۱. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[۴\sin^۲\pi x\right]$ روی بازه‌ی $\left[۰,\frac{۱}{۲}\right]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

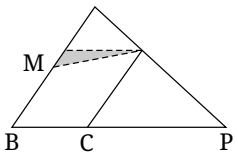
۲. در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $\overset{\frown}{ADB}=۳۴^\circ$ باشد، زاویه $O\widehat{A}D$ چند درجه است؟

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

۳. نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... طوری روی یک خط راست هستند که $A_۰A_۱=۱$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $A_nA_{n+۲}$ وسط $A_{n+۱}A_{n+۲}$ است. طول $A_۰A_{۱۱}$ چقدر است؟

۱) ۱۷۱ ۲) ۳۴۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۶۸۳

۴. در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC=\frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۵. مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های هریک، از دو نقطهٔ $\begin{vmatrix}-۳\\۰\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}۳\\۰\end{vmatrix}$ برابر با ۱۰ باشد، کدام معادله را مشخص می‌کند؟

۱) $۲۵x^۲+۱۶y^۲=۴۰۰$ ۲) $۹x^۲+۱۶y^۲=۱۴۴$ ۳) $۱۶x^۲+۲۵y^۲=۴۰۰$ ۴) $۱۶x^۲+۹y^۲=۱۴۴$

۶. در مثلثی با اضلاع نابرابر، رابطهٔ $b^۳+a^۲c=c^۳+a^۲b$ بین اضلاع برقرار است. زاویهٔ A چند رادیان است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

۷. به ازای چه مقدار m، تابع $f(x)=(\frac{m^۳+m^۲}{m^۲-۱})^x$ $(x>۰)$ نزولی است؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(۱,+\infty)\cup[۰]$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۰]$

۸. تابع وارون $f(x)=|x|+\frac{۱}{۴}\sqrt{-x}$ به صورت $y=-(\frac{\sqrt{bx+c}+d}{۸})^e$ است، مقدار $(\frac{bc}{de})$ کدام است؟

۱) -۶۴ ۲) ۶۴ ۳) -۳۲ ۴) ۳۲

۹. مقدار عبارت $\sin\frac{\pi}{۱۴}\sin(\frac{۹\pi}{۱۴})\sin(\frac{۱۱\pi}{۱۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

۱۰. اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ برد تابع $g(x)=\frac{۱}{(fof)(x)}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-۱,-۲\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۴ روش اول: تابع به فرم $y=[f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول Min نسبی پیوسته تابع f نباشد ناپیوسته است.

$$۰ \le x \le \frac{۱}{۲} \to ۰ \le \pi x \le \frac{\pi}{۲} \to ۰ \le \sin^۲ \pi x \le ۱ \to ۰ \le ۴\sin^۲ \pi x \le ۴$$

$$۴\sin^۲ \pi x = ۰ \to \sin \pi x = ۰ \to \pi x = ۰ \to x = ۰$$

$$۴\sin^۲ \pi x = ۱ \to \sin^۲ \pi x = \frac{۱}{۴} = \sin^۲ \frac{\pi}{۶} \to \pi x = \frac{\pi}{۶} \to x = \frac{۱}{۶}$$

$$۴\sin^۲ \pi x = ۲ \to \sin^۲ \pi x = \frac{۱}{۲} = \sin^۲ \frac{\pi}{۴} \to \pi x = \frac{\pi}{۴} \to x = \frac{۱}{۴}$$

$$۴\sin^۲ \pi x = ۳ \to \sin^۲ \pi x = \frac{۳}{۴} = \sin^۲ \frac{\pi}{۳} \to \pi x = \frac{\pi}{۳} \to x = \frac{۱}{۳}$$

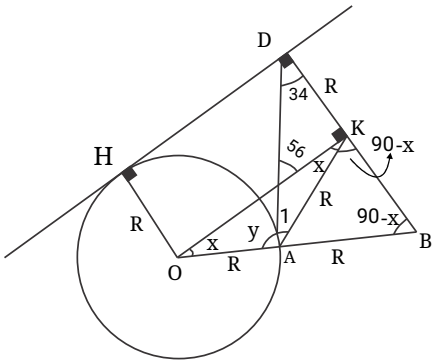
$$۴\sin^۲ \pi x = ۴ \to \sin^۲ \pi x = ۱ = \sin^۲ \frac{\pi}{۲} \to \pi x = \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{۱}{۲}$$

ابتدای بازه‌ی بسته پیوستگی راست و انتهای بازه‌ی بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در $x=۰$ پیوستگی راست دارد پس $x=۰$ نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد و تابع در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوستگی چپ ندارد پس نقطه‌ی ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به‌صورت $\left\{\frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}\right\}$ است.

---

۲ گزینه ۳

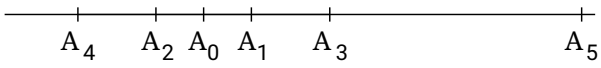
بعد از رسم شکل عمود OK را بر BD رسم می‌کنیم. در این صورت $OHDK$ مستطیل و مثلث OBK قائم‌الزاویه است و AK میانه وارد بر وتر است بنابراین مثلث‌های OAK و AKB و AKD متساوی‌الساقین هستند باتوجه به شکل داریم.



$$\left.\begin{array}{l} x+y+۵۶=۱۸۰ \\ y+۲x+۳۴=۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x+۳۴-۵۶=۰$$
$$\Rightarrow x=۲۲$$
$$x+y+۵۶=۱۸۰ \xrightarrow{x=۲۲} y=۱۰۲$$

---

۳ گزینه ۴ به شکل زیر دقت کنید:

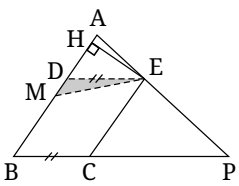


$A_۰$ وسط $A_۲A_۱$ است، پس $A_۲$ سمت چپ $A_۰$ و $A_۱$ سمت راست آن است. $A_۱$ وسط $A_۲A_۳$ است، پس $A_۳$ سمت راست $A_۱$ است. $A_۲$ وسط $A_۴A_۳$ است، پس $A_۴$ سمت چپ $A_۲$ است. اگر به همین شکل ادامه بدهیم، $A_۲, A_۴, A_۶, \ldots$ با همین ترتیب در سمت چپ $A_۰$ قرار می‌گیرند و $A_۱, A_۳, A_۵, \ldots$ به همین ترتیب در سمت راست $A_۰$. همچنین داریم:

$$A_۰A_۱=۱, A_۱A_۳=۲, A_۳A_۵=۸, A_۵A_۷=۳۲, A_۷A_۹=۱۲۸, A_۹A_{۱۱}=۵۱۲ \Rightarrow A_۰A_{۱۱}=۱+۲+۸+۳۲+۱۲۸+۵۱۲=۶۸۳$$

---

۴ گزینه ۲



$$\overset{\Delta}{PEC} \sim \overset{\Delta}{APB} \to \frac{S_{\overset{\Delta}{PEC}}}{S_{\overset{\Delta}{APB}}} = (\frac{PC}{PB})^۲ = (\frac{۲}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}$$

$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{APB} \to \frac{S_{\overset{\Delta}{APE}}}{S_{\overset{\Delta}{APB}}} = (\frac{DE}{BP})^۲ = (\frac{BC}{BP})^۲ = (\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۱}{۹}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{DEM}} = \frac{۱}{۲} \times DM \times HE \\ S_{DECB} = BE \times HE = ۲DM \times HE \end{array}\right\} \to S_{\overset{\Delta}{DEM}} = \frac{۱}{۴} S_{DECB}$$

$$S_{\overset{\Delta}{DEM}} = \frac{۱}{۴}(S_{\overset{\Delta}{ABP}} - S_{\overset{\Delta}{ADE}} - S_{\overset{\Delta}{ECP}}) = \frac{۱}{۴}(S_{\overset{\Delta}{ABP}} - \frac{۱}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}} - \frac{۴}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}}) = \frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}}) = \frac{۱}{۹} S_{\overset{\Delta}{ABP}}$$

$$\to \frac{S_{\overset{\Delta}{DEM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABP}}} = \frac{۱}{۹}$$

---

۵ گزینه ۳ تعریف بیان‌شده به بیضی مربوط است حال کافی است تعریف بیان‌شده را برای نقطهٔ M با مختصات کلی $\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ عملی کنیم. داریم:

$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \begin{cases} F'\left|\begin{matrix} -۳ \\ ۰ \end{matrix}\right. \to MF' = \sqrt{(x+۳)^۲ + y^۲} \\ F\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۰ \end{matrix}\right. \to MF = \sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲} \end{cases} \xrightarrow{MF+MF'=۱۰} \sqrt{(x+۳)^۲ + y^۲} + \sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲} = ۱۰$$

$$\to \sqrt{(x+۳)^۲ + y^۲} = ۱۰ - \sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲} \xrightarrow{\text{مجذور می‌کنیم}} (x+۳)^۲ + y^۲ = ۱۰۰ + (x-۳)^۲ + y^۲ - ۲۰\sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} ۱۲x = ۱۰۰ - ۲۰\sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲} \xrightarrow{\div ۴} ۳x = ۲۵ - ۵\sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال را تنها نگه می‌داریم}} ۳x - ۲۵ = -۵\sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲} \xrightarrow{\text{دوباره مجذور می‌کنیم}} (۳x-۲۵)^۲ = ۲۵(x^۲ - ۶x + ۹ + y^۲)$$

$$\to ۹x^۲ + ۶۲۵ - ۱۵۰x = ۲۵x^۲ - ۱۵۰x + ۲۲۵ + ۲۵y^۲ \to ۱۶x^۲ + ۲۵y^۲ = ۴۰۰$$

---

۶ گزینه ۳

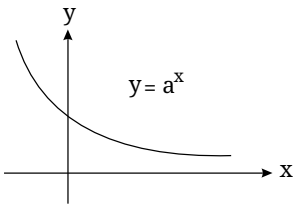
$$b^۳ + a^۲c = c^۳ + a^۲b \Rightarrow b^۳ - c^۳ = a^۲b - a^۲c \Rightarrow (b-c)(b^۲ + bc + c^۲) = a^۲(b-c)$$

چون اضلاع مثلث نابرابر هستند، پس $b \neq c$ و درنتیجه $b - c \neq ۰$؛ بنابراین می‌توانیم طرفین را بر $b-c$ تقسیم کنیم.

$$b^۲ + bc + c^۲ = a^۲ \xrightarrow{\text{قضیه کسینوس‌ها}} b^۲ + bc + c^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow bc = -۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow A = ۱۲۰^\circ = \frac{۲\pi}{۳}^{rad}$$

---

۷ گزینه ۴ تابع $y = a^x$ به ازای $۰ < a \leq ۱$ اکیداً نزولی است و به صورت زیر است. دقت کنید که اگر سوال از ما می‌خواست تابع اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه $۰ < a < ۱$ می‌شد.



اکنون می‌توان نوشت:

$$۰ \leq \frac{m^۳ + m^۲}{m^۲ - ۱} \leq ۱$$

اکنون باید تعیین علامت را انجام دهیم:

$$۰ \leq \frac{m^۳ + m^۲}{m^۲ - ۱} \Rightarrow ۰ \leq \frac{m^۲(m+۱)}{(m+۱)(m-۱)} \Rightarrow ۰ \leq \frac{m^۲}{m-۱}$$

دقت کنید که $m = ۰$ ریشه مضاعف و $m = -۱$ ریشه محذوف است.

$$\Rightarrow m \in \{(۱, +\infty) \cup [۰]\} \qquad (۱)$$

اکنون باید سمت راست نامساوی را حساب کنیم.

$$\frac{m^۳ + m^۲}{m^۲ - ۱} \leq ۱ \Rightarrow \frac{m^۳ + m^۲}{m^۲ - ۱} - \frac{(m^۲ - ۱)}{m^۲ - ۱} \leq ۰ \Rightarrow \frac{m^۳ + m^۲ - m^۲ + ۱}{m^۲ - ۱} \leq ۰ \Rightarrow \frac{m^۳ + ۱}{m^۲ - ۱} \leq ۰$$

اکنون تعیین علامت را انجام می‌دهیم:

$$\Rightarrow \frac{(m+۱)(m^۲-m+۱)}{(m-۱)(m+۱)} \leq ۰ \Rightarrow m<۱ \qquad (۲)$$

حال اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم، خواهیم داشت:

$$m \in [۰]$$

---

۸ گزینه ۳ برای حل سوال ضابطهٔ وارون $f(x)$ را بدست می‌آوریم، پیش از هر چیز در نظر داشته باشید:

$$-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow |x| = -x$$

پس می‌توان $f(x)$ را به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = -x + \frac{۱}{۴}\sqrt{-x} \Rightarrow y = (\sqrt{-x} + \frac{۱}{۸})^۲ - \frac{۱}{۶۴} \quad \Rightarrow y + \frac{۱}{۶۴} = (\sqrt{-x} + \frac{۱}{۸})^۲ \Rightarrow \frac{۶۴y+۱}{۶۴} = (\sqrt{-x} + \frac{۱}{۸})^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x} + \frac{۱}{۸} = \frac{\sqrt{۶۴y+۱}}{۸} \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{\sqrt{۶۴y+۱}-۱}{۸} \quad -x = (\frac{\sqrt{۶۴y+۱}-۱}{۸})^۲ \Rightarrow x = -(\frac{\sqrt{۶۴y+۱}-۱}{۸})^۲$$

اکنون جای x و y را عوض می‌کنیم، تا ضابطهٔ تابع وارون بدست آید:

$$y = -(\frac{\sqrt{۶۴x+۱}-۱}{۸})^۲ = f^{-۱}(x) \Rightarrow \begin{cases} b = ۶۴ \\ c = ۱ \\ d = -۱ \\ e = ۲ \end{cases}$$

حال خواستهٔ سوال را انجام می‌دهیم:

$$\frac{bc}{de} = \frac{۶۴ \times ۱}{-۲} = \boxed{-۳۲}$$

---

۹ گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که:

$$\sin(\frac{۹\pi}{۱۴}) = \sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{۲\pi}{۱۴}) = \cos(\frac{۲\pi}{۱۴})$$

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۱۴}) = \sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{۴\pi}{۱۴}) = \cos(\frac{۴\pi}{۱۴})$$

بنابراین می‌خواهیم حاصل عبارت $A = \sin\frac{\pi}{۱۴}\cos\frac{۲\pi}{۱۴}\cos\frac{۴\pi}{۱۴}$ را به‌دست آوریم.

با توجه به اتحاد $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ حاصل عبارت را به‌دست می‌آوریم.

$$A = \frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۱۴}}(\sin\frac{\pi}{۱۴}\cos\frac{\pi}{۱۴}\cos\frac{۲\pi}{۱۴}\cos\frac{۴\pi}{۱۴}) = \frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۱۴}}(\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۱۴}\cos\frac{۲\pi}{۱۴}\cos\frac{۴\pi}{۱۴})$$

$$= \frac{۱}{۲\cos\frac{\pi}{۱۴}}(\frac{۱}{۲}\sin\frac{۴\pi}{۱۴}\cos\frac{۴\pi}{۱۴}) = \frac{۱}{۴\cos\frac{\pi}{۱۴}}(\frac{۱}{۲}\sin\frac{۸\pi}{۱۴}) = \frac{۱}{۸} \times \frac{\sin\frac{۸\pi}{۱۴}}{\cos\frac{\pi}{۱۴}}$$

$$= \frac{۱}{۸} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۴})}{\cos\frac{\pi}{۱۴}} = \frac{۱}{۸} \times \frac{\cos\frac{\pi}{۱۴}}{\cos\frac{\pi}{۱۴}} = \frac{۱}{۸}$$

---

۱۰ گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-۲\} \quad , \quad D_{fof} = \{x | x \in D_f \, , \, f(x) \in D_f\} = \left\{x | x \neq -۲ \, , \, \frac{x-۱}{x+۲} \neq -۲\right\}$$

$$\frac{x-۱}{x+۲} \neq -۲ \Rightarrow x-۱ \neq -۲x-۴ \Rightarrow x \neq -۱$$

$$\Rightarrow D_{fof} = \mathbb{R} - \{-۱, -۲\}$$

از طرف دیگر:

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۲}=\frac{\frac{x-۱}{x+۲}-۱}{\frac{x-۱}{x+۲}+۲}=\frac{x-۱-x-۲}{x-۱+۲x+۴}=\frac{-۳}{۳x+۳}=\frac{-۱}{x+۱}$$

چون $(fof)(x)\neq ۰$؛ بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۱,-۲\}$ و $x\neq -۱,-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{fof(x)}=-x-۱$

اگر $x=-۱$ آن‌گاه $-x-۱=۰$ و اگر $x=-۲$، آن‌گاه $-x-۱=۱$. پس $g(x)\neq ۰,۱$ و درنتیجه $R_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱) ۴ ۳ ۲ ۱	۴) ۴ ۳ **۲** ۱	۷) **۴** ۳ ۲ ۱	۱۰) **۴** ۳ ۲ ۱
۲) ۴ **۳** ۲ ۱	۵) ۴ **۳** ۲ ۱	۸) ۴ **۳** ۲ ۱	
۳) **۴** ۳ ۲ ۱	۶) ۴ **۳** ۲ ۱	۹) ۴ ۳ **۲** ۱	