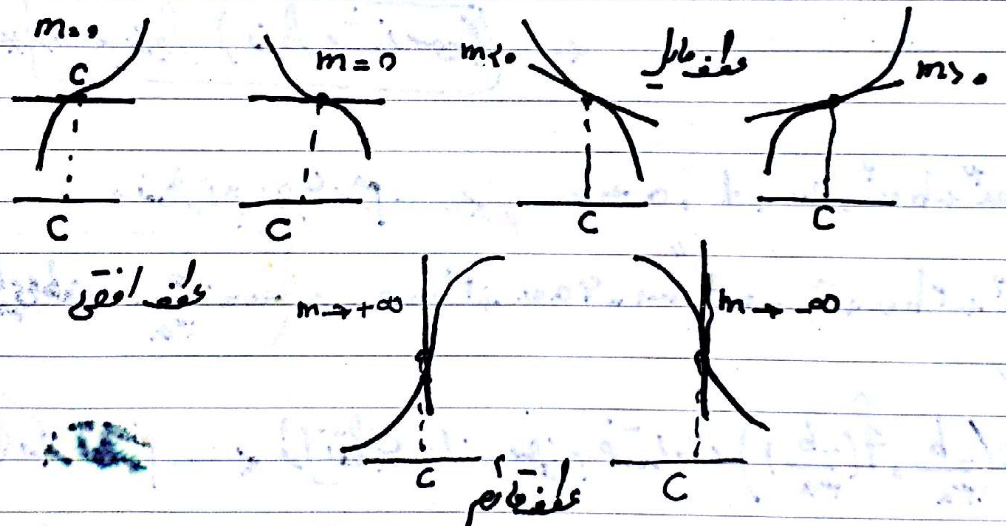
ب) اگر $f''(c)<0$ ← c ← نسبی Max

* **نقطه‌ی عطف** ←

تعریف ← فرض کنید f در $x=c$ پیوسته باشد، در اینصورت تابع f در c نقطه‌ی عطف دارد هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

① نمودار f در c، خط مماس داشته باشد. (مشتق چپ و راست در c برابر)

② جهت تقعر در c تغییر کند. (علامت f'' در دو طرف c عوض شود.)



$\boxed{f''=0 \Rightarrow \text{طول نقطه‌ی عطف}}$ ← باید تابع در این نقطه تعریف شده باشد

* در تابع به صورت $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ نقطه‌ی عطف برابر است با:

$$I \left| \begin{array}{l} x_I = \dfrac{a+b+c}{3} \\ y_I = f(x_I) \end{array} \right.$$

نقطه‌ی عطف وسط نقاط Max و Min (در صورت وجود) است:

$$y_I = \frac{y_{min}+y_{max}}{2}$$

مثال مهم: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2) = 0$ مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $\boxed{x=1}$ است و با تقسیم عبارت $x^3 - 3x + 2$ بر $x-1$ تقسیم جواب‌ها را می‌یابیم:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x + 2 & x - 1 \\
-x^3 + x^2 & \boxed{x^2 + x - 2} \\
\hline
x^2 - 3x + 2 & \\
-x^2 + x & \\
\hline
-2x + 2 & \\
+2x - 2 & \\
\hline
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$x^2 + x - 2 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

		-2		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

* رسم نمودار (نمودارشناسی) ←

* نمودار تابع درجه‌ی سوم ← $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , \ a \neq 0$

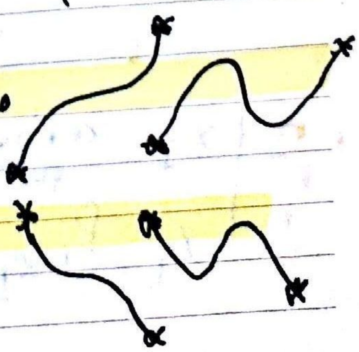
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f''(x) = 6ax + 2b = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{-b}{3a}}$ طول نقطه‌ی عطف

① مرکز تقارن ← نقطه‌ی عطف منحنی؛ مختصات $\left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$ I مرکز تقارن تابع است.

② شروع و پایان تابع ← از آنجایی که $\lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^3$ پیرو:

if: $a > 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ منحنی از ناحیه‌ی سوم شروع و به ناحیه‌ی اول ختم می‌شود.

if: $a < 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ 〃 〃 〃 دوم 〃 〃 چهارم ختم می‌شود.



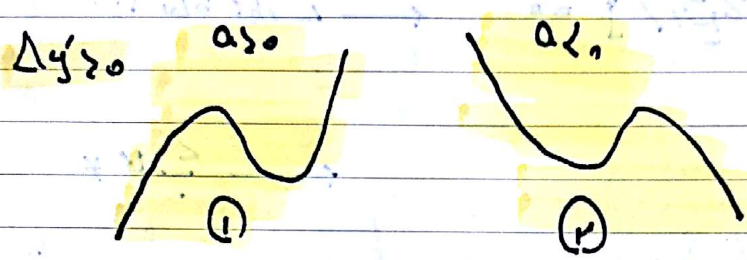
③ نمودار تابع ← $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

$\Delta y' > 0$ ← ۲ اکسترمم نسبی

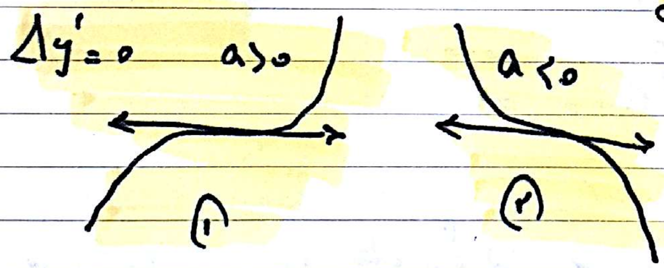
$\Delta y' < 0$ یا $\Delta y' = 0$ ← اصلاً اکسترمم ندارد.

then ← نمودار تابع به a (ضریب x^3) و $\Delta y'$ بستگی دارد.

حالت ① ← $y' = 0$ ← $\Delta y' > 0$ دو ریشه‌ی متمایز دارد. تابع یک Max و یک Min نسبی دارد.

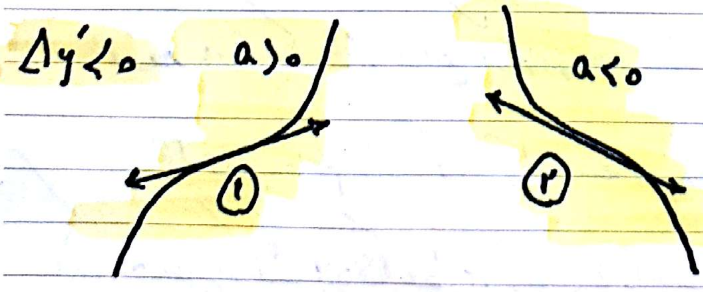


حالت ② ← $y' = 0$ ← $\Delta y' = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد. عطف افقی دارد ← فاقد اکسترمم نسبی



حالت ③ ← $y' = 0$ ← $\Delta y' < 0$ ریشه ندارد. عطف مایل دارد.

فاقد اکسترمم نسبی



* نمودار توابع چند جمله‌ای با درجات بالاتر از (۳) ⟵

در توابع چند جمله‌ای با ضابطه‌ی $y=f(x)$ برای یافتن مجهولات یا تشخیص نمودار، خواص زیر توجه می‌کنیم:

(۱) ضریب بزرگترین توان ⟵ منفی از کدام ناحیه شروع و به کدام ناحیه ختم می‌شود.

(۲) نقاط اکسترمم نسبی ⟵ $y'=0$ (ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد).

(۳) نقاط عطف ⟵ $y''=0$ (ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد).

* مجانب‌ها ⟵

* مجانب قائم ⟵ تابع f در $x=a$ مجانب قائم دارد هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

① $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ② $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

③ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ④ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

* روش یافتن مجانب‌های قائم ⟵ باید نقاطی را پیدا کنیم که تابع در آن نقاط حد نامتناهی داشته باشد. ⟵ معروف‌ترین توابعی که می‌توانند دارای مجانب قائم باشند، توابع کسری و توابع لگاریتمی هستند.

(۱) مجانب قائم توابع کسری ⟵ ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند به شرط آنکه حداقل در یک بازه‌ی یک طرفه (چپ یا راست) آن نقطه تعریف شده باشد و در آن نقطه حد نامتناهی داشته باشد. در دو حالت زیر باید احتیاط کنیم:

الف) وقتی صورت و مخرج ریشه‌ی مشترک دارند.

ب) وقتی تابع شامل رادیکال با فرجه‌ی زوج است.

(۴) مجانب قائم توابع لگاریتمی ← در توابع به معادله $y=\log_a u$ ریشه های $u=0$ و در توابع به معادله $y=\frac{u}{v}$ ریشه های $v=0$ و $u=0$ ؟ به شرط آنکه حداقل در یکی از حد های چپ یا راست دامنه قابل تعریف باشند، کاندید مجانب قائم هستند.

* مجانب افقی ←

تعریف: خط $y=l$ را مجانب افقی منحنی تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

نکته: توابعی که دارای دامنه کراندار باشند مجانب افقی ندارند. (به عنوان مثال توابع $y=\sqrt{4-x^2}$ یا $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ فاقد مجانب افقی هستند)

* روش یافتن مجانب های افقی ← باید شرایط وجود حد را با توجه به دامنه تابع در بی نهایت بررسی کنیم.

(۱) مجانب افقی در توابع گویا ← در صورتی مجانب افقی دارند که درجه ی صورت کوچکتر یا مساوی درجه ی مخرج باشد.

(۲) مجانب افقی در توابع رادیکالی ← از هم ارزی های رادیکالی برای یافتن مجانب افقی استفاده می کنیم.

* مجانب مایل ← خط $y=mx+h$ مجانب مایل تابع $y=f(x)$ است هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-(mx+h)\big) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x)-(mx+h)\big) = 0$$

شرط لازم: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ یا $-\infty$

* روش‌های یافتن مجانب‌های مایل:

① روش تقسیم در تعیین مجانب مایل توابع گویا: در توابع گویا به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$، اگر درجه f تنها یک درجه از g بیشتر باشد، خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج مجانب مایل تابع است.

② روش هم‌ارزی در توابع رادیکالی:

① $y = mx + h + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ $(a > 0)$

$y = mx + h + \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$: معادله مجانب‌ها

② $y = mx + h + \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}$

$y = mx + h + \sqrt[3]{a}\left(x + \frac{b}{3a}\right)$: معادله مجانب

③ روش حد برای یافتن m, h: فرض کنیم خط $mx + h$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ است، آنگاه برای یافتن m, h با استفاده از $\lim\limits_{x \to \pm\infty}(f(x) - (mx + h))$ خواهیم داشت:

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (ضریب زاویه‌ی مجانب مایل)

$h = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ (عرض از مبدأ مجانب مایل)

به شرط آنکه m, h وجود داشته باشند، در غیر این صورت تابع فاقد مجانب مایل است.

Scanned by CamScanner

* اسم نمودار تابع هموگرافیک ←

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq 0$ و $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$) تابع هموگرافیک است.

دامنه‌ی آن $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و تابع در دامنه‌ی خود پیوسته است.

* خواص ←

① مجانب‌ها ← یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

مجانب قائم ← $x=-\frac{d}{c}$ (ریشه‌ی مخرج)

مجانب افقی ← $\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{a}{c}$

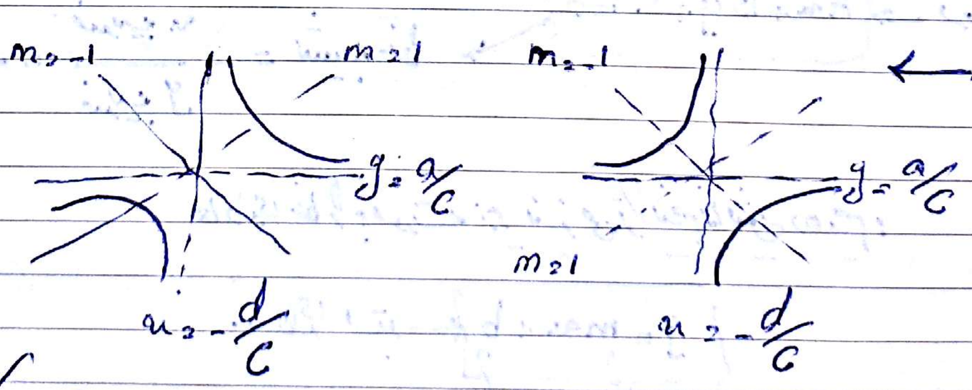
② مرکز تقارن ← محل تلاقی مجانب‌های تابع ← $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)=\omega$

③ مشتق تابع ← $x\neq-\frac{d}{c}$ ، $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ ← $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

الف) اگر $ad-bc>0$ then $f'(x)>0$ ← تابع به ازای هر x از بازه‌های $(-\frac{d}{c},+\infty)$ و $(-\infty,-\frac{d}{c})$ صعودی اکید است.

ب) اگر $ad-bc<0$ then $f'(x)<0$ ← تابع به ازای هر x از بازه‌های $(-\frac{d}{c},+\infty)$ و $(-\infty,-\frac{d}{c})$ نزولی اکید است.

④ نمودار تابع ←



⑤ محورهای تقارن ← تابع دارای دو محور تقارن عمود بر هم با شیب‌های ۱ و ۱- است که از مرکز تقارن عبور می‌کنند.

$m=1 \to \omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right) \to y-\frac{a}{c}=1\left(x+\frac{d}{c}\right)$

$m=-1 \to \omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right) \to y-\frac{a}{c}=-1\left(x+\frac{d}{c}\right)$

* ادامه در آخر دفتر ←

ریاضیات - هندسه ی مختصاتی و منحنی های درجه ی دوم

* هندسه ی مختصاتی و منحنی های درجه ی دوم

ناحیه ی دوم	ناحیه ی اول
$x<0 , y>0$	$x>0 , y>0$
ناحیه ی سوم	ناحیه ی چهارم
$x<0 , y<0$	$x>0 , y<0$

* نقطه

* مختصات وسط پاره خط

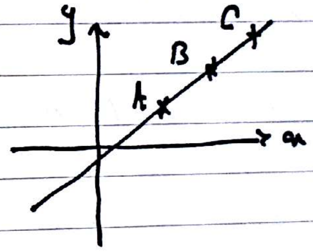
$$\begin{cases} A(x_1 , y_1) \\ B(x_2 , y_2) \end{cases} \longrightarrow \boxed{M \begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}}$$

* فاصله ی دو نقطه از هم

$$\begin{cases} A(x_1 , y_1) \\ B(x_2 , y_2) \end{cases} \longrightarrow \boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

* شرط برای استقامت بودن ۳ نقطه

$$\begin{cases} A(x_1 , y_1) \\ B(x_2 , y_2) \\ C(x_3 , y_3) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{gathered} m_{AB} = m_{AC} \\ \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \end{gathered}}$$



* معادله ی خط

معادله ی کلی خط

در معادله ی کلی خط $\longrightarrow \boxed{Ax + By + C = 0} \longrightarrow$ شیب خط $= -\dfrac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\dfrac{A}{B}$

معادله ی خط را به صورت زیر نیز می توانیم نمایش دهیم:

$$\boxed{y = \underbrace{m}_{\text{شیب}}x + \underbrace{b}_{\text{عرض از مبدأ}}}$$ ← معادله ی ستر

* اوضاع دو خط نسبت به هم ←

مقایسه‌ی دو خط با هم ←

	معادله‌ی باز	معادله‌ی استاندارد
	$ax+by+c=0 , a'x+b'y+c'=0$	$y=mx+h , y=m'x+h'$
① دو خط موازی	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$m=m' , h\neq h'$
② دو خط منطبق	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	$m=m' , h=h'$
③ دو خط عمود بر هم	$aa'+bb'=0$	$m\times m'=-1$

* فاصله‌ی نقطه از خط و دو خط موازی از هم ←

فاصله‌ی نقطه از خط ← برای یافتن فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ از یک خط، اگر صورت معادله‌ی باز مرتب نباشد ($ax+by+c=0$) آن را مرتب کرده و:

$$\boxed{AH=d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$ ← خیلی مهم اند

فاصله‌ی دو خط موازی ←

$$\begin{cases}ax+by+c=0\\ ax+by+c'=0\end{cases}\longrightarrow \boxed{d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

→ فاصله‌ی مبدا از خط ← $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

* مثال خیلی مهم (سراسری تجربی ۹۰) ← نقطه‌ی $A(7,4)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $3y+4x=8$ و $2y-3x=11$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است.

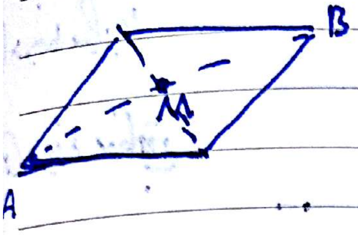
حل ← اول نقطه در هیچ کدام از دو معادله صدق نمی‌کند. پس محل تقاطع دو خط نقطه‌ی روبروی A است.

← دو خط با معادله‌های بالا را به صورت روبه‌رو با هم قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} 2y-3x=11 & \times(-3) \\ 3y+4x=8 & \times 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{-6y}+9x=-33 \\ \cancel{6y}+8x=16 \end{cases}$$

$$17x=-17 \rightarrow x=-1$$

$$2y+3=11 \rightarrow y=4 \rightarrow B(-1,4)$$



$A(7,6)$

$$M=\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{4+6}{2}\right)=(3,5)$$

* سؤال سوم ← به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y+2x=0$ ، $2y+ax+5=0$ و $y+3x=a$ متقارب‌اند؟

حل ← سه خط متمایز زمانی متقارب‌اند که مختصات نقطه‌ی برخورد دو تای آنها در معادله‌ی سومی صدق کند.

$$\begin{cases} y+2x=0 & \times(-2) \\ 2y+ax=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{-2y}-4x=0 \\ \cancel{2y}+ax=-5 \end{cases}$$

$$(a-4)x=-5 \rightarrow x=\frac{-5}{a-4}$$

$$y=\frac{10}{a-4}$$

$$y+3x=a \longrightarrow \frac{10}{a-4}-\frac{15}{a-4}=a$$

$$\rightarrow a^2-4a+5=0 \rightarrow \Delta=-4<0$$

نشدنی

* دستگاه معادلات خطی ←

* دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی خطی به شکل زیر است: ←

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

(۱) دستگاه دقیقاً یک جواب دارد ← اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (دو خط متقاطع اند)

(۲) دستگاه جواب ندارد یا غیر ممکن است ← اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ (دو خط موازی اند و غیر منطبق)

(۳) دستگاه دارای جواب‌های بی‌شمار است ← اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (دو خط منطبق اند)

* دستگاه چند معادله چند مجهولی ←

مثال: دستگاه معادلات را حل کنید.

$$\begin{cases} (1)\quad x+y-z=-1 \\ (2)\quad x-y+z=5 \\ (3)\quad -x+y+z=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)+(2) \Rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2 \\ (1)+(3) \rightarrow 2y=8 \rightarrow y=4 \\ (2)+(3) \rightarrow 2z=14 \rightarrow z=7 \end{cases}$$

* نکته: هرگاه تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر باشد، دستگاه زمانی جواب دارد که جواب به دست آمده در بقیه‌ی معادلات صدق کند.

* نکته: در دستگاه‌های به شکل مقابل $\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \\ a_1x+b_1y+c_1z=k \end{cases}$ با فرض $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$ ، x و y و z را برحسب t یافته و در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم و سپس مجهول مورد نظر را می‌یابیم.

* ادامه‌ی کاربردهای مشتق ←

* رسم نمودار توابع گویا (کسری) ←

خواص ←

① وجود مجانب مایل، افقی یا قائم ←

مجانب قائم ← با برابری ریشه‌های مخرج

مجانب افقی ← درجه‌ی صورت < درجه‌ی مخرج

مجانب مایل ← درجه‌ی صورت = درجه‌ی مخرج + 1

با بررسی حد تابع در $\pm\infty$

$$y = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} \rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} y = \begin{cases} y = 0 & (\text{مجانب افقی}) \quad n < m \\ y = \frac{a}{a'} & (\text{مجانب افقی}) \quad n = m \\ y = \infty & (\text{مجانب مایل}) \quad n = m+1 \end{cases}$$

شیب مجانب مایل مثبت ⇐ $\frac{a}{a'} > 0$

شیب مجانب مایل منفی ⇐ $\frac{a}{a'} < 0$

② مماس بودن منحنی بر محور xها ← اگر نمودار تابع گویا در $x = \alpha$ بر محور xها مماس باشد، آنگاه معادله‌ی تلاقی آن با محور xها ریشه‌ی مضاعف یا مکرر می‌دهد.

حالت ① ← اگر نمودار در $x = \alpha$ اکسترمم نسبی باشد، صورت کسر دارای ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج α است.

حالت ② ← اگر نمودار در $x = \alpha$ عطف افقی باشد، صورت کسر دارای ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد α است.

③ موجود بودن مجانب افقی ← درصورتی که m عرض الستدمیم (?) غیر صفر ← موجود بودن عرض الستدمیم

نیمی نمودار باشد، آن گاه خط $y = m \neq 0$ بر نمودار تابع گویای $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

مماس است، بنابراین معادله‌ی تلاقی خط و نمودار، ریشه‌ی مضاعف دارد.

④ موجود بودن طول نقطه‌ی الستدمیم ← اگر طول نقطه‌ی الستدمیم داده شده باشد،

این طول ریشه‌ی معادله‌ی $y' = 0$ است.

* نمودار توابع مثلثاتی ←

خواص ←

① دوره‌ی تناوب ← اگر تابع f متناوب و با دوره‌ی T باشد، آن گاه نمودار تابع

بازه‌ی به طول T به طور نامحدود تکرار می‌شود.

② مجانب‌ها ←

حالت ① ← فقط مجانب قائم می‌توانند داشته باشند. افقی و مایل ندارند.

حالت ② ← در توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی، مجانب قائم از ریشه‌های

مخرج حاصل می‌شود.

* نکته ← در توابع به صورت $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) + k$، نقطه‌ی عطف

$$I \begin{cases} x_I = \frac{a+b+c}{3} \\ f(x_I) = y_I \end{cases}$$

برابر است با:

* نقطه‌ی عطف وسط نقاط Max و Min (در صورت وجود) است.

$$y_I = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}$$

Scanned by CamScanner

* نکته ← فاصله ی نقطه ی $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$