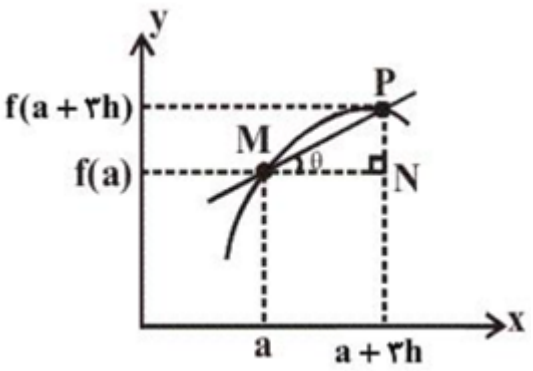
سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱



شیب وتر MP $= \tan\theta = \frac{PN}{MN} = \frac{y_P - y_N}{x_N - x_M}$

$= \frac{f(a+۳h)-f(a)}{(a+۳h)-a} = \frac{f(a+۳h)-f(a)}{۳h}$

$\Rightarrow \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+۳h)-f(a)}{۳h} \overset{۳h=t}{=} \lim_{t\to ۰} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} = f'(a)$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

چون خط موردنظر، در نقطه x = ۱ بر نمودار تابع f مماس است، پس داریم:

$f(۱) = ۴(۱) + ۳ = ۷ \ , \ f'(۱) = ۴$

$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{۲f^{۲}(x) - ۱۱f(x) - ۲۱}{۲(x-۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{(f(x)-۷)(۲f(x)+۳)}{۲(x-۱)}$

$= \frac{۱}{۲} \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \times \lim_{x\to ۱} (۲f(x) + ۳) = \frac{۱}{۲} f'(۱)(۲f(۱) + ۳)$

$= \frac{۱}{۲} \times ۴(۲ \times ۷ + ۳) = ۳۴$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

$\lim_{x\to ۱} \frac{f^{۲}(x) - f^{۲}(۱)}{x-۱}$

$= \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \times \lim_{x\to ۱} (f(x) + f(۱))$

$= (f'(۱))(۲f(۱)) = (۳)(۲(-۲)) = -۱۲$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

خط مماس بر تابع f را در نقطه $P(۱,۲)$ بدست می‌آوریم. می‌دانیم که شیب خط مماس برابر $f'(۱)$ می‌باشد:

$$y - y_p = m(x - x_p) \Rightarrow y - ۲ = -\frac{۳}{۲}(x - ۱)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۳x}{۲} + \frac{۷}{۲} \xrightarrow[\text{یعنی } y=۰]{\text{تقتطع با محور } x\text{ها}} x = \frac{۷}{۳}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = ۰$ برابر $f'(۰)$ است. پس داریم:

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{x\sqrt{x+۴}-۰}{x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt{x+۴} = ۲$$

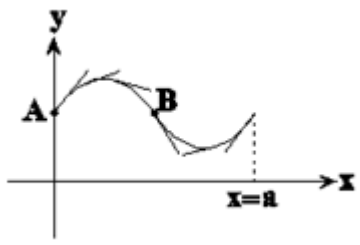
از طرف دیگر خط مماس از نقطه $(۰,۰)$ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت $y = ۲x$ است و این خط از نقطه $(-\frac{۱}{۲},-۱)$ نیز می‌گذرد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به شکل، مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شیب خط مماس برنمودار است، از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f(۱)-f(x)}{x-۱} = -\lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = -f'(۱)$$

مشتق همان شیب خط مماس بر تابع است. اگر θ زاویه خط با جهت مثبت محور xها باشد، شیب خط برابر است با:

$$\tan\theta = \text{شیب خط} \Rightarrow \tan(۱۵۰^\circ) = -\tan ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow f'(۱) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow -f'(۱) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

شیب خط L همان $f'(۴)$ است. داریم:

$$m_L = \frac{۱-(-۱)}{۴-۰} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۲}$$

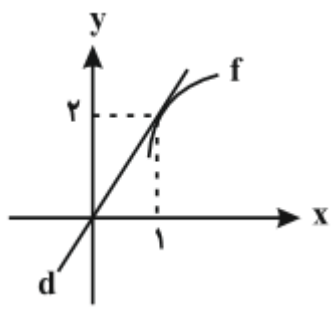
$$\lim_{x\to ۴} \frac{x-۴f(x)}{۱-(f(x))^۲} = \lim_{x\to ۴} \frac{x-۴+۴-۴f(x)}{(۱+f(x))(۱-f(x))}$$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{۱}{۱+f(x)} \times \lim_{x\to ۴} \left[\frac{x-۴}{۱-f(x)} + \frac{۴(۱-f(x)}{۱-f(x)}\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[-\frac{۱}{f'(۴)} + ۴\right] = \frac{۱}{۲}(-۲+۴) = ۱$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳



$$\lim_{x\to ۱} \frac{f^۲(x)-۴}{x^۲-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-۲}{x-۱} \times \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)+۲}{x+۱}$$

$$= f'(۱) \times \frac{۲+۲}{۱+۱} = ۲f'(۱) = ۲ \times ۲ = ۴$$

شیب مماس: $f'(۱) = m_d = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۲-۰}{۱-۰} = ۲$:

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول: درصورت کسر f(x) را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{(f(x+h)-f(x))-(f(x-h)-f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to ۰} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to ۰} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$= f'(x) + f'(x) = ۲f'(x) \Rightarrow ۲f'(x) = ۲\sqrt{x} \Rightarrow f'(۴) = ۲$$

راه حل دوم: اگر f در $x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه با استفاده از فرمول

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{h} = (m-n)f'(x_۰)$$

داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} = (۱-(-۱))f'(x) = ۲f'(x)$$

لذا:

$$.۲f'(x) = ۲\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(۴) = ۲$$

سوال ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

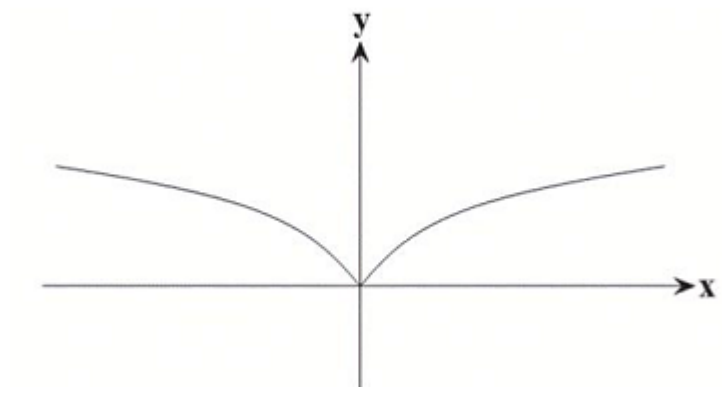
شیب خط گذرا از نقاط A(۲,۶) و B، همان مشتق تابع f در x = ۲ یا f'(۲) است.

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{y_B - ۶}{\frac{۵}{۲} - ۲}$$

$$\Rightarrow ۳y_B - ۱۸ = ۱ \Rightarrow y_B = \frac{۱۹}{۳}$$

سوال ۱۲

پاسخ: گزینه ۳



از نمودار مشخص است که شیب خطوط مماس بر نمودار در سمت راست محور yها مثبت و در سمت چپ محور yها منفی است. (صحیح بودن گزینه «۱»)

این نمودار نسبت به محور y متقارن است، پس $f'(-a) = -f'(a)$ (صحیح بودن گزینه «۲»)

از شکل نمودار مشخص است که برای xهای مثبت، با افزایش x شیب خط مماس و درنتیجه مشتق کاهش می‌یابد. هم‌چنین برای xهای منفی، با افزایش x شیب خط مماس و درنتیجه مشتق منفی‌تر می‌شود (ناصحیح بودن گزینه «۳»).

برای بررسی صحیح‌بودن گزینه «۴» داریم:

$$f'(۲) < f'(۱) \Rightarrow -f'(۱) + f'(۲) < ۰ \Rightarrow f'(-۱) + f'(۲) < ۰$$

سوال ۱۳

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f^۳(x)-۴f(x)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)(f(x)+۲)(f(x)-۲)}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} (f(x)(f(x)+۲)) \times \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-۲}{x-۱} = ۲ \times ۴ \times f'(۱)$$

$$= ۸ \times ۳ = ۲۴$$

سوال ۱۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای نوشتن معادله خط مماس نیاز به مختصات نقطه تماس و شیب خط مماس داریم.

طول نقطه در صورت سؤال داده شده و عرض آن هم $f(۲) = ۰$ است. برای تعیین شیب از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)\sqrt{x^۲+۵}-۰}{x-۲}$$

$$= \sqrt{۲^۲+۵} = \sqrt{۹} = ۳ \Rightarrow m = ۳$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix} A(۲,۰) \\ m = ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = ۳(x - ۲) \Rightarrow y = ۳x - ۶$$

$$\xrightarrow{\text{عرض از مبدا}} y = -۶$$

سوال ۱۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{2x^2-1}}-0}{x-1} \xrightarrow[\text{مزدوجصورت}]{\text{رب صورت و مخرج در}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{2x^2-1}}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{2x^2-1}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{2x^2-1}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{(x-1)\times\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{(x-1)(\sqrt{2})} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{(x-1)\times\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

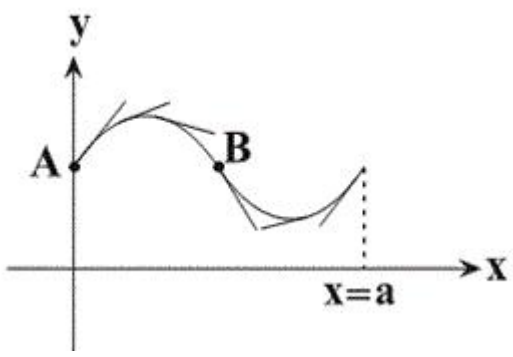
دقت کنید که در همسایگی راست $x = 1$، عبارت $x^2 - 1$ مقداری مثبت دارد.

سوال ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با توجه به شکل مقدار مشتق تابع $y = f(x)$ که همان شیب خط مماس است از نقطه A تا B پیوسته کاهش می‌یابد و سپس از B به بعد در حال افزایش است.



سوال ۱۷

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ۲

$$g'(x) = -2xf'(4-x^2)$$

$$\Rightarrow g''(x) = 4x^2f''(4-x^2) - 2f'(4-x^2)$$

$$\Rightarrow g''(\sqrt{3}) = 4(3)f''(1) - 2f'(1) = 12(-1) - 2(-5) = -2$$

سوال ۱۸

پاسخ: گزینه ۲

چون f تابعی خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است، پس $f'(x) = a$، بنابراین $f(۲x) = ۲ax + b$ و در نتیجه $(f(۲x))' = ۲a$ خواهد بود $\lim_{x\to ۱} \frac{f(۲x)-f(۲)}{x-۱} = (f(۲x))'$ و با توجه به $f(۰) = ۱$، معادله خط $f(x) = ۲x + ۱$ خواهد بود. از طرفی $g'(۲) = f'(۲) = ۲$. پس داریم:

$$f(۱) + g'(۲) = ۳ + ۲ = ۵$$

سوال ۱۹

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x-۳}{f(x)} = \frac{۱}{\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)}{x-۳}} = \frac{۱}{f'(۳)} = ۳ \Rightarrow f'(۳) = \frac{۱}{۳}$$

یعنی شیب خط $d_۲$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است. حال چون خط $d_۱$ بر خط $d_۲$ عمود است، شیب $d_۱$ یا به عبارت دیگر، مشتق تابع f در $x = ۲$ برابر -۳ است.

$$f'(۲) = -۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)}{x^۳ - ۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)}{(x^۲ + ۲x + ۴)(x - ۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{x^۲ + ۲x + ۴} \times \lim \frac{f(x)}{x - ۲}$$

$$= \frac{۱}{۱۲} f'(۲) = -\frac{۱}{۴}$$

سوال ۲۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در نقطه B، $f' = ۰$ و در نقطه C نیز $f = ۰$ است، بنابراین در این دو نقطه حاصل $f'.f$ برابر صفر است.

در نقطهA ، f و f' هر دو مثبت‌اند و در نقطه D، $f < ۰$ و $f' > ۰$ است.

$$\Rightarrow f_D . f'_D < ۰$$

سوال ۲۱

پاسخ: گزینه ۱

طبق صورت سؤال داریم: $f(۲ + h) - f(۲) = ۳h - h^۲$

پس: $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = ۳ - h$

و شیب خط مماس در $x = ۲$ برابر است با:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = \lim_{h\to ۰} (۳ - h) = ۳$$

سوال ۲۲

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-۴}{۲h} = \frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = \frac{۱}{۲}f'(۲) = -۳$$

$$\Rightarrow f'(۲) = -۶$$

چون خط d در نقطه $x = ۲$ بر نمودار توابع f و g مماس است، $g'(۲) = f'(۲) = -۶$ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{g(۲-h)-۴}{۳h} = -\frac{۱}{۳}\lim_{h\to ۰} \frac{g(۲-h)-g(۲)}{-h}$$

$$= -\frac{۱}{۳}g'(۲) = \left(-\frac{۱}{۳}\right)(-۶) = ۲$$

سوال ۲۳

پاسخ: گزینه ۳

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x = \frac{۳}{۲}$ داریم: $[۳x] = ۴$. بنابراین در این همسایگی تابع f برابر است با:

$$f(x) = ۴mx - ۲$$

شیب خط $y = ۴mx - ۲$ برابر $m۴$ است، پس $f'\left(\frac{۳}{۲}\right)$ برابر $m۴$ است. بنابراین داریم:

$$۲m + ۱ = ۴m \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}$$

سوال ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ صحیح $x = k$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to k^+} f(x) = -۱ \ , \ \lim_{x\to k^+} g(x) = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to k^+} (fg)(x) = ۰$$

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = -۱ \ , \ \lim_{x\to k^-} g(x) = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to k^-} (fg)(x) = -۱$$

$$f(k) = ۰ \quad , \quad g(k) = ۰ \Rightarrow (fg)(k) = ۰$$

پس تابع از راست پیوسته است.

مشتق راست تابع را در $x=k$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to k^+} \frac{(f.g)(x)-(f.g)(k)}{x-k} = \lim_{x\to k^+} \frac{(x-[x])([x]+[-x])-۰}{x-k}$$

$$= \lim_{x\to k^+} \frac{(x-k)(-۱)}{x-k} = -۱$$

پس تابع موردنظر، در نقاط صحیح فقط از راست مشتق‌پذیر است.

سوال ۲۵

پاسخ: گزینه ۲

خط $d: y = ax + ۱$ بر تابع f مماس و چون $f'(۱) = ۳$ است، شیب این خط یعنی a برابر ۳ است. برای محاسبه عرض نقطه A مقدار $x = ۱$ را $y = ۳x + ۱$ در جایگذاری می‌کنیم. بنابراین داریم: $A(۱,۴)$.

خط d بر خط L عمود است پس $m_L = -\frac{۱}{۳} = f'(-۳)$. هم‌چنین خط L از نقطه $C(۰,۴)$ عبور می‌کند، پس $L: y = -\frac{۱}{۳}x + ۴$ برای محاسبه $f(-۳)$ نیز مقدار $x = -۳$ را در خط L قرار می‌دهیم که داریم $f(-۳) = ۵$.

بنابراین: $f'(-۳) \times f(-۳) = -\frac{۵}{۳}$

سوال ۲۶

پاسخ: گزینه ۴

مشتق تابع در $x = ۰$ را با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌کنیم:

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{\sqrt[۳]{x}}{x-۱} - ۰}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}(x-۱)} = -\infty$$

چون مشتق تابع مقداری منفی دارد، پس تابع در حوالی $x = ۰$ نزولی است (رد گزینه‌های «۱» و «۲»). از طرفی چون مشتق ∞ شده، خط مماس عمودی است، در نتیجه گزینه «۴» صحیح است.

سوال ۲۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

دقت کنید که داریم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x^۲-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{(x-۱)(x+۱)} = ۶$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{۲} \times \underbrace{\left(\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\right)}_{f'(۱)} = ۶ \Rightarrow f'(۱) = ۱۲$$

مشتق $f(x)$ را از روی ضابطه تابع به‌دست می‌آوریم، که برابر است با: $f'(x) = ۱ + \frac{a}{۲\sqrt{x}}$. بنابراین:

$$f'(۱) = ۱ + \frac{a}{۲} \Rightarrow ۱۲ = ۱ + \frac{a}{۲} \Rightarrow a = ۲۲$$

سوال ۲۸

پاسخ: گزینه ۲

$$(-h^۲ = t) : (h \to ۰) \Rightarrow t \to ۰^-$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۱-h^۲)-f(۱)}{h^۲} = \lim_{t\to ۰^-} \frac{f(۱+t)-f(۱)}{-t}$$

$$= -f'_-(۱) = -\lim_{x\to ۱^-} \frac{x|x-۱| - ۰}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱^-} -(-x) = \lim_{x\to ۱^-} x = ۱$$

سوال ۲۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = f'(۳) = \frac{۴}{۲۷}$$

$$y = f(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}) \Rightarrow y' = \frac{-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{\sqrt[۳]{x^۲}} \times f'(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})$$

$$y'(\frac{۱}{۲۷}) = \frac{-۳}{\frac{۱}{۹}} \times f'(۳) = -۲۷ \times \frac{۴}{۲۷} = -۴$$

سوال ۳۰

پاسخ: گزینه ۳

۱- بررسی ضابطه‌ها:

ضابطه اول که $(x+۱)^۲$ بوده و در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و ضابطه دوم $\sqrt[۳]{x-۱}$ است که در نقطه $x = ۱$ دارای مماس قائم بوده و مشتق برابر بی‌نهایت است و در $x = ۱$ مشتق‌ناپذیر است. ضابطه سوم $[x] - ۱$ است که در نقاط ۳ و ۴ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است.

۲- بررسی نقاط مرزی:

در $x = ۰$ حد ضابطه بالا برابر یک و حد ضابطه پایین ۱- است. پس در $x = ۰$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در $x = ۲$ ضابطه دوم و سوم دارای عرض ۱ هستند ولی مشتق ضابطه بالا مخالف صفر و مشتق ضابطه پایین صفر است. پس $x = ۲$ یک نقطه گوشه (دارای مشتق چپ و راست متفاوت) و مشتق‌ناپذیر است.

نقاط مشتق‌ناپذیر= $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$

سوال ۳۱

پاسخ: گزینه ۳

$$f'(x) = ۲(۲)(۲x-۱)\sqrt{x+\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}}(۲x-۱)^۲$$

حالا باید از f' مشتق بگیریم و می‌دانیم که اگر عامل صفر شونده داشته باشیم فقط باید از آن عامل مشتق گرفت و در باقی عوامل ضرب کرد. اگر توان عامل صفر شونده بیش از یک باشد، مشتق در آنجا صفر است، پس داریم:

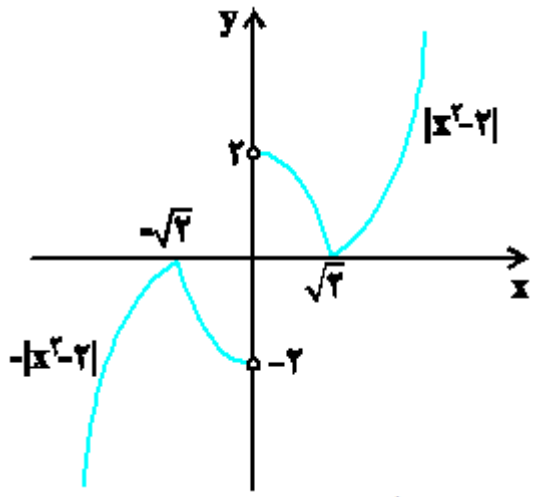
$$f'(x) = ۲(۲)(۲)\sqrt{x+\frac{۱}{۲}} + ۰ \Rightarrow f'(\frac{۱}{۲}) = ۲(۲)(۲)(\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}) = ۸$$

سوال ۳۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه۳

$$f(x) = \frac{|x||x^{۲}-۲|}{x} = |x^{۲} - ۲|\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -|x^{۲} - ۲| & ;x < ۰ \\ |x^{۲} - ۲| & ;x > ۰ \end{cases}$$



مطابق نمودار فوق، واضح است که ریشه‌های عبارت $x^{۲} - ۲$، جزو نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f هستند. تابع در $x = ۰$ ناپیوسته است، بنابراین در این نقطه نیز مشتق ندارد.

سوال ۳۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینة «۴»

شیب خطی که موازی محور xهاست، برابر صفر است. معادلة $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم تا نقاطی را که شیب خط برابر صفر است بدست بیاوریم:

$$f(x) = \frac{x^{۲}+۳x}{۲-۲x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(۲x+۳)(۲-۲x)-(-۲)(x^{۲}+۳x)}{(۲-۲x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۰ \Rightarrow (۲x + ۳)(۲ - ۲x) + ۲(x^{۲} + ۳x) = ۰$$

$$\Rightarrow (-۴x^{۲} - ۲x + ۶) + (۲x^{۲} + ۶x) = ۰$$

$$\Rightarrow -۲x^{۲} + ۴x + ۶ = ۰ \xrightarrow{\div(-۲)} x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۳)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۱ \end{cases}$$

بنابراین در نقاطی با طول‌های ۳ و ۱-، خط مماس بر تابع، موازی محور xهاست.

سوال ۳۴

پاسخ: گزینه ۴

گزینة «۴»

$x = -۱$ عضو دامنة توابع گزینه‌های «۲» و «۳» نیست، بنابراین این توابع نمی‌توانند خط مماس داشته باشند.

تابع $y = \sqrt{x + ۱}$ نیز در همسایگی چپ $x = -۱$ قابل تعریف نیست. بنابراین ناپیوسته است و خط مماس ندارد.

سوال ۳۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به نمودار، تابع از نقطه (۰ , ۲) می‌گذرد، پس $d = ۲$. مشتق تابع در $x = ۰$ و $x = ۱$ صفر است، پس:

$$y' = ۳ax^۲ + ۲bx + c \Rightarrow \begin{cases} y'(۰) = ۰ \Rightarrow c = ۰ \\ y'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b = ۰ \ (*) \end{cases}$$

هم‌چنین تابع از نقطه (۱ , ۰) می‌گذرد، پس:

$$a + b + ۲ = ۰ \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = -۶ \end{cases}$$

سوال ۳۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

حد تعریف مشتق به صورت $\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$ حساب می‌شود. این یعنی خط مماس بر نمودار در $x = ۱$ موازی محور yها است.

سوال ۳۷

پاسخ: گزینه ۲

$$A = \lim_{x\to ۱} \frac{f^۳(x)-۸}{x-۱} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x\to ۱} \frac{(f(x)-۲)(f^۲(x)+۲f(x)+۴)}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-۲}{x-۱} \times \lim_{x\to ۱} (f^۲(x) + ۲f(x) + ۴)$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \times (۴ + ۴ + ۴) = f'(۱) \times ۱۲$$

شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی $x = ۱$ یعنی $m = \frac{۲-۰}{۱-۰} = ۲$، برابر $f'(۱)$ است، لذا:

$$A = ۲ \times ۱۲ = ۲۴$$

سوال ۳۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه ۲

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = (۱)\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}} + x \times \frac{\frac{۶-۱}{(x+۲)^۲}}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{۳x+۱}{x+۲}\right)^۲}}$$

$$\Rightarrow f'(-۳) = \sqrt[۳]{۸} + \frac{(-۳)\times ۵}{۳\sqrt[۳]{۶۴}} = ۲ - \frac{۵}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

سوال ۳۹

پاسخ: گزینه ۴

به علت براکت، ضابطه‌ی بالایی به ازای مقادیر صحیح x مشتق‌ناپذیر است.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - x & x \le -۱ \\ x + [x] & -۱ < x < ۱ \\ ۲x^۲ + x & x \ge ۱ \end{cases}$$

پس تاکنون این تابع در x=۰ مشتق ناپذیر است و در نقاط x = −۱ و x=۱ تابع دارای ناپیوستگی است، در نتیجه در این نقاط نیز تابع f مشتق‌ناپذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x - ۱ & ; \quad x < -۱ \\ ۱ & ; \quad -۱ < x < ۱ \\ ۴x + ۱ & ; \quad x > ۱ \end{cases}$$

نقاطی که تابع f در آن‌ها مشتق ناپذیر است، در دامنه‌ی f' وجود نخواهند داشت. پس:

$$D_{f'} = R - \{-۱, ۰, ۱\}$$

سوال ۴۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f'(x) = ۲x - ۲(x - ۱)^۲ = ۲(x - x^۲ + ۲x - ۱)$$

$$= -۲(x^۲ - ۳x) - ۲ = -۲(x - \frac{۳}{۲})^۲ + \frac{۵}{۲}$$

شیب خط مماس همان f' است و f' در $x = \frac{۳}{۲}$ بیشترین مقدار خود را دارد که این مقدار برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

از طرفی عرض نقطه $x = \frac{۳}{۲}$ نیز برابر $\frac{۱۳}{۶}$ است. پس معادله خط مماس موردنظر به صورت زیر است:

$$y - \frac{۱۳}{۶} = \frac{۵}{۲}(x - \frac{۳}{۲}) \Rightarrow y = \frac{۵}{۲}x - \frac{۱۹}{۱۲}$$

عرض از مبدأ این خط $-\frac{۱۹}{۱۲}$ است.

سوال ۴۱

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۴x + |x|) - \frac{۱}{۵}|۴x + |x||$$

اگر $x \ge ۰ \Rightarrow (fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۵x) - \frac{۱}{۵}(۵x) = ۴x - x = ۳x$

اگر $x < ۰ \Rightarrow fog(x) = \frac{۴}{۵}(۴x - x) - \frac{۱}{۵}|\underbrace{۴x - x}_{۳x}|$

$$= \frac{۱۲}{۵}x - \frac{۱}{۵}(-۳x) = \frac{۱۵}{۵}x = ۳x$$

بنابراین $(fog)(x) = ۳x$، پس:

$$(fog)'(x) = ۳$$

سوال ۴۲

پاسخ: گزینه ۳

از خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی به‌طول (۱) خواهیم داشت:

$y(۱) = f(۱) = ۳$ و $m = f'(۱) = ۲$ مماس

با توجه به این اطلاعات معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{۱}{f}$ در نقطه‌ی A' به‌طول (۱) را می‌یابیم. ابتدا عرض نقطه را می‌یابیم.

$$y(۱) = \left(\frac{۱}{f}\right)(۱) = \frac{۱}{f(۱)} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow A'\left(۱ , \frac{۱}{۳}\right)$$

حال شیب خط مماس را می‌یابیم:

$$y' = \left(\frac{-f'}{f^۲}\right)(x) \Rightarrow y'(۱) = -\frac{f'(۱)}{f^۲(۱)} = -\frac{۲}{۳^۲} = \frac{-۲}{۹}$$

پس معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{۱}{f}$ در A' برابر است با:

$$y - \frac{۱}{۳} = \frac{-۲}{۹}(x - ۱) \Rightarrow ۹y - ۳ = -۲x + ۲ \Rightarrow ۹y + ۲x = ۵$$

سوال ۴۳

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = |x(۶ - x)| \Rightarrow$$

x		۰		۶	
x(۶ − x)	−	۰	+	۰	−

در نتیجه ضابطه تابع در نقطه $x = ۴$ برابر است با:

$$f(x) = |۶x - x^۲| = ۶x - x^۲ \Rightarrow f'(x) = ۶ - ۲x$$

$$\Rightarrow f'(۴) = ۶ - ۸ = -۲$$

همچنین زمانی که در همسایگی راست نقطه $x = ۶$ قرار داریم، ضابطه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = |۶x - x^۲| = x^۲ - ۶x \Rightarrow f'(x) = ۲x - ۶ \Rightarrow f'_+(۶) = ۱۲ - ۶ = ۶$$

بنابراین: $f'_+(۶) - f'(۴) = ۶ - (-۲) = ۸$

سوال ۴۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

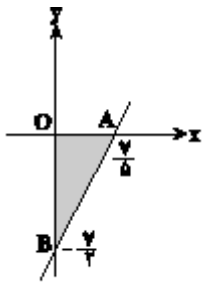
$$y = \frac{۲x-۳}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x=۱} y = -۱$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲x-۳)}{x}$$

$$\Rightarrow m = y'(۱) = \frac{۲-(-\frac{۱}{۲})}{۱} = \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط مماس}: \; y+۱ = \frac{۵}{۲}(x-۱) \;\Rightarrow\; y = \frac{۵}{۲}x - \frac{۷}{۲}$$

با توجه به شکل داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{۱}{۲}OA.OB = \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۵} \times \frac{۷}{۲} = \frac{۴۹}{۲۰} = ۲/۴۵$$

سوال ۴۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه«۴»

می‌دانیم: $\lim_{h\to ۰} \frac{f'(h-۱)-f'(-۱)}{h} = f''(-۱)$

پس باید مشتق دوم f(x) را بیابیم، قبل از مشتق‌گیری تابع را سده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^۳-x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲(x-۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲}{x-۱} = \frac{x^۲-۱+۱}{x-۱}$$

$$= \frac{(x-۱)(x+۱)+۱}{x-۱} = x+۱+\frac{۱}{x-۱}$$

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f''(x) = +\frac{۲}{(x-۱)^۳}$$

در نتیجه: $f''(-۱) = \frac{۲}{(-۱-۱)^۳} = -\frac{۱}{۴}$

سوال ۴۶

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای اینکه تابع در نقطه‌ای خاص مشتق‌پذیر باشد، لازم است ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد. بنابراین f باید در $x = -۱$ پیوسته باشد:

حد چپ : $\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} ([x]x + b)$

$\lim_{x\to(-۱)^-} (-۲x + b) = b + ۲$

حد راست : $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} (a|x + ۱| - ۱)$

$= \lim_{x\to(-۱)^+} (a(x + ۱) - ۱) = -۱$

چون تابع f در $x = -۱$ از راست پیوسته است، برابری حد چپ و راست آن در این نقطه به معنای پیوستگی تابع است. بنابراین داریم:

$b + ۲ = -۱ \Rightarrow b = -۳ \quad (۱)$

حال در یک همسایگی $x = -۱$ می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -۲x - ۳ & ; \quad x < -۱ \\ ax + a - ۱ & ; \quad x \geq -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -۲ & ; \quad x < -۱ \\ a & ; \quad x \geq -۱ \end{cases}$$

حال برای مشتق‌پذیری، کافی است مشتق چپ و راست تابع f را در $x = -۱$ برابر قرار دهیم:

$f'_-(-۱) = f'_+(-۱) \Rightarrow -۲ = a \quad (۲)$

$\xrightarrow{(۱),(۲)} a - b = -۲ - (-۳) = ۱$

سوال ۴۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تابع گزینه «۴»، در $x = ۰$ خط مماس قائم دارد چرا که هر دو مشتق چپ و راست $+\infty$ هستند.

سوال ۴۸

پاسخ: گزینه ۴

باید نقطه $A(\alpha,\beta)$ در معادله خط مماس و منحنی صدق کند بنابراین:

$$1)\ 2y = 3x + 5k \rightarrow 2\beta = 3\alpha + 5k$$

$$2)\ y = \sqrt{x^2 + x - 1} \rightarrow \beta = \sqrt{\alpha^2 + \alpha - 1}$$

از طرفی دیگر می‌دانیم مشتق به ازای طول نقطه تماس، همان شیب خط مماس است، لذا:

$$y = \sqrt{x^2 + x - 1} \Rightarrow y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}} \xrightarrow{x=\alpha} \frac{2\alpha+1}{2\sqrt{\alpha^2+\alpha-1}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\alpha^2 + \alpha - 1} = 2\alpha + 1 \Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha - 9 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 + 5\alpha - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$ غ ق ق چون a باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{1 + 1 - 1} = 1 \Rightarrow (\alpha,\beta) = (1,1) \xrightarrow[\text{صدقمیکند}]{\text{در معادله خط}}$$

$$2 = 3 + 5k \Rightarrow k = \frac{-1}{5}$$

سوال ۴۹

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x}{x+k} \Rightarrow f'(x) = \frac{k}{(x+k)^2}; D_f = D_{f'} = R - \{-k\}$$

معادله $f(x) = f'(x)$ نباید در دامنه‌هایشان جواب قابل قبول داشته باشد. داریم:

$$\frac{x}{x+k} = \frac{k}{(x+k)^2}$$

$$\xrightarrow{x \neq -k} x(x+k)^2 - k(x+k) = 0 \Rightarrow (x+k)(x^2 + kx - k) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + kx - k = 0$$

برای اینکه شرط مسئله برقرار باشد، یعنی معادله فوق نباید جواب داشته باشد، کافی است Δی معادله فوق منفی باشد یا $x = -k$ جواب مضاعف آن باشد:

$$\begin{cases} \Delta = k^2 + 4k < 0 \Rightarrow -4 < k < 0 & (1) \\ x = -k : k^2 - k^2 - k = -k = 0 \Rightarrow k = 0 & (2) \end{cases}$$

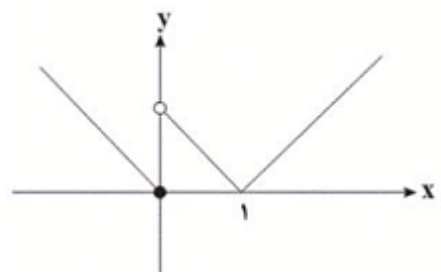
$$\xrightarrow{(1),(2)} k \in (-4, 0]$$

پس به ازای اعداد صحیح ۳-، ۲-، ۱- و صفر، نمودارهای f و f' نقطه برخورد نخواهند داشت.

سوال ۵۰

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. مطابق شکل تابع در $x = ۰$ از راست پیوسته نیست پس $f'_+(۰)$ موجود نیست و تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد. (گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند.) به علاوه در $x = ۱$ نقطه گوشه داریم و تابع نمی‌تواند در این نقطه مشتق‌پذیر باشد (گزینه «۴» حذف می‌شود.) در $x = ۰$ مشتق چپ وجود دارد پس اگرچه $f'(۰)$ موجود نیست ولی تابع، در فاصله $(-\infty, ۰]$ مشتق‌پذیر است.



سوال ۵۱

پاسخ: گزینه ۱

از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که تابع دارای دو خط مجانب افقی بوده و مقدار $f(x)$ در $x = ۰$ برابر حد تابع در $-\infty$ است. پس:

$$\begin{cases} f(۰) = -\dfrac{۲}{\sqrt{b}} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ax}{\sqrt{x^۲}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ax}{-x} = -a \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a = -\frac{۲}{\sqrt{b}} \Rightarrow a = \frac{۲}{\sqrt{b}} \xrightarrow{\text{b باید مثبت باشد}} a > ۰$$

لذا از مثبت بودن a و b نتیجه می‌گیریم که گزینه‌های یک یا سه پاسخ صحیح است. از طرفی تابع در $x = -۲$ مشتق‌پذیر بوده و دارای می‌نیمم نسبی است، یعنی $f'(-۲) = ۰$.

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x^۲+b} - \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+b}}(ax-۲)}{x^۲+b} = \frac{ax^۲+ab-ax^۲+۲x}{(x^۲+b)\sqrt{x^۲+b}}$$

$$\Rightarrow f'(-۲) = ۰ \Rightarrow ab + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow ab = ۴$$

$$\begin{cases} ab = ۴ \\ a = \dfrac{۲}{\sqrt{b}} \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (۱, ۴)$$

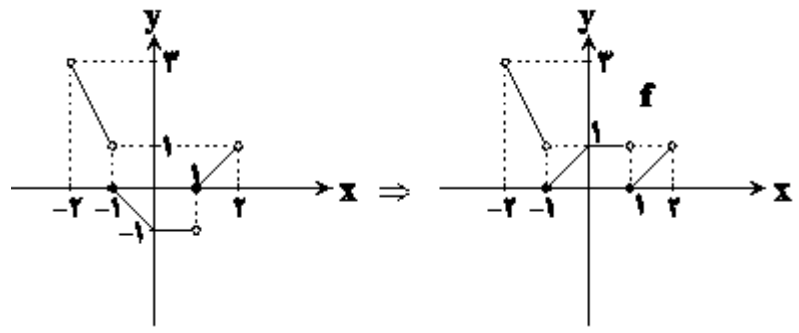
سوال ۵۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با توجه به تابع درون قدرمطلق داریم:

$$\begin{cases} |-۲x-۱| & -۲ < x < -۱ \to -۲x-۱ \\ |-x-۱| & -۱ \le x < ۰ \to x+۱ \\ |-۱| & ۰ \le x < ۱ \to ۱ \\ |x-۱| & ۱ \le x < ۲ \to x-۱ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع f در نقاط $\{-۱,۰,۱\}$ مشتق‌ناپذیر است.

سوال ۵۳

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{x+۱}{x-۱} = ۳ \Rightarrow ۳x-۳ = x+۱ \Rightarrow x = ۲$$

$$f(\frac{x+۱}{x-۱}) = x^۳ \xrightarrow{\text{مشتق}} -\frac{۲}{(x-۱)^۲} f'(\frac{x+۱}{x-۱}) = ۳x^۲$$

$$\xrightarrow{x=۲} -۲f'(۳) = ۱۲ \Rightarrow f'(۳) = -۶$$

سوال ۵۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \ge ۱ \text{ یا } x \le -۱ \\ ۲x^۲ - ۱ & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

با فرض $-h = t$، داریم:

$$\lim_{h\to ۰^+} \frac{f(۱-h)-f(۱)}{۲h} = \lim_{t\to ۰^-} \frac{f(۱+t)-f(۱)}{-۲t}$$

$$= -\frac{۱}{۲} \lim_{t\to ۰^-} \frac{f(۱+t)-f(۱)}{t} = -\frac{۱}{۲} f'_-(۱) \qquad (*)$$

برای محاسبهٔ $f'_-(۱)$ از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم:

$$-۱ < x < ۱ \Rightarrow f'(x) = ۴x \Rightarrow f'_-(۱) = ۴ \xrightarrow{(*)}$$

حاصل حد موردنظر $= -\frac{۱}{۲} \times ۴ = -۲$

سوال ۵۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

از طرفین رابطه، مشتق می‌گیریم:

$$f(x^{۲} - ۳x) = g(\frac{۲x}{x^{۲}+۱})$$

$$\Rightarrow (۲x - ۳) \times f'(x^{۲} - ۳x) = \frac{۲(x^{۲}+۱)-۲x(۲x)}{(x^{۲}+۱)^{۲}} \times g'(\frac{۲x}{x^{۲}+۱})$$

$$\xrightarrow{x=۱} (-۱) \times f'(-۲) = \frac{۲\times۲-۴}{۴} \times g'(۱) \Rightarrow f'(-۲) = ۰$$

سوال ۵۶

پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

$$g'(x) = ۳x^{۲}f'(x) + (x^{۳} - ۱)f''(x) + ۶xf(x) + ۳x^{۲}f'(x)$$

$$g'(۱) = ۳f'(۱) + ۰ + ۶f(۱) + ۳f'(۱) = ۶f(۱) + ۶f'(۱)$$

از طرف دیگر $f(۱) = \frac{۴}{۳}$ و $f'(x) = \frac{(۳x^{۲}+۲x+۱)(x^{۲}+x+۱)-(۲x+۱)(x^{۳}+x^{۲}+x+۱)}{(x^{۲}+x+۱)^{۲}}$

$$= \frac{۶\times۳-۳\times۴}{۳^{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g'(۱) = ۶ \times \frac{۴}{۳} + ۶ \times \frac{۲}{۳} = ۱۲$$

راه حل دوم:

$$g(x) = ((x^{۳} - ۱)f(x))'$$

$$(x^{۳} - ۱)f(x) = (x - ۱)(x^{۲} + x + ۱) \times \frac{x^{۳}+x^{۲}+x+۱}{x^{۲}+x+۱} = x^{۴} - ۱$$

$$\Rightarrow g(x) = ۴x^{۳} \Rightarrow g'(x) = ۱۲x^{۲} \Rightarrow g'(۱) = ۱۲$$

سوال ۵۷

پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول: با استفاده از اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \lim_{h\to 0} \left(f^2(1+h)+f^2(1)+f(1+h)f(1)\right)$$

$$= f'(1) \times (3f^2(1))$$

کافی است $f'(1)$ و $f(1)$ را محاسبه کنیم. با استفاده از قاعده‌ی توانی خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt[9]{x^2} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{2}{9}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9}x^{\frac{-7}{9}} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{9}$$

$$\text{حاصل حد} = \frac{2}{9} \times 3 \times 1 = \frac{2}{3}$$

راه حل دوم: اگر f در نقطه‌ی درونی a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^n(a+h)-f^n(a)}{h} = (f^n(x))'\Big|_{x=a}$$

کافی است مشتق تابع $y = f^3(x)$ را در x=۱ بیابیم:

$$y = f^3(x) = (\sqrt[9]{x^2})^3 = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'(1) = \frac{2}{3}$$

راه حل سوم: حد داده شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد، پس می‌توانیم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم:

$$\overset{HOP}{=\!=\!=} \lim_{h\to 0} \frac{3f'(1+h)f^2(1+h)-0}{1} = 3f'(1)f^2(1)$$

بقیه‌ی حل همانند روش اول است.

سوال ۵۸

پاسخ: گزینه ۴

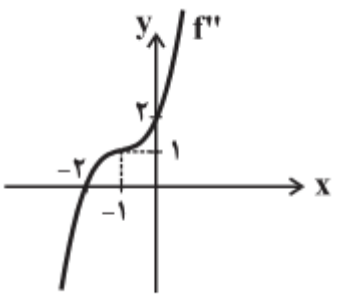
$$20f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 20x + 4$$

$$\Rightarrow 20f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 40x + 20$$

$$\Rightarrow 20f''(x) = 20x^3 + 60x^2 + 60x + 40 = 20\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 2\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = (x+1)^3 + 1$$

مطابق شکل، نمودار "f از ربع چهارم نمی‌گذرد.



سوال ۵۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

تابع در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست، پس $x = ۲$ ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است و عبارت داخل قدرمطلق به ازای $x = ۲$ صفر می‌شود:

$$a(۲) + ۲(۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = -۴ \Rightarrow f(x) = |۲x^۲ - ۴x|$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - ۴x & ; x \le ۰ \text{ یا } x \ge ۲ \\ ۴x - ۲x^۲ & ; ۰ < x < ۲ \end{cases}$$

برای محاسبهٔ $f'(۱/۵)$ باید از ضابطهٔ پایینی مشتق بگیریم:

$$f'(x) = ۴ - ۴x \; ; \; ۰ < x < ۲ \Rightarrow f'(۱/۵) = -۲$$

سوال ۶۰

پاسخ: گزینه ۴

$$y = f(\sqrt[۳]{x-۱}) \Rightarrow y' = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}} f'(\sqrt[۳]{x-۱})$$

$$\xrightarrow{x=۲} y' = \frac{۱}{۳} f'(۱) = -۱ \Rightarrow f'(۱) = -۳$$

$$y = f(\frac{۲x+۱}{x+۳}) \Rightarrow y' = \frac{۲\times۳-(۱)(۱)}{(x+۳)^۲} f'(\frac{۲x+۱}{x+۳})$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲) = \frac{۵}{۲۵} f'(۱) = \frac{۱}{۵}(-۳) = -۰/۶$$

سوال ۶۱

پاسخ: گزینه ۲

به ازای هر ۴ ضابطه داده شده برای g، تابع f+g در x=۰ پیوسته است.

حال برای تابع f داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & ;x < ۰ \\ ۱ & ;x > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} f'(x) = ۰, \lim_{x\to ۰^+} f'(x) = ۱$$

بنابراین برای اینکه تابع f+g در x=۰ مشتق‌پذیر باشد، شیب نیم‌مماس چپ g در x=۰ ، باید از شیب نیم‌مماس راست آن ۱ واحد بیشتر باشد.

ضابطه تابع گزینه «۲» ویژگی مورد نظر را دارد:

$$g(x) = \begin{cases} -x^۲ - ۱ & ;x \le ۰ \\ -x - ۲ & : x > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} -۲x & ;x < ۰ \\ -۱ & ;x > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} g'(x) = ۰, \lim_{x\to ۰^+} g'(x) = -۱$$

$$\Rightarrow (f+g)'_-(۰) = (f+g)'_+(۰) = ۰$$

سوال ۶۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \Rightarrow f'(x) = ۲ax + b$$

$(\frac{f}{f'})'$ یک عدد ثابت است اگر $\frac{f}{f'}$ یک عبارت درجه اول باشد (البته اگر $\frac{f}{f'}$ خودش عدد ثابت باشد، مشتق آن صفر می‌شود ولی در این مورد ممکن نیست.)

$$\frac{f}{f'} = \frac{ax^۲+bx+c}{۲ax+b}$$

این عبارت در صورتی درجه اول است که صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، یعنی ریشه مخرج $(x = \frac{-b}{۲a})$ در صورت صدق کند. $x = \frac{-b}{۲a}$ طول رأس سهمی f است و اگر در آن صدق کند یعنی $f(x) = ۰$ یک ریشه دارد.

سوال ۶۳

پاسخ: گزینه ۱

با ساده‌سازی و بررسی عبارت خواسته شده داریم:

$$ff''+(f')^۲ = (ff')' = (\sqrt{۲x+۳} \times \frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}})' = (۱)' = ۰$$

تذکر: توجه داشته باشید مشتق مرتبه دوم تابع f را با f'' نمایش می‌دهیم.

سوال ۶۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$(f.g-f')' = (f'.g+g'.f-f'')$$

پس نیاز به محاسبه f'، f'' و g' داریم:

$$f'(x) = ۱۲x^۳ + ۴x \Rightarrow f'(۱) = ۱۶$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow g'(۱) = -۱$$

$$f''(x) = ۳۶x^۲ + ۴ \Rightarrow f''(۱) = ۴۰$$

همچنین $f(۱) = ۴$ و $g(۱) = ۱$. پس داریم:

$$(f'g+g'f-f'')(۱) = (۱۶)(۱) + (-۱)(۴) - ۴۰ = -۲۸$$

سوال ۶۵

پاسخ: گزینه ۱

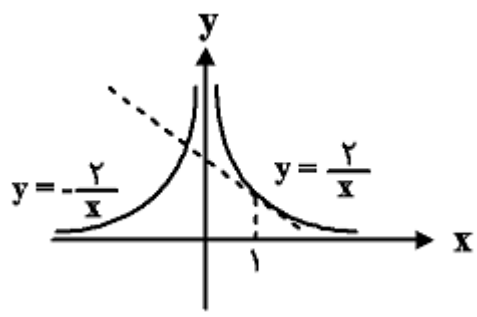
گزینهٔ «۱»

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه (۱,۲) را می‌نویسیم.

$$x > ۰ \Rightarrow f(x) = \frac{۲}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{۲}{x^۲} \Rightarrow \text{شیب مماس} = f'(۱) = -۲$$

و معادله خط مماس به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{معادله مماس} : y - ۲ = -۲(x-۱) \Rightarrow y = -۲x + ۴$$



حال باید نقطه تقاطع خط بالا با نمودار تابع f را به دست آوریم.

$$-\frac{۲}{x} = -۲x + ۴ \Rightarrow -۲ = -۲x^۲ + ۴x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ + \sqrt{۲} & \text{غ ق ق} \\ x = ۱ - \sqrt{۲} \end{cases}$$

پس طول نقطهٔ برخورد $۱ - \sqrt{۲}$ است و عرض آن برابر است با:

$$f(۱-\sqrt{۲}) = \frac{۲}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{۲(\sqrt{۲}+۱)}{۲-۱} = ۲\sqrt{۲} + ۲$$

سوال ۶۶

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = |x|.|x^{۲} - ۴|$$

$$\begin{cases} x \geq ۲ : f(x) = x^{۳} - ۴x \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} - ۴ \\ \qquad \Rightarrow f'_{+}(۲) = ۳(۲)^{۲} - ۴ = ۸ \\ ۰ \leq x < ۲ : f(x) = -x^{۳} + ۴x \Rightarrow f'(x) = -۳x^{۲} + ۴ \\ \qquad \Rightarrow f'_{-}(۲) = -۳(۲)^{۲} + ۴ = -۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f'_{+}(۲) - f'_{-}(۲)| = ۱۶$$

سوال ۶۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

مختصات نقطهٔ تماس را به صورت $(\alpha, \frac{۲\alpha+۱}{\alpha-۳})$ درنظر می‌گیریم:

$$f'(\alpha) = \frac{-۷}{(\alpha-۳)^{۲}}$$

$$\text{خط مماس } L : y - \frac{۲\alpha+۱}{\alpha-۳} = \frac{-۷}{(\alpha-۳)^{۲}}(x - \alpha)$$

$$\xrightarrow{(-۱,۲)\in L} ۲ - \frac{۲\alpha+۱}{\alpha-۳} = \frac{-۷}{(\alpha-۳)^{۲}}(-۱ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{-۷}{\alpha-۳} = \frac{۷}{(\alpha-۳)^{۲}}(\alpha + ۱) \Rightarrow \alpha + ۱ = -\alpha + ۳$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱ \Rightarrow \text{شیب خط } L = f'(\alpha) = f'(۱) = -\frac{۷}{۴}$$

سوال ۶۸

پاسخ: گزینه ۴

شیب خط مماس بر نمودار تابع g در $x = ۱$، همان مشتق تابع g در $x = ۱$ است:

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{۳x^{۲}f(x) - x^{۳}f'(x)}{(f(x))^{۲}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱) = \frac{۳f(۱) - f'(۱)}{(f(۱))^{۲}} \quad (*)$$

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\begin{cases} f(۱) = ۳ \\ f'(۱) = m \quad : \text{شیب خط مماس} \end{cases}$$

خط مماس از دو نقطه $(۱,۳)$ و $(-۲,۰)$ عبور می‌کند، بنابراین:

$$m = \frac{۳-۰}{۱-(-۲)} = \frac{۳}{۳} = ۱ \Rightarrow f'(۱) = ۱$$

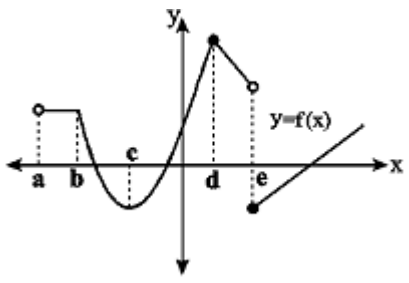
$$\xrightarrow{(*)} g'(۱) = \frac{۳\times۳-۱}{۳^{۲}} = \frac{۸}{۹}$$

سوال ۶۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

در نقاط {b, d, e} مشتق نداریم. در نقطهٔ{c} مشتق باید صفر باشد. طول نقطهٔc منفی است. در بازهٔa تا b مشتق صفر است، چون شیب صفر است. در بازهٔb تا c تابع نزولی و $f' < ۰$، در بازهٔc تا d تابع صعودی و $f' > ۰$ است. در بازهٔd تا e تابع نزولی و $f' < ۰$ و در بازهٔ$(e, +\infty)$ تابع صعودی و $f' > ۰$ است. در بازه‌هایd تا e و e تا $+\infty$ تابع خطی است لذا f' ثابت است.



سوال ۷۰

پاسخ: گزینه ۴

مختصات نقطه تماس به صورت $(\alpha, f(\alpha))$ می‌باشد. شیب خط گذرا از این نقطه و نقطه $(۰, -\frac{۵}{۳})$ برابر است با:

$$\frac{f(\alpha)-(-\frac{۵}{۳})}{\alpha-۰} = \frac{f(\alpha)+\frac{۵}{۳}}{\alpha} = \frac{\frac{۱}{۳}\alpha^۳+\alpha^۲+\frac{۵}{۳}}{\alpha}$$

این شیب همان مشتق تابع f در $x = \alpha$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{۱}{۳}\alpha^۳+\alpha^۲+\frac{۵}{۳}}{\alpha} = f'(\alpha) = \alpha^۲ + ۲\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}\alpha^۳ + \alpha^۲ + \frac{۵}{۳} = \alpha^۳ + ۲\alpha^۲ \Rightarrow ۲\alpha^۳ + ۳\alpha^۲ - ۵ = ۰$$

$\alpha = ۱$ ، یک جواب معادله فوق است، یعنی $\alpha - ۱$ یک عامل $۲\alpha^۳ + ۳\alpha^۲ - ۵$ است.

با تقسیم عبارت بر $\alpha - ۱$ داریم:

$$۲\alpha^۳ + ۳\alpha^۲ - ۵ = (\alpha - ۱)(۲\alpha^۲ + ۵\alpha + ۵) = ۰$$

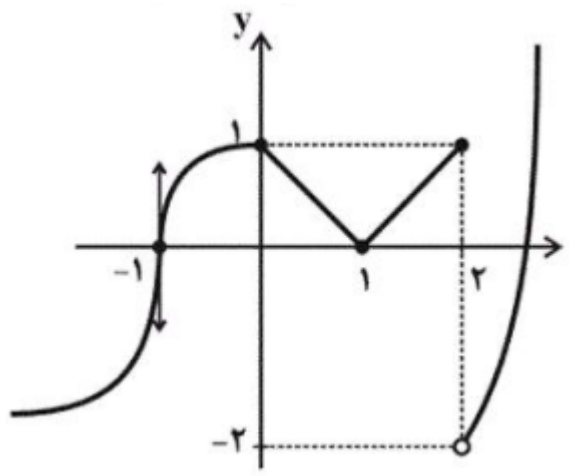
معادله $۲\alpha^۲ + ۵\alpha + ۵ = ۰$ جواب حقیقی ندارد (زیرا $\Delta < ۰$ است). بنابراین داریم:

$$\alpha = ۱ : \begin{cases} f(\alpha) = \frac{۱}{۳} + ۱ = \frac{۴}{۳} \\ f'(\alpha) = ۱ + ۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) + f'(\alpha) = \frac{۱۳}{۳}$$

سوال ۷۱

پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع f را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:

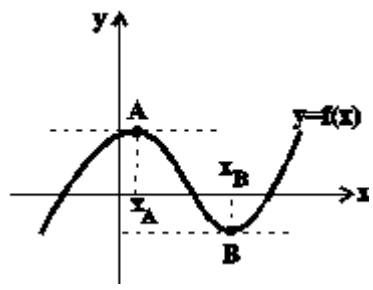


تابع در $x = -۱$ دارای مماس قائم است. پس در این نقطه مشتق ندارد. هم‌چنین در نقاط گوشه‌ای $x = ۰$ و $x = ۱$ و نقطه ناپیوسته $x = ۲$ نیز مشتق‌ناپذیر است. (در $x = ۲$ ناپیوسته است پس مشتق‌ناپذیر است.) پس تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f برابر ۴ است.

سوال ۷۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



با توجه به نمودار فوق، شیب نمودار تابع در نقاط A و B برابر صفر است. در نتیجه مشتق تابع f در $x = x_A$ و $x = x_B$ نیز برابر صفر است. اما شیب خطوط مماس بر نمودار تابع f در نقاط بازه‌های $(-\infty, x_A)$ و $(x_B, +\infty)$ مثبت و این مقدار در نقاط بازه (x_A, x_B) منفی است. یعنی مشتق تابع ابتدا کاهش می‌یابد تا در نقطه $x = x_A$ به صفر برسد، مجدداً کاهش می‌یابد زیرا شیب خطوط منفی هستند، سپس افزایش می‌یابد تا در $x = x_B$ مجدداً به مقدار صفر برسد. پس از آن در بازه $(x_B, +\infty)$ مقدار مشتق به صورت مرتب افزایش می‌یابد.

سوال ۷۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$g(۰) = ۰ \Rightarrow g'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}$$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{(\frac{x}{x+۲})f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x)}{x+۲} = \frac{\lim_{x\to ۰^-} f(x)}{\lim_{x\to ۰^-} (x+۲)} = -\frac{۱}{۲}$$

سوال ۷۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه۳

$f'(۲)$ موجود است، پس تابع در $x = ۲$ هم باید پیوسته باشد و هم مشتق چپ و راست برابر داشته باشد.

شرط پیوستگی:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲)$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۲a+b} = -۸ + ۱۲ = ۴ \Rightarrow ۲a + b = ۲$$

$$f'(x) = \begin{cases} (۸(ax+b)^{-۱})' = -۸a(ax+b)^{-۲} = \frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x > ۲ \\ -۳x^۲ + ۶ & x < ۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲) = f'_-(۲) \Rightarrow \frac{-۸a}{(۲a+b)^۲} = -۱۲ + ۶ = -۶$$

$$\xrightarrow{۲a+b=۲} \frac{-۸a}{۴} = -۶ \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳, b = -۴$$

سوال ۷۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای اینکه خط موازی یکی از خطوط مماس بر نمودار باشد، باید شیب خط و مشتق تابع با هم برابر باشند. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} y' = \frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}} = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow -۱ < y' < ۱ \\ \text{شیب خط} = \frac{۲m-۳}{m+۲} \end{cases} \Rightarrow -۱ < \frac{۲m+۳}{m+۲} < ۱$$

حال با حل نامعادله بالا داریم:

$$\begin{cases} \frac{۲m-۳}{m+۲} < ۱ \Rightarrow \frac{m-۵}{m+۲} < ۰ \Rightarrow m \in (-۲,۵) \\ \frac{۲m-۳}{m+۲} > -۱ \Rightarrow \frac{۳m-۱}{m+۲} > ۰ \Rightarrow m \in (-\infty,-۲) \cup (\frac{۱}{۳},+\infty) \end{cases}$$

با اشتراک جواب‌های بالا، مشخص می‌شود که باید $m \in (\frac{۱}{۳},۵)$ باشد که این بازه شامل ۴ عدد صحیح است.

سوال ۷۶

پاسخ: گزینه ۳

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌ی [۵,۱-] برابر است با:

$$\frac{f(۵)-f(-۱)}{۵-(-۱)} = \frac{f(۵)-f(-۱)}{۶} = \frac{۴۸-۶}{۶} = \frac{۴۲}{۶} = ۷$$

سوال ۷۷

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲} = \frac{(۹-۳)-(۴-۲)}{۱} = ۴$$

برای محاسبه‌ی آهنگ لحظه‌ای ابتدا باید مشتق تابع را محاسبه کنیم:

$$f'(x) = ۲x - ۱$$

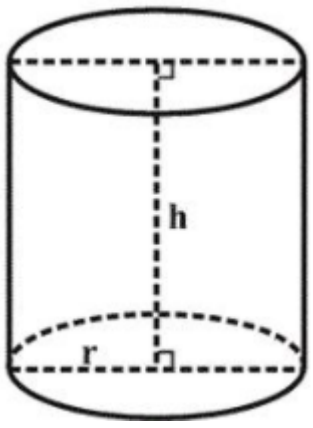
$$\Rightarrow x = a \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(a) = ۲a - ۱$$

چون آهنگ‌های لحظه‌ای و متوسط با هم برابرند، بنابراین:

$$۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow ۲a = ۵ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

سوال ۷۸

پاسخ: گزینه ۲



$$\text{مساحت کل استوانه} : S = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲$$

$$\xrightarrow{h=۱۰} S = ۲۰\pi r + ۲\pi r^۲$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت} : S'(r) = ۲۰\pi + ۴\pi r$$

$$\Rightarrow S'(۴) = ۲۰\pi + ۱۶\pi \Rightarrow S'(۴) = ۳۶\pi$$

سوال ۷۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

آهنگ متوسط تغییر در بازه[۱,۴]:

$$\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{(۱۲+\frac{۲}{۲})-(۳+۲)}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } x = \alpha = f'(\alpha) = ۳ - \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}}$$

$$\Rightarrow ۳ - \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۳}} = ۳ - \frac{۸}{۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \sqrt{\alpha^۳} = ۳$$

$$\alpha^۳ = ۹ \Rightarrow \alpha = \sqrt[۳]{۹}$$

سوال ۸۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = \frac{f(۱/۱)-f(۱)}{۱/۱-۱}$$

$$= \frac{\frac{۹}{۱/} - \frac{۹}{۱۲}}{۰/۱} = \frac{۹(\frac{۱۲-۱/}{۱۲\times ۱/})}{۰/۱} = \frac{-۹\times ۲/۱}{۱/}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{-۹\times ۲}{x^۳} \Rightarrow f'(۱/۱) = \frac{-۹\times ۲}{۱/}$$

$$\Rightarrow \text{مقدار مورد نظر سؤال} = \frac{\frac{-۹\times ۲/۱}{۱/}}{\frac{-۹\times ۲}{۱/}} = \frac{۲/۱\times ۱/۱}{۲} = ۱/۱۵۵$$

سوال ۸۱

پاسخ: گزینه ۲

باید آهنگ متوسط تابع را در فاصله $[۲,۲+۳]$ محاسبه کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{P(۵)-P(۲)}{۵-۲} = \frac{۳۰۰۰+۱۰۰(۵)^۲-(۳۰۰۰+۱۰۰(۲)^۲)}{۳}$$

$$= \frac{۱۰۰(۲۱)}{۳} = ۷۰۰$$

برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای تابع در $t = ۳$ باید $P'(۳)$ را محاسبه کنیم:

$$P'(t) = ۰ + ۲۰۰t \Rightarrow P'(۳) = ۶۰۰$$

پس آهنگ متوسط ۱۰۰ واحد از آهنگ لحظه‌ای بیش‌تر است.

سوال ۸۲

پاسخ: گزینه ۱

$$y = x^{\frac{۸}{۵}} - ۴x^{\frac{۳}{۵}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۸}{۵}x^{\frac{۸}{۵}-۱} - ۴\left(\frac{۳}{۵}\right)x^{\frac{۳}{۵}-۱} = \frac{۸}{۵}x^{\frac{۳}{۵}} - \frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۸}{۵}\sqrt[۵]{x^۳} - \frac{۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۲}} \Rightarrow y' = \frac{۸x-۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۲}}$$

از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع، در نقطهٔ $x = ۰$ قائم است $(y'(۰) \to -\infty)$، هم‌چنین از $y'(۰) \to -\infty$ می‌توان نتیجه گرفت که در اطراف $x = ۰$، مقدار y' منفی و در نتیجه تابع نزولی است، که این شرایط، تنها در گزینهٔ «۱» وجود دارد.

سوال ۸۳

پاسخ: گزینه ۱

$$r = ۲t$$
$$S = ۴\pi r^۲ \to S(t) = ۴\pi(۲t)^۲ = ۱۶\pi t^۲$$
$$S'(t) = ۳۲\pi t \xrightarrow{t=۵} S'(۵) = ۱۶۰\pi$$

سوال ۸۴

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۴)-f(۲)}{۴-۲} = \frac{۳-۱}{۲} = ۱$$

ضابطه تابع در فاصله [۱,۳] به صورت $-(x-۱)(x-۳)$ است:

$$f(x) = -(x^۲ - ۴x + ۳) \Rightarrow f'(x) = -(۲x - ۴)$$

$$\Rightarrow f'(۲/۵) = -(۲ \times (۲/۵) - ۴) = -۱$$

پس اختلاف آن‌ها می‌شود: $۱ - (-۱) = ۲$

سوال ۸۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مساحت مستطیل ABCD برابر است با $S(x) = x\sqrt{x}$. پس داریم:

آهنگ متوسط در فاصله [۱,۴] $= \frac{S(۴)-S(۱)}{۴-۱} = \frac{۸-۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$

آهنگ لحظه‌ای : $S'(x) = \sqrt{x} + x\frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{x}$

$$\xrightarrow{S'(x)=\frac{۷}{۳}} \frac{۳}{۲}\sqrt{x} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱۹۶}{۸۱}$$

سوال ۸۶

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا صورت تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^۲-۱+۱}{x+۱} = (x-۱) + \frac{۱}{x+۱} \Rightarrow f'(x) = ۱ - \frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

طبق فرض داریم:

$$\frac{f(۷)-f(۴)}{۷-۴} = f'(a) \Rightarrow \frac{(۶+\frac{۱}{۸})-(۳+\frac{۱}{۵})}{۳} = ۱ - \frac{۱}{(a+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳-\frac{۳}{۴۰}}{۳} = ۱ - \frac{۱}{(a+۱)^۲} \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۴۰} = ۱ - \frac{۱}{(a+۱)^۲} \Rightarrow (a+۱)^۲ = ۴۰$$

$$\Rightarrow a+۱ = \pm ۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow a = \begin{cases} ۲\sqrt{۱۰} - ۱ > ۰ & \text{ق ق} \\ -۲\sqrt{۱۰} - ۱ < ۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

سوال ۸۷

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} \Delta f = f(۱+h) - f(۱) = \sqrt{۱+h} - ۱ \\ \text{طبق فرض}: \Delta f = ۰/۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱+h} = ۱/۱ \Rightarrow ۱+h = ۱/۲۱ \Rightarrow h = ۰/۲۱$$

با توجه به این‌که $\Delta x = x_۲ - x_۱ = (۱+h) - ۱ = h = ۰/۲۱$، داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{۰/۱}{۰/۲۱} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

سوال ۸۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\text{آهنگ متوسط در بازه } [۱,۲] = \frac{v(۲)-v(۱)}{۲-۱} = \frac{\frac{۸+۱۴}{۴+۴} - \frac{۴+۱۴}{۲+۴}}{۱}$$

$$= \frac{۲۲}{۸} - \frac{۱۸}{۶} = \frac{۱۱}{۴} - ۳ = -\frac{۱}{۴}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم در لحظه t برابر مشتق حجم نسبت به زمان است، پس:

$$v'_t = \frac{۴(۲t+۴)-۲(۴t+۱۴)}{(۲t+۴)^۲} = \frac{-۱۲}{(۲t+۴)^۲}$$

آهنگ لحظه‌ای باید برابر $-\frac{۱}{۴}$ باشد:

$$\frac{-۱۲}{(۲t+۴)^۲} = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow (۲t+۴)^۲ = ۴۸$$

$$\Rightarrow (۲t+۴) = \pm\sqrt{۴۸} \xrightarrow{t>۰} t = ۲\sqrt{۳} - ۲$$

سوال ۸۹

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(a)-f(۱)}{a-۱} = \frac{\frac{۲a+۱}{a+۳} - \frac{۳}{۴}}{a-۱} = \frac{\frac{۸a+۴-۳a-۹}{۴(a+۳)}}{a-۱}$$

$$= \frac{۵a-۵}{۴(a-۱)(a+۳)} = \frac{۵(a-۱)}{۴(a-۱)(a+۳)} = \frac{۵}{۴(a+۳)}$$

$$x = ۲ \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{۲x+۱}{x+۳} - ۱}{(x-۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{۲x+۱-x-۳}{x+۳}}{(x-۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)}{(x+۳)(x-۲)} = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۴(a+۳)} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow a = \frac{۱۳}{۴}$$

سوال ۹۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه«۲»

مساحت دایره: $S(r) = \pi r^{۲} \Rightarrow S(۲) = ۴\pi \ , \ S(۴) = ۱۶\pi$

آهنگ متوسط تغییر مساحت $= \frac{S(۴)-S(۲)}{۴-۲} = \frac{۱۶\pi-۴\pi}{۴-۲} = ۶\pi$

سوال ۹۱

پاسخ: گزینه ۱

سرعت متوسط $= \frac{f(۱+h)-f(۱)}{h} = \frac{۱۲-۵(۱+h)^{۲}-(۱۲-۵)}{h}$

$= \frac{-۱۰h-۵h^{۲}}{h} = -۱۰ - ۵h$

سوال ۹۲

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه‌ی محیط دایره را برحسب مساحت آن می‌نویسیم و از آن نسبت به مساحت مشتق می‌گیریم:

$$S = \pi r^{۲} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (۱)$$

$$P = ۲\pi r \xrightarrow{(۱)} P(S) = ۲\sqrt{\pi} \times \sqrt{S}$$

$$\Rightarrow P'(S) = ۲\sqrt{\pi} \times \frac{۱}{۲\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{\pi}{S}}$$

اگر محیط برابر ۶πباشد، مساحت را به‌دست می‌آوریم:

$$P = ۲\pi r = ۶\pi \Rightarrow r = ۳ \Rightarrow S = \pi r^{۲} = \pi(۳)^{۲} = ۹\pi$$

$$P'(S) = \sqrt{\frac{\pi}{S}} \xrightarrow{S=۹\pi} P'(۹\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{۹\pi}} = \frac{۱}{۳}$$

سوال ۹۳

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

آهنگ متوسط در بازه $[۰,۲]$ $= \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰} = \frac{۴\times۳-۲}{۲} = ۵$

آهنگ لحظه‌ای در $x = \frac{۳}{۴}$ $= f'(\frac{۳}{۴})$

به کمک رابطه $(f(x)g(x))' = g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$، مشتق تابع f را می‌یابیم:

$$f'(x) = \sqrt{۴x+۱} + \frac{۲(x+۲)}{\sqrt{۴x+۱}}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۳}{۴}) = ۲ + \frac{۱۱}{۴} = ۴/۷۵$$

$\Rightarrow$ آهنگ متوسط − آهنگ لحظه‌ای $= ۰/۲۵$

سوال ۹۴

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} x_1 = ۰/۴۹ \\ x_2 = ۰/۶۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\sqrt{۰/۶۴}-\sqrt{۰/۴۹}}{۰/۶۴-۰/۴۹}$$

$$= \frac{۰/۸-۰/۷}{۰/۱۵} = \frac{۰/۱}{۰/۱۵} = \frac{۲}{۳}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{مطلوب سوال}} \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴x} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow x = \frac{۹}{۱۶}$$

سوال ۹۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه۲

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{\sqrt{۹}+\frac{۱}{۵}-(\sqrt{۱}+۱)}{۴-۰} = \frac{۱+\frac{۱}{۵}}{۴}$$

$$= \frac{\frac{۶}{۵}}{۴} = \frac{۳}{۱۰} = ۰/۳$$

$$f'\left(\frac{۳}{۲}\right) = \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x = \frac{۳}{۲}$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}} - \frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{۲۵} = ۰/۵ - ۰/۱۶ = ۰/۳۴$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = ۰/۳۴ - ۰/۳ = ۰/۰۴$$

سوال ۹۶

پاسخ: گزینه ۳

اگر ضلع مکعب را x در نظر بگیریم، سطح مکعب از رابطه‌ی $S = ۶x^۲$ به‌دست می‌آید.

$$S = ۶x^۲ \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} S' = ۱۲x \xrightarrow{x=۲} ۲۴$$

سوال ۹۷

پاسخ: گزینه ۲

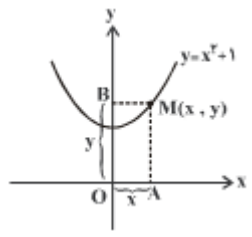
برای محاسبه‌ی آهنگ متوسط تغییر حجم نسبت به زمان در بازه‌ی $[t_1 , t_2]$ از رابطه‌ی $\frac{V(t_2)-V(t_1)}{t_2-t_1}$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(۸)-V(۰)}{۸-۰}$$

$$= \frac{۱۲۰(۲۵۰۰-۴۰۰+۶۴)-۱۲۰(۲۵۰۰-۰+۰)}{۸} = \frac{۱۲۰(-۳۳۶)}{۸} = -۵۰۴۰$$

سوال ۹۸

پاسخ: گزینه ۴



$S_{OAMB} = x.y \Rightarrow S(x) = x(x^۲ + ۱) = x^۳ + x$

$S'(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{(x^۳+x)-(۱۰)}{x-۲}$

$= \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۵)}{(x-۲)} = ۱۳$

سوال ۹۹

پاسخ: گزینه ۳

سرعت لحظه‌ای متحرک در $t = a$ برابر با $f'(a)$ است:

$f'(t) = ۳t^۲ - ۴t + ۳ \Rightarrow f'(a) = ۳a^۲ - ۴a + ۳$

سرعت متوسط متحرک در بازه $[۰,a]$ برابر است با: $\frac{f(a)-f(۰)}{a-۰}$

$\frac{f(a)-f(۰)}{a-۰} = \frac{a^۳-۲a^۲+۳a+۱-۱}{a} = a^۲ - ۲a + ۳$

حال داریم:

$۳a^۲ - ۴a + ۳ = a^۲ - ۲a + ۳ \Rightarrow ۲a^۲ - ۲a = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۱ \text{ ق ق} \\ a_۲ = ۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$

سوال ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[۰,a]$ برابر است با:

$A = \frac{f(a)-f(۰)}{a-۰} = \frac{a^۳-۴a-۰}{a} = a^۲ - ۴$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = \sqrt{a}$ نیز برابر $f'(\sqrt{a})$ است:

$f'(x) = ۳x^۲ - ۴ \Rightarrow f'(\sqrt{a}) = ۳a - ۴ = B$

$\Rightarrow A - B = a^۲ - ۳a$

حداقل مقدار $a^۲ - ۳a$ برابر $-\frac{۹}{۴}$ است که به ازای $a = \frac{۳}{۲}$ به دست می‌آید.

سوال ۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

$$\text{آهنگ متوسط در } [0,100] = \frac{V(100)-V(0)}{100-0} = \frac{0-40}{100} = -\frac{40}{100}$$

$$V'(t) = 80\left(\frac{-1}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right) = -\frac{8}{10}\left(1-\frac{t}{100}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{40}{100} = \frac{-8}{10}\left(1-\frac{t}{100}\right) \Rightarrow t = 50$$

روش دوم:

اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشدآنگاه آهنگ متوسط تغییر در بازه $[a,b]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = \frac{a+b}{2}$ برابر است؛ در نتیجه چون V یک تابع درجه ۲ است، لذا داریم:

$$\text{آهنگ متوسط در } [0,100] = V'(t_0) \Rightarrow t_0 = \frac{0+100}{2} = 50s$$

سوال ۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

$$y = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{(x^3)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

مقدار مشتق تابع مورد نظر در $x = 0$ برابر صفر است (خط مماس بر نمودار تابع در $x = 0$ افقی است) که این شرط تنها در گزینه‌ی «۴» برقرار است.

سوال ۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از ۲ تا } 2+h = \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}$$

$$= \frac{(2+h+\frac{1}{2+h})-(2+\frac{1}{2})}{h} = \frac{8}{9}$$

$$\overset{h\neq 0}{\Longrightarrow} \quad 2+h+\frac{1}{2+h}-\frac{5}{2} = \frac{8}{9}h \Rightarrow h+\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2} = \frac{8}{9}h$$

$$\Rightarrow 9h+\frac{9}{2+h}-\frac{9}{2} = 8h \Rightarrow h+\frac{9}{2+h} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2+2h+9}{2+h} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2h^2-5h = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = 2/5 \\ h = 0 \end{cases}$$

سوال ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

آهنگ متوسط:

$$\frac{f(\frac{۲۵}{۶})-f(۱)}{\frac{۲۵}{۶}-۱} = \frac{(۲۷)^{\frac{۲}{۳}}-(۸)^{\frac{۲}{۳}}}{\frac{۱۹}{۶}} = \frac{۹-۴}{\frac{۱۹}{۶}} = \frac{۳۰}{۱۹}$$

آهنگ لحظه‌ای:

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}\times(۶)\times(۶x+۲)^{\frac{-۱}{۳}} \Rightarrow f'(۱) = ۴\times ۸^{\frac{-۱}{۳}} = ۲$$

$$۲ - \frac{۳۰}{۱۹} = \frac{۸}{۱۹}$$

سوال ۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

$$d = \sqrt{x^۲ + (\sqrt{۷x+۴})^۲} = \sqrt{x^۲+۷x+۴}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر } d = d' = \frac{۲x+۷}{۲\sqrt{x^۲+۷x+۴}}$$

$$\xrightarrow{x=۵} d' = \frac{۱۰+۷}{۲\sqrt{۲۵+۳۵+۴}} = \frac{۱۷}{۱۶}$$

سوال ۱۰۶

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از ۲ تا } ۲+h = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲}$$

$$= \frac{\left(۲+h+\frac{۱}{۲+h}\right)-\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow ۲+h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۵}{۲} = \frac{۸}{۹}h \Rightarrow h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۹}h$$

$$\Rightarrow ۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲} = ۸h \Rightarrow h = \frac{۵}{۲}\ ,\ h = ۰ \quad (\text{غ ق ق})$$

$$\Rightarrow h = ۲/۵$$

سوال ۱۰۷

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع در نقطه $x = ۱$ با نمو ۰/۴۴ یعنی آهنگ متوسط تغییر تابع در فاصله [۱/۴۴ , ۱]. بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۱/۴۴-۱} = \frac{\frac{۱/۴۴-۱}{\sqrt{۱/۴۴}} - \frac{۱-۱}{۱}}{۰/۴۴}$$

$$= \frac{\frac{۰/۴۴}{۱/۲}}{۰/۴۴} = \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۱۰}{۱۲} = \frac{۵}{۶}$$

حال آهنگ لحظه‌ای (مشتق) تابع را در $x = ۱$ محاسبه می‌کنیم. چون در تابع $x - ۱$، f عامل صفر شونده است، پس برای محاسبه مشتق تنها از عامل صفر شونده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱) = ۱$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = ۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow$$

سوال ۱۰۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

آهنگ متوسط تغییر تابع f در [a,b] برابر شیب خط قاطع گذرنده از دو نقطه $x = a$ و $x = b$ که همان شیب خط $۲y - x = \frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ است:

$$\text{شیب خط} = \text{آهنگ متوسط} = \frac{۱}{۲}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = m$ برابر $f'(m)$ است:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(m) = \frac{۱}{۲\sqrt{m}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = ۱$$

سوال ۱۰۹

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع بین نقاط B تا C برابر است با:

$$\frac{f(۸)-f(۶)}{۸-۶} = \frac{۴۸-۴۲}{۸-۶} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

در نتیجه طبق فرض، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه A برابر با $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ است. از طرفی می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع، همان مشتق تابع بوده که برابر با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه است.

$$f'(a) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = \frac{۲a-b}{a-۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴a - ۲b = a \Rightarrow ۳a = ۲b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۳}{۲}$$

سوال ۱۱۰

پاسخ: گزینه ۲

آهنگ متوسط در فاصله‌ی[۱, ۴] $= \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{\frac{۲}{۴}-\frac{۲}{۱}}{۳} = \frac{\frac{۱}{۲}-۲}{۳} = -\frac{۱}{۲}$

برای محاسبه‌ی آهنگ لحظه‌ای در $x = ۴$، از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{۲}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{۲}{x^۲} \Rightarrow f'(۴) = -\frac{۲}{۱۶} = -\frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه ای}} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{۱}{۸}} = ۴$$

پس آهنگ متوسط ۴ برابر آهنگ لحظه‌ای است.

سوال ۱۱۱

پاسخ: گزینه ۱

آهنگ متوسط یک تابع بازه [a,b] برابر است با:

آهنگ متوسط $= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

آهنگ متوسط: $\frac{f(۴/۲۵)-f(۲/۴۱)}{۴/۲۵-۲/۴۱} = \frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴/۴۱}}{۱/۸۴}$

$$= \frac{۲/۵-۲/۱}{۱/۸۴} = \frac{۰/۴}{۱/۸۴} = \frac{۴۰}{۱۸۴} = \frac{۵}{۲۳}$$

و آهنگ لحظه‌ای تابع در هر نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است. پس:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \Rightarrow f'(۳/۲۹) = \frac{۱}{۲\times\sqrt{۵/۲۹}} = \frac{۱}{۲\times۲/۳} = \frac{۱}{۴/۶}$$

$$= \frac{۱۰}{۴۶} = \frac{۵}{۲۳}$$

در نتیجه اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای موردنظر برابر صفر است:

$$\frac{۵}{۲۳} - \frac{۵}{۲۳} = ۰$$