۱ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۹}{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$
۲) $\frac{۱}{۲۱}$
۳) $\frac{۱}{۲۸}$
۴) $\frac{۱}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳ دو تاس را باهم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد روشده، یک عدد اول است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۷}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟

۱) $\frac{۸}{۱۱}$
۲) $\frac{۹}{۱۱}$
۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$
۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۵ چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$
۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$
۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$
۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده همرنگ‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۸ از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن‌ها در مورد ادبیات و ۷ عدد آن‌ها در مورد تاریخ است به‌طور تصادف ۵ کتاب انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$

۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۹ دو تاس را انداخته‌ایم، اگر حاصل‌جمع شماره‌های روشده کمتر از ۶ باشد، احتمال آنکه شمارهٔ یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۰ اعداد ۹ ,... ,۲ ,۱، بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به‌تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۱ از ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم ۶ نفر به‌تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده‌اند. احتمال آنکه ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۴}$
۲) $\frac{۲}{۷}$
۳) $\frac{۵}{۱۴}$
۴) $\frac{۳}{۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۲ احتمال این که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۴}{۳۳}$
۳) $\frac{۵}{۳۲}$
۴) $\frac{۵}{۳۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ پنج مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه یکسان را در ظرفی ریخته‌ایم. به‌تصادف دو مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره همرنگ‌اند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۴ در آزمایشگاهی ۷ موش نگه‌داری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$
۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۵}{۷}$
۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۵ هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه‌ای مرغوب‌اند. با کدام احتمال از ۴ کالای خریداری شده این کارخانه لااقل یک کالا مرغوب است؟

۱) $\frac{۲۵۱}{۲۵۶}$
۲) $\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$
۳) $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$
۴) $\frac{۶۳}{۶۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۶ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگه‌داری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت انجام آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش سفید است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۷ گروه خونی افراد، کدام نوع متغیر است؟

۱) کیفی - اسمی ۲) کیفی - ترتیبی

۳) کمی - پیوسته ۴) کمی - گسسته

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۸ چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۹ حروف کلمهٔ ATAXIA را بریده، به طور تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۲۰ پنج مهرهٔ سفید یکسان با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهرهٔ سیاه یکسان با شماره‌های ۱ تا ۵ را در ظرفی قرار می‌دهیم، به‌تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو مهره همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۱ نوع آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟

۱) کمّی گسسته
۲) کمّی پیوسته
۳) کیفی اسمی
۴) کیفی ترتیبی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۲ در ظرفی ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه موجود است. به‌تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهرهٔ‌خارج‌شده، هم‌رنگ هستند؟

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۱۸
۴) ۰/۲۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲۳ یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر"رو" بیاید آنگاه تاس می‌ریزیم. اگر "پشت" بیاید دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال، حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۲۴}$
۴) $\frac{۵}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۴ هریک از اعداد ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱، بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به‌طور متوالی و تصادفی گوی‌ها را از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک‌درمیان خارج می‌شوند؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۱۲
۳) ۰/۱۵
۴) ۰/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۵ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

۱) ۰/۱
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۳
۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۶ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۱۸}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۲۷ در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$
۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$
۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$
۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۸ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر سه مهره از کیسه خارج کنیم، با کدام احتمال، حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج‌شده همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۲}$
۲) $\frac{۱۹}{۲۲}$
۳) $\frac{۳۹}{۴۴}$
۴) $\frac{۴۱}{۴۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۹ از بین مجموعه اعداد متوالی $\{۵۱, ۵۲, \dots, ۳۰۰\}$، عددی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۶ یا بر ۷ بخش‌پذیر است ولی مضرب ۴۲ نیست؟

۱) $۰/۲۴$
۲) $۰/۲۶$
۳) $۰/۲۸$
۴) $۰/۳۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۳۰ در جعبه‌ای ۷ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز موجود است. به‌تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهرهٔ قرمز و حداقل ۲ مهرهٔ سفید، خارج شده است؟

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$
۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$
۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$
۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۱ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۲ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$
۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$
۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$
۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۲ در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز است. به‌تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۲}$

۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۳ دو تاس را باهم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$

۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۴ هریک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به‌تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه‌رقمی حاصل مضرب ۳ است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴

۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۵ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهرهٔ خارج‌شده، همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۴۱}{۱۲۰}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۰}$

۳) $\frac{۷۹}{۱۲۰}$ ۴) $\frac{۳۱}{۶۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۳۶ در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به‌تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج‌شده متفاوت است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$

۳) $\frac{۷}{۲۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۷ دو تاس را باهم می‌اندازیم. احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۸ دو تاس را باهم می‌اندازیم. احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۵}{۱۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۳۹ در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول شش مهره سفید و در ظرف دوم سه مهره سفید است. از اولی هفت مهره و از دومی پنج مهره به‌تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۱۳}{۷۲}$

۲) $\frac{۷}{۳۶}$

۳) $\frac{۱۵}{۷۲}$

۴) $\frac{۳۱}{۱۴۴}$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۴۰ در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به‌دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$

۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$

۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$

۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۱ سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به‌تصادف از یک ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$

۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۴۲ ۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند؟

۱) ۶۱/۴

۲) ۶۱/۸

۳) ۶۲/۴

۴) ۶۲/۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۳ احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

۱) ۰/۱۳
۲) ۰/۱۴
۳) ۰/۱۵
۴) ۰/۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۴۴ در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها دفترچهٔ سلامت دارد؟

۱) ۰/۶۵۸
۲) ۰/۶۶۹
۳) ۰/۶۸۵
۴) ۰/۶۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

۴۵ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۷}$
۲) $\frac{۵}{۱۴}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۶ در جعبهٔ اول ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$
۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$
۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$
۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۷ ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هریک از دو ظرف B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به‌تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج‌شده، سفید است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$
۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$
۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$
۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۸ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج‌شده سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$
۲) $\frac{۳}{۷}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۴۹ در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۱۵/۲
۲) ۱۵/۶
۳) ۱۵/۸
۴) ۱۶/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۵۰ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه است. دو مهره به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهرهٔ دوم، سفید است؟

۱) ۰/۵
۲) ۰/۶
۳) ۰/۶۴
۴) ۰/۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۱ بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بستهٔ علوم انسانی، به‌تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده‌شدن در هر بستهٔ این دروس به ترتیب ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$
۲) $\frac{۲۹}{۳۶}$
۳) $\frac{۳۰}{۳۶}$
۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۲ در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

۱) $\frac{۵}{۲۴}$
۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$
۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$
۴) $\frac{۷}{۲۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۵۳ انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

۱) ۹۱%
۲) ۹۲%
۳) ۹۳%
۴) ۹۴%

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۴ در ۲۵ دادهٔ آماری، میانگین و انحراف معیار به‌ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، تقریباً کدام است؟

۱) ۱۴/۷۲
۲) ۱۴/۸۱
۳) ۱۵/۳۳
۴) ۱۶/۶۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۵
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

۵۵ در ۱۵۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چندبرابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۷}{۸}$
۴) $\frac{۸}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۵۶ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۳
۳) ۰/۲
۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۷ داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟ $\left(\sqrt{\frac{۲}{۷}} \simeq ۰/۵۳۴\right)$

۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۲۰
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۸ A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A)=0/4$، $P(B|A)=0/25$ و $P(B)=0/3$ باشد، $P(B|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵۹ ضریب تغییرات داده‌های آماری به‌صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵

۳) ۰/۱۷ ۴) ۰/۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۶۰ میانگین و انحراف معیار ۱۸ دادهٔ آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ دادهٔ جدید کدام است؟

۱) ۹/۲۵ ۲) ۹/۳۶

۳) ۹/۵۲ ۴) ۹/۶۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۶۱ واریانس ۱۱ دادهٔ آماری صفر است. اگر داده‌های ۱۶،۲۴ و ۲۶ به آن اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند، انحراف معیار ۱۴ دادهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۲۵

۳) ۱/۵ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۲ اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازهٔ اضلاع مربع‌هایی ۱۵ و ۰/۲ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۲۲۷ ۲) ۲۲۹

۳) ۲۳۲ ۴) ۲۳۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۶۳ در یک خانوادهٔ دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۶۴ نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به‌صورت زیر است، مقدار $\frac{Q_۱ + Q_۳ - ۲Q_۲}{Q_۳ - Q_۱}$ کدام است؟

۱۲/۷, ۳۰/۲, ۱۰/۶, ۱۱/۹, ۱۰/۶, ۱۲/۳, ۱۱/۲, ۱۳/۵, ۱۲/۸, ۱۱/۵

۱) -۰/۲۲۵
۲) -۰/۱۲۵
۳) ۰/۱۷۵
۴) ۰/۲۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶۵ احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴
۲) ۰/۷۶
۳) ۰/۸۲
۴) ۰/۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۶۶ در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۱) گروه اول
۲) گروه دوم
۳) یکسان
۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۶۷ یک خانوادهٔ سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۶۸ در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۶۹ در آزمایشگاهی ۵ موشِ سفید و ۳ موشِ سیاه نگه‌داری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$
۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$
۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$
۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۷۰ در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$

۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۷۱ در جدول فراوانی زیر، واریانس داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴
فراوانی	۴	۳	۹	۷	۲

۱) ۱۱/۷۲

۲) ۱۱/۹۶

۳) ۱۲/۲۴

۴) ۱۲/۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷۲ داده‌های آماری در ۴ دسته با درصد فراوانی نسبی آن‌ها بیان شده است. میانگین این داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
درصد فراوانی نسبی	۱۵	۳۰	۲۵	a

۱) ۱۶/۵

۲) ۱۶/۸

۳) ۱۷

۴) ۱۷/۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۳ در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی دارد یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

۱) ۰/۷

۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۸

۴) ۰/۸۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۷۴ دو تاس سالم را باهم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$

۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$

۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$

۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۷۵ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم، سپس از بین باقی‌ماندهٔ مهره‌ها به‌تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۶ میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشند. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۷

۳) ۰/۲۸ ۴) ۰/۳۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۷ دستگاه A کالایی با میانگین وزن ۱۵۰ و انحراف معیار ۳/۶ و دستگاه B همان کالا را با میانگین وزن ۱۶۰ و انحراف معیار ۳/۸۴ بسته‌بندی می‌کند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیشتر است؟

۱) یکسان ۲) A

۳) B ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۸ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{A} : ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹$$
$$\mathbf{B} : ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۴, ۱۷, ۱۸$$

دقت عمل کدام بیشتر است؟

۱) A ۲) B

۳) یکسان ۴) غیرقابل پیش‌بینی

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۷۹ در ۱۲ دادهٔ آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ است، ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸۰ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آن‌ها ۵ است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۳۴

۳) ۱۴۹ ۴) ۱۶۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۸۱ داده‌های $x_i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = ۱۲x_i + ۶$ کدام است؟

۱) $۰/۴$ ۲) $۰/۴۸$

۳) $۰/۵۲$ ۴) $۰/۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک دوم داخل ۱۳۹۵

۸۲ یک جامعه به‌اندازهٔ ۱۲ و واریانس ۱۲/۶، با جامعهٔ دیگری به‌اندازهٔ ۲۴ و واریانس ۷/۲، تشکیل جامعهٔ جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعهٔ جدید کدام است؟

۱) ۲/۹ ۲) ۳

۳) ۳/۱ ۴) ۳/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۸۳ در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم، سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$

۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۴ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۶$ و $P(A \cap B') = ۰/۲$، آنگاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

۱) $۰/۷$ ۲) $۰/۷۵$

۳) $۰/۸۵$ ۴) $۰/۹$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۵ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۲۲۹ ۲) ۲۳۲

۳) ۲۳۴ ۴) ۲۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸۶ در ۳۰ دادهٔ آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ است. ضریب تغییرات، کدام است؟

۱) ۰/۲۲۵
۲) ۰/۲۷۵
۳) ۰/۳۲۵
۴) ۰/۳۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۷ میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها ۶۵/۴۴ است. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، کدام است؟

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲
۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۸ ظرف A شامل ۸ مهره از عدد ۱ تا ۸ و ظرف B دارای ۵ مهره از عدد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع آن‌ها از ۸ بیشتر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۹ دو سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه "رو" یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۵}{۱۲}$
۴) $\frac{۷}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۹۰ سه سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه لااقل یکی از پیشامدهای سکه فقط یک "رو" یا عدد تاس زوج باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۶}$
۲) $\frac{۷}{۱۲}$
۳) $\frac{۵}{۸}$
۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۹۱ یک سکه و دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه "رو" ظاهر شده است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۸}$
۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۲ در ۲۵ دادهٔ آماری، مجموع تمام داده‌ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۳۲۵۰ می‌باشد. ضریب تغییرات در این داده‌ها کدام است؟

۱) ۰/۲۵۷۲
۲) ۰/۲۶۴۵
۳) ۰/۲۶۷۲
۴) ۰/۲۷۲۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۳ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ می‌باشد. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

۱) ۰/۹۲
۲) ۰/۹۴
۳) ۰/۹۶
۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۹۴ احتمال قبولی فرد A در یک آزمون $۰/۸۴$ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون $۰/۷۵$ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

۱) $۰/۹۲$
۲) $۰/۹۴$
۳) $۰/۹۶$
۴) $۰/۹۸$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۵ نمرات مهارت برای کارگر (A) : ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳ و ۱۲ و برای کارگر (B) : ۱۶/۵، ۱۶، ۱۵/۵، ۱۳ و ۱۱/۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

۱) A
۲) B
۳) یکسان
۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۶ احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{۷}{۹}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۷ شش دادهٔ آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ دادهٔ دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده‌اند. انحراف معیار گروه جدید، کدام است؟

۱) ۲/۲
۲) ۲/۳
۳) ۲/۴
۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۹۸ اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a، برابر با ۱۳ باشد، میانهٔ آن‌ها کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۹۹ میانگین طول ضلع مربع‌هایی ۲۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۰۶ است. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۶۲۶/۵
۲) ۶۲۷/۲۵
۳) ۶۲۷/۷۵
۴) ۶۲۸/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۰ در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگه‌داری می‌شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های فراری دیابتی است؟

۱) $\frac{۱۵}{۵۶}$
۲) $\frac{۵}{۱۴}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱ گزینه ۳

برای محاسبهٔ احتمال اینکه دو فرد موردنظر در کنار هم نباشند، احتمال اینکه هر دو فرد در کنار هم باشند را محاسبه می‌کنیم و از احتمال کل کم می‌کنیم.

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{۲نفر}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{۸نفر}}$$

دو نفر در کنار هم باشند:

$$P(A') = \frac{۲!۹!}{۱۰!} = \frac{۱}{۵}$$

دو نفر در کنار هم نباشند:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

۲ گزینه ۳

$$\underbrace{\text{۵ کتاب فارسی}}\ \underbrace{\text{۳ کتاب انگلیسی}}$$

$$n(S) = ۸!$$

$$n(A) = ۵! \times ۳! \times ۲$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۳! \times ۲}{۸!} = \frac{۳ \times ۲ \times ۲}{۸ \times ۷ \times ۶} = \frac{۱}{۲۸}$$

۳ گزینه ۱

فضای نمونه‌ای این آزمایش $۶^۲ = ۳۶$ حالت دارد.

فضای مطلوب به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{Bmatrix} (۱,۱)(۱,۲),(۲,۱),(۱,۴),(۴,۱),(۱,۶),(۶,۱) \\ (۲,۳)(۳,۲)(۲,۵)(۵,۲)(۳,۴)(۴,۳) \\ (۵,۶)(۶,۵) \end{Bmatrix}$$

این مجموعه ۱۵ عضوی است:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$$

۴

گزینه ۴

گام اول

الف) از بین $۱۱ = ۶ + ۵$ موش، ۳ موش انتخاب می‌شود. قرار است لااقل یک موش سفید باشد پس می‌تواند یکی، دو تا یا هر سه تای آن‌ها سفید باشد.

ب) متمم این‌که لااقل یک موش از سه موش انتخاب شده سفید باشد، سیاه بودن هر سه موش است.

گام دوم

روش اول:

$$\mathrm{P}\,(\text{لااقل یک موش سفید}) = \mathrm{P}\,(\text{یک موش سفید}) + \mathrm{P}\,(\text{دو موش سفید}) + \mathrm{P}\,(\text{سه موش سفید})$$

$$= \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۷۵}{۱۶۵} + \frac{۶۰}{۱۶۵} + \frac{۱۰}{۱۶۵} = \frac{۱۴۵}{۱۶۵} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از پیشامد احتمال متمم

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{A}') = \mathrm{P}\,(\text{هر سه موش سیاه}) = \frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۴}{۳۳}$$

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\,(\text{لااقل یک موش سفید}) = ۱ - \mathrm{P}\,(\mathrm{A}') = ۱ - \frac{۴}{۳۳} = \frac{۲۹}{۳۳}$$

۵

گزینه ۲

گام اول

الف) به واژهٔ حداقل در صورت تست دقت کنید. حداقل دو نفر از ۴ نفر ماه تولد یکسان داشته باشند یعنی یا دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند، یا سه نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند و یا چهار نفر.

ب) اگر پیشامد A چنین تعریف شود که حداقل دو نفر از میان ۴ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند آن‌گاه پیشامد متمم (A') یعنی هیچ دو نفری از میان ۴ نفر ماه تولدشان یکسان نباشد و همگی در ماه‌های متفاوت به دنیا آمده باشند.

ج) می‌دانیم $\mathrm{P}\,(\mathrm{A}) = ۱ - \mathrm{P}\,(\mathrm{A}')$

گام دوم

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{A}') = \mathrm{P}\,(\text{هیچ دو نفری متولد یک ماه نباشند}) = \frac{۱۲}{۱۲} \times \frac{۱۱}{۱۲} \times \frac{۱۰}{۱۲} \times \frac{۹}{۱۲} = \frac{۵۵}{۹۶}$$

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\,(\text{حداقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند}) = ۱ - \mathrm{P}\,(\mathrm{A}') = ۱ - \frac{۵۵}{۹۶} = \frac{۴۱}{۹۶}$$

۶ گزینه ۳

گام اول

الف) اگر قرار باشد حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید، می‌تواند یک سکه رو و دیگری پشت بیاید و یا اینکه هر دو رو بیایند.

ب) اگر قرار باشد عدد تاس مضرب ۳ باشد، عدد رو شده ۳ یا ۶ است.

ج) اگر A پیشامد مطلوب خواسته شده باشد احتمال اتفاق افتادنش به صورت مقابل تعریف می‌شود: $P\,(A)=\frac{n\,(A)}{n\,(S)}$

گام دوم

تعداد کل حالت‌ها در پرتاب دو سکه و یک تاس برابر است با:

$$n\,(S)=۲\times ۲\times ۶=۲۴$$

حالت‌های مطلوب به صورت زیر است:

$$A=\{(\text{ر},\text{پ},۳),(\text{ر},\text{پ},۶),(\text{پ},\text{ر},۳),(\text{پ},\text{ر},۶),(\text{ر},\text{ر},۳),(\text{ر},\text{ر},۶)\}$$

$$n\,(A)=۶$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P\,(A)=\frac{n\,(A)}{n\,(S)}=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$$

۷ گزینه ۱

گام اول

الف) برای اینکه مهره‌ها همرنگ باشند باید هر ۳ سیاه یا هر ۳ سفید باشند.

ب) فضای حالت به صورت انتخاب ۳ مهره از میان $۹=۵+۴$ مهرهٔ موجود است.

ج) پیشامد مورد نظر به صورت انتخاب ۳ مهره از میان ۴ مهرهٔ سفید یا انتخاب ۳ مهره از میان ۵ مهرهٔ سیاه تعریف می‌شود.

د) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$P\,(A)=\frac{n\,(A)}{n\,(S)}$$

گام دوم

$$n\,(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!\times ۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۶\times ۶!}=۸۴$$

$$n\,(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}=۴+۱۰=۱۴$$

$$P\,(A)=\frac{n\,(A)}{n\,(S)}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

۸ گزینه ۳

$$P\,(A)=\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۵}}=\frac{۱۰\times ۲۱}{\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸}{۵\times ۴\times ۳\times ۲}}=\frac{۳۵}{۱۳۲}$$

۹ گزینه ۲

می‌توانیم براساس پیشامد رخداده، فضای نمونه‌ای را محدود کنیم، فضای نمونه‌ای جدید عبارت است از:

$$S = \{(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۲,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۳,۱), (۳,۲), (۴,۱)\}$$

و پیشامد مطلوب را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای جدید می‌نویسیم. داریم:

$$A = \{(۱,۲), (۲,۱), (۲,۳), (۳,۲)\}$$

یعنی $n(A) = ۴$ و $n(S) = ۱۰$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

۱۰ گزینه ۲

تعداد حالات بیرون آوردن دو کارت به‌تصادف از میان ۹ کارت برابر است با:

$$n(S) = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

مجموعهٔ حالاتی که مجموع دو کارت، برابر ۱۱ باشند، عبارت است از:

$$A = \{(۲,۹), (۳,۸), (۴,۷), (۵,۶)\}$$

پس $n(A) = ۴$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

۱۱ گزینه ۳

باتوجه‌به فرض سؤال، احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۴}}{\binom{۹}{۶}} = \frac{۶ \times ۵}{۸۴} = \frac{۳۰}{۸۴} = \frac{۵}{۱۴}$$

۱۲ گزینه ۲

گام اول

به طور کلی $۱۱ = ۶ + ۵$ موش داریم. پیشامد مطلوب این است که هر ۳ موش از بین ۶ موشِ سفید انتخاب شوند.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳!۸!} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۶ \times ۸!} = ۱۶۵$$
$$n(A) = \binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۶ \times ۳!} = ۲۰$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۱۶۵} = \frac{۴}{۳۳}$$

۱۳ گزینه ۲

$$P(A) = \frac{\binom{\text{سفید}}{۲} + \binom{\text{سیاه}}{۲}}{\binom{\text{کل مهره‌ها}}{۲}} = \frac{\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۲۰}{۴۵} = \frac{۴}{۹}$$

۱۴ گزینه ۳

گام اول

الف) چون در صورت تست گفته شده لااقل بر روی یکی از دو موش انتخاب شده آزمایش صورت گرفته باشد، یعنی یا یکی از موش‌ها یا هر دوی آن‌ها مورد آزمایش قرار بگیرند.
ب) اگر پیشامد A را مورد آزمایش واقع شدنِ لااقل یکی از موش‌ها تعریف کنیم، A' یعنی هیچ موشی آزمایش نشده باشد.

گام دوم

روش اول:

$$n(S)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷!}{۵!۲!}=\frac{۴۲}{۲}=۲۱$$

$$n(A)=(\text{یکی از موش ها آزمایش شده باشد})+(\text{هردو موش آزمایش شده باشند})$$

$$=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}+\binom{۳}{۲}=۱۲+۳=۱۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از احتمال پیشامد متمم

$$P(A')=P(\text{هیچ موشی آزمایش نشده باشد})=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۶}{۲۱}=\frac{۲}{۷}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

۱۵ گزینه ۲

گام اول

الف) احتمال مرغوب بودن هر کالا ۰/۷۵ و احتمال نامرغوب بودنش ۰/۲۵ است.
ب) هدف این است که از میان ۴ کالای خریداری شده حداقل یکی مرغوب باشد. پس می‌تواند یک کالا، دو کالا، سه کالا و یا هر چهار کالای خریداری شده مرغوب باشد.

گام دوم

از احتمال پیشامد متمم استفاده می‌کنیم، یعنی احتمال اینکه تمام کالاها نامرغوب باشد را محاسبه می‌کنیم. پیشامد متمم را با A' نشان می‌دهیم، بنابراین:

$$P(A')=P(\text{همگی نامرغوب باشند})=\left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)^{۴}=\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۴}=\frac{۱}{۲۵۶}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۲۵۶}=\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$$

۱۶ گزینه ۳

گام اول

قرار است فقط یکی از ۴ موش انتخاب شده سفید باشد پس باید یک موش از بین ۳ موشِ سفید و ۳ موش از بین ۵ موشِ سیاه انتخاب شود.

گام دوم

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳}=۳\times۱۰=۳۰$$

$$n(S)=\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{۴!۴!}=۷۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۷۰}=\frac{۳}{۷}$$

۱۷ گزینه ۱

گروه خونی افراد، یک متغیر کیفی اسمی است.

۱۸ گزینه ۴

گام اول

الف) یک عدد در صورتی بر ۶ بخش‌پذیر است که هر بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون $۶ = ۳ + ۲ + ۱ + ۰$ پس عدد ساخته شده حتماً بر ۳ بخش‌پذیر است.

ج) عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکانش زوج باشد یعنی ۲ یا صفر. چون یکی از ارقام صفر است، در یک حالت یکان را صفر و در حالت دیگری یکان را ۲ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

$$\left.\begin{array}{r} \text{یکان صفر}: ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶ \\ \text{یکان دو}: ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow n(A) = ۶ + ۴ = ۱۰$$

$$n(S) = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۸$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹}$$

۱۹ گزینه ۲

گام اول

الف) تعداد کلمات ساخته شده با n حرف که m حرف از آن‌ها تکراری باشد برابر است با $\frac{n!}{m!}$.

ب) برای حل تست از روش دسته‌بندی استفاده می‌کنیم. یعنی حروفی که قرار است کنار هم باشند را در یک دسته قرار می‌دهیم و به عنوان یک حرف جدید در نظر می‌گیریم. به این صورت:

$$\underbrace{AAA}_{\text{یک حرف}}TXI$$

پس پیشامد مطلوب تعداد کلمات ساخته شده با ۴ حرف است.

گام دوم

$$n(S) = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$

$$n(A) = ۴!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴!}{۱۲۰} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

۲۰ گزینه ۲

اگر مهره‌های سفید و سیاه را باتوجه‌به شماره‌های آن‌ها با $\omega_۱$ تا $\omega_۵$ و $b_۱$ تا $b_۵$ نمایش دهیم، فضای نمونهٔ آزمایش موردنظر برابر است با:

$$S = \{(\omega_۱, \omega_۵), (\omega_۲, \omega_۴), (b_۱, b_۵), (b_۲, b_۴), (\omega_۱, b_۵), (\omega_۲, b_۴), (\omega_۳, b_۳), (\omega_۴, b_۲), (\omega_۵, b_۱)\}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از:

$$A = \{(\omega_۱, \omega_۵), (\omega_۲, \omega_۴), (b_۱, b_۵), (b_۲, b_۴)\}$$

$$\text{احتمال موردنظر}: \ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۹}$$

۲۱ گزینه ۳

ازآنجایی‌که نوع آلایندگی هوا می‌تواند به‌صورت آلایندگی مونوکسید کربن، دی‌اکسید کربن و غیره باشد، پس کیفی اسمی است. توجه کنید در این سؤال میزان آلایندگی هوا که کمّی پیوسته می‌باشد، سؤال نشده است.

۲۲ گزینه ۲

$$\underbrace{\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}} \times \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}}}_{\text{هر دو سفید}} + \underbrace{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}} \times \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}}_{\text{هر دو سیاه}} = \frac{۶۰+۳}{۲۸ \times ۱۵} = \frac{۳}{۲۰} = \frac{۱۵}{۱۰۰}$$

۲۳ گزینه ۳

می‌دانیم هر سکه دو حالت دارد پس احتمال ظاهر شدن هریک از حالت‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است، همچنین در پرتاب یک تاس، با احتمال $\frac{۲}{۶}$ عدد ظاهرشده مضرب ۳ خواهد بود.
باتوجه‌به صورت سؤال اگر در پرتاب سکه "رو" بیاید، تاس می‌ریزیم و اگر "پشت" بیاید، دوباره سکه پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم حداکثر در پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ باشد؛ بنابراین باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد:

حالت اول: در اولین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، عدد ظاهرشده مضرب ۳ باشد.

$$P(x=۱) = \overset{\text{رو}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{مضرب ۳}}{\frac{۲}{۶}} = \frac{۱}{۶}$$

حالت دوم: در اولین پرتاب سکه، "پشت" و در دومین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود.

$$P(x=۲) = \overset{\text{پشت}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{رو}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{مضرب ۳}}{\frac{۲}{۶}} = \frac{۱}{۱۲}$$

حالت سوم: در اولین و دومین پرتاب سکه، "پشت" و در سومین پرتاب سکه، "رو" بیاید سپس با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود.

$$P(x=۳) = \overset{\text{پشت}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{پشت}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{رو}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{مضرب ۳}}{\frac{۲}{۶}} = \frac{۱}{۲۴}$$

بنابراین داریم:

$$P(x \leq ۳) = P(x=۱) + P(x=۲) + P(x=۳) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۴} = \frac{۴+۲+۱}{۲۴} = \frac{۷}{۲۴}$$

۲۴ گزینه ۱

تعداد حالت‌های فضای نمونه‌ای برابر $n(S) = ۶!$ است. برای اینکه شماره‌های زوج و فرد، یک درمیان قرار گیرند، داریم:

زوج فرد زوج فرد زوج فرد

۳ × ۳ × ۲ × ۲ × ۱ × ۱

ولی چون می‌توان ابتدا با عدد فرد شروع کرد، پس تعداد اعضای پیشامد موردنظر برابر است با:

$$n(A) = ۲ \times ۳! \times ۳!$$

$$P(A) = \frac{۲ \times ۳! \times ۳!}{۶!} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$$

۲۵ گزینه ۱

گام اول

الف) ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داریم. از میان ۵ مهره، ۳ مهر دارای شمارهٔ فرد و ۲ مهره دارای شمارهٔ زوج هستند. پیشامد مورد نظر خارج نشدن دو مهره با شمارهٔ فرد به صورت متوالی است. بنابراین مهره‌ها باید به صورت یک در میان زوج و فرد خارج شوند و چون تعداد مهره‌ها به شماره‌های فرد یکی بیشتر است پس تنها حالت ممکن چنین می‌شود:

A پیشامد : فرد, زوج, فرد, زوج, فرد

ب) احتمال پیشامد A را می توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

فضای حالت به صورت تمام حالت‌هایی که ۵ شماره می‌توانند به صورت پشت سر هم قرار گیرند تعریف می‌شود پس:

$$n(S)=۵!=۱۲۰$$

A : فرد, زوج, فرد, زوج, فرد

$$n(A)=۳\times۲\times۲\times۱\times۱=۱۲$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

۲۶ گزینه ۳

گام اول

الف) تعداد کل حالت‌ها $(n(S))$ در پرتاب دو تاس برابر ۳۶ است.

ب) مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس عددی بین ۲ و ۱۲ خواهد بود. بنابراین پیشامد مورد نظر شامل حالت‌هایی می‌شود که جمع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ است.

ج) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ شود را مشخص می‌کنیم:

مجموع دو تاس برابر۴ : $(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)$

مجموع دو تاس برابر۸ : $(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)$

مجموع دو تاس برابر۱۲ : $(۶,۶)$

بنابراین $n(A)=۹$ و $n(S)=۳۶$ و داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

۲۷ گزینه ۲

گام اول

الف) به واژهٔ حداقل در صورت تست توجه کنید. این واژه نقش تعیین‌کننده‌ای در حل تست دارد. وقتی قرار است حداقل یک مهره از ۳ مهرهٔ انتخاب شده، آبی باشد یعنی تعداد مهره‌های آبی می‌تواند یکی، دو تا یا سه تا باشد.

ب) اگر پیشامد A را انتخاب حداقل یک مهرهٔ آبی تعریف کنیم آن‌گاه پیشامد A' انتخاب نشدن مهرهٔ آبی یا انتخاب هر سه مهره از میان مهره‌های قرمز و سفید را بیان می‌کند. این تست را می‌توان با احتمال پیشامد متمم نیز حل کرد.

$$P\ (A) = ۱ - P\ (A')$$

گام دوم

روش اول:

فضای نمونه ای شامل انتخاب ۳ مهره از میان ۹ مهرهٔ موجود است. بنابراین

$$P\,(\text{حداقل یک مهرهٔ آبی}) = P\,(\text{یک مهرهٔ آبی}) + P\,(\text{دو مهرهٔ آبی}) + P\,(\text{سه مهرهٔ آبی})$$

$$= \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴۰+۳۰+۴}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

روش دوم:

با استفاده از احتمال پیشامد متمم داریم:

$$P\ (A') = P\,(\text{مهرهٔ آبی نداشته باشیم}) = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۱۰}{۸۴}$$

$$P\ (A) = ۱ - P\ (A') = ۱ - \frac{۱۰}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

۲۸ گزینه ۴

پیشامد A را خارج شدن حداکثر ۲ مهرهٔ همرنگ تعریف می‌کنیم؛ بنابراین متمم آن (A') پیشامد خارج شدن سه مهرهٔ همرنگ خواهد بود.

$$P\ (A') = P\,(\text{هر سه مهره همرنگ}) = \frac{\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{۱۰+۴+۱}{۲۲۰} = \frac{۱۵}{۲۲۰}$$

بنابراین احتمال اینکه حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج‌شده، همرنگ باشند برابر است با:

$$P\ (A) = ۱ - \frac{۱۵}{۲۲۰} = \frac{۲۰۵}{۲۲۰} = \frac{۴۱}{۴۴}$$

۲۹ گزینه ۲

عددی مضرب ۴۲ است که هم بر ۶ و هم بر ۷ بخش‌پذیر باشد. اگر پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب‌شده بر ۶ را با A و بخش‌پذیر بودن آن بر ۷ را با B نشان دهیم، هدف محاسبهٔ $P\left(A\cup B\right)-P\left(A\cap B\right)$ است.

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n\left(S\right)=۳۰۰-۵۱+۱=۲۵۰$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ برابر است با:

$$n\left(A\right)=\left[\frac{۳۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۵۰}{۶}\right]=۵۰-۸=۴۲$$

بنابراین داریم:

$$P\left(A\right)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۲}{۲۵۰}$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ برابر است با:

$$n\left(B\right)=\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right]-\left[\frac{۵۰}{۷}\right]=۴۲-۷=۳۵$$

بنابراین داریم:

$$P\left(B\right)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳۵}{۲۵۰}$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۴۲ برابر $n\left(A\cap B\right)$ است:

$$n\left(A\cap B\right)=\left[\frac{۳۰۰}{۴۲}\right]-\left[\frac{۵۰}{۴۲}\right]=۷-۱=۶$$

بنابراین:

$$P\left(A\cap B\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۵۰}$$

$$\Rightarrow P\left(A\cup B\right)-P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)-P\left(A\cap B\right)$$

$$=P\left(A\right)+P\left(B\right)-۲P\left(A\cap B\right)=\frac{۴۲}{۲۵۰}+\frac{۳۵}{۲۵۰}-\frac{۱۲}{۲۵۰}=\frac{۶۵}{۲۵۰}=\frac{۱۳}{۵۰}=۰/۲۶$$

۳۰ گزینه ۳

$$P_{\text{کل}}=P\left(\text{۱ مهره قرمز، ۲ مهره سفید، ۱ مهره سیاه}\right)+P\left(\text{۱ مهره قرمز، ۳ مهره سفید}\right)$$

$$=\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۴}{۴}}+\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۴}{۴}}=\frac{۲\times\frac{۷\times۶}{۲}\times۵+۲\times\frac{۷!}{۳!\times۴!}}{\frac{۱۴!}{۴!\times۱۰!}}$$

$$=\frac{۷\times۶\times۵+۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲}}{\frac{۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱}{۴\times۳\times۲}}$$

$$P_{\text{کل}}=\frac{۲۱۰+۷۰}{۷\times۱۳\times۱۱}=\frac{۴۰}{۱۳\times۱۱}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

۳۱ گزینه ۳

گام اول

به طور کلی $۱۰ = ۵ + ۲ + ۳$ مهره در جعبه وجود دارد که دو تا از آن بیرون می‌آوریم. همرنگ بودن دو مهره یعنی یا هر دو سفید، یا هر دو سیاه و یا هر دو قرمز باشند. احتمال همرنگ نبودن را خواسته‌اند پس می‌توان از احتمال پیشامد متمم استفاده کرد.

گام دوم

پیشامد متمم به صورت احتمال همرنگ بودن دو مهره خواهد بود، یعنی:

$$P\left(\text{همرنگ بودن}\right) = P\left(\text{هر دو سفید}\right) + P\left(\text{هردو سیاه}\right) + P\left(\text{هردو قرمز}\right)$$
$$= \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۳}{۴۵} + \frac{۱}{۴۵} + \frac{۱۰}{۴۵} = \frac{۱۴}{۴۵}$$

$$P\left(\text{غیرهمرنگ بودن}\right) = ۱ - P\left(\text{دو مهره همرنگ}\right) = ۱ - \frac{۱۴}{۴۵} = \frac{۳۱}{۴۵}$$

۳۲ گزینه ۳

گام اول

از میان ۳ مهرهٔ انتخاب‌شده، فقط یکی سفید است؛ یعنی یک مهره از بین ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهره از بین مهره‌های سیاه و قرمز انتخاب شود (پیشامد A).

گام دوم

انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره: $\binom{۹}{۳}$

انتخاب یک مهره از بین ۴ مهرهٔ سفید: $\binom{۴}{۱}$

انتخاب دو مهره از مهره‌های سیاه و قرمز: $\binom{۵}{۲}$

$$n(A) = \binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰$$

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶ \times ۶!} = ۸۴$$

بنابراین احتمال اینکه فقط یکی از مهره‌ها سفید باشد برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴۰}{۸۴} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

۳۳ گزینه ۲

پیشامد A را رو شدن دو عدد متوالی تعریف می‌کنیم، تمام حالت‌های ممکن به‌صورت زیر است:

$$A = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۱۰ و تعداد کل حالت‌ها برابر ۳۶ است؛ بنابراین احتمال پیشامد A برابر می‌شود با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

۳۴ گزینه ۲

$$n(A) = \{(۱,۲,۳)(۲,۳,۴)(۱,۳,۵)(۳,۴,۵)\} \Rightarrow n(A) = ۴\ ,\ \ n(S) = \binom{۵}{۳} = ۱۰$$
$$\Rightarrow P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۰}$$

۳۵ گزینه ۳

$$P(\text{دو مهرهٔ همرنگ}) = P(\text{دو مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ غیر از سفید}) + P(\text{دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ غیر از سیاه}) + P(\text{دو مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ غیر از قرمز})$$

$$= \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱} + \binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۵۰ + ۲۱ + ۸}{۱۲۰} = \frac{۷۹}{۱۲۰}$$

۳۶ گزینه ۲

گام اول

برای اینکه رنگ مهره‌های خارج‌شده متفاوت باشد باید از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۳! \times ۹!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۶} = ۲۲۰$$

$$n(A) = \binom{۵}{۱} \times \binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶۰}{۲۲۰} = \frac{۶}{۲۲} = \frac{۳}{۱۱}$$

۳۷ گزینه ۲

برای اینکه مجموع مضرب ۳ باشد، باید ۳، ۶، ۹ یا ۱۲ باشد.

مجموع	حالت‌ها
۳	(۱, ۲), (۲, ۱)
۶	(۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳), (۴, ۲), (۵, ۱)
۹	(۳, ۶), (۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳)
۱۲	(۶, ۶)

پس در کل ۱۲ حالت داریم که احتمال آن برابر با $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۶^۲} = \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$ است.

۳۸ گزینه ۱

مجموع باید ۴، ۸ یا ۱۲ باشد:

مجموع ۴ : (۱, ۳), (۲, ۲), (۳, ۱)

مجموع ۸ : (۲, ۶), (۳, ۵), (۴, ۴), (۵, ۳), (۶, ۲)

مجموع ۱۲ : (۶, ۶)

$$P(A) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

۳۹ گزینه ۴

اگر مهره‌ای را از ظرف آخر برداریم به‌احتمال $\frac{۷}{۱۲}$ متعلق به ظرف اول است. پس با قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{مهره سفید}) \begin{cases} \text{مهره از ظرف اول} \Rightarrow \frac{۷}{۱۲} \xrightarrow{\text{احتمال سفید بودن}} \frac{۶}{۲۴} \\ \text{مهره از ظرف دوم} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲} \xrightarrow{\text{احتمال سفید بودن}} \frac{۳}{۱۸} \end{cases} \Rightarrow P(\text{مهره سفید}) = \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۶}{۲۴} + \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۸} = \frac{۳۱}{۱۴۴}$$

۴۰ گزینه ۱

احتمال خواسته‌شده را به‌صورت زیر مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

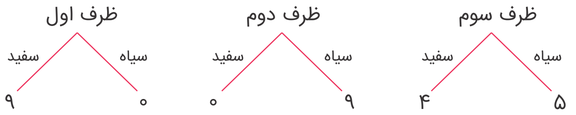
$$P(A) = \text{احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید} \times \text{اگر مهرهٔ خارج‌شده از ظرف اول سفید باشد}$$
$$+ \text{احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید} \times \text{اگر مهره خارج‌شده از ظرف اول سیاه باشد}$$

$$P(A) = \frac{6}{9} \times \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{3}{9} \times \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{10+25}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{6+24}{45} = \frac{2 \times 35 + 1 \times 30}{3 \times 45} = \frac{70+30}{3 \times 45} = \frac{100}{3 \times 45} = \frac{20}{27}$$

۴۱ گزینه ۲

شکل نمودار درختی مسئله به‌صورت زیر است:



احتمال خواسته‌شده عبارت است از:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{0}{\binom{9}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{9}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}}$$

$$= 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{10+20}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{30}{36} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{11}{6} = \frac{11}{18}$$

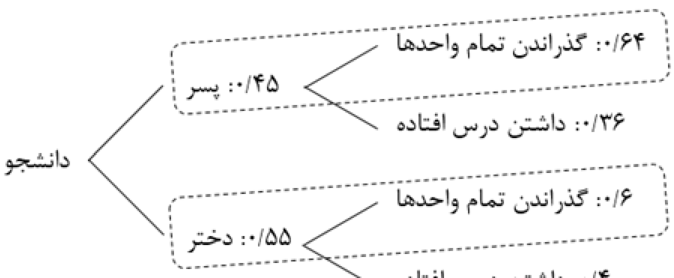
۴۲ گزینه ۲

گام اول

هر دانشجوی سال اول با احتمال ۰/۵۵ دختر است و با احتمال ۰/۴۵ پسر است. هر دانشجوی دختر با احتمال ۰/۶ تمام واحدهای درسی خود را گذرانده و با احتمال ۰/۶ درس افتاده دارد. همچنین هر دانشجوی پسر با احتمال ۰/۶۴ تمام واحدهای درسی خود را گذرانده و با احتمال ۰/۳۶ درس افتاده دارد.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی می‌توان احتمال این‌که هر دانشجو تمام واحد درسی خود را گذرانده باشد، را حساب کرد:



$$P(\text{گذراندن تمام واحدها}) = P(\text{پسر و گذراندن تمام واحدها}) + P(\text{دختر و گذراندن تمام واحدها})$$

$$= (0/45 \times 0/64) + (0/55 \times 0/6) = 0/618$$

بنابراین ۶۱/۸ درصد از دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند.

۴۳

گزینه ۱

گام اول

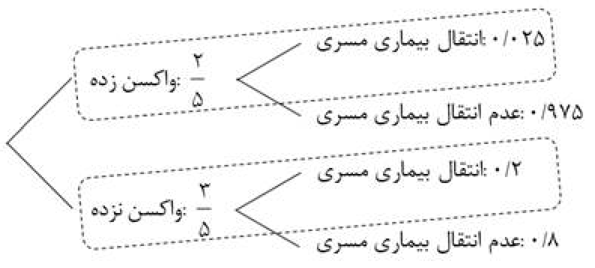
الف) هر یک از کارگران کارگاه می‌توانند واکسن زده باشند یا واکسن نزده باشند. احتمال این‌که کارگری واکسن زده باشد $\frac{۲}{۵}$ و احتمال این‌که واکسن نزده باشد $۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$ است.

ب) هر فرد واکسن زده با احتمال $۰/۰۲۵$ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $۰/۹۷۵ = ۰/۰۲۵ - ۱$ بیمار نمی‌شود.

ج) هر فردی که واکسن نزده باشد با احتمال $۰/۲$ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $۰/۸ = ۰/۲ - ۱$ بیمار نمی‌شود.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال این‌که یک کارگر به بیماری مسری مبتلا شود را محاسبه می‌کنیم.



$$P\,(\text{انتقال بیماری به کارگر}) = P\,(\text{انتقال به واکسن زده}) + P\,(\text{انتقال به واکسن نزده})$$

$$= \left(\frac{۲}{۵} \times ۰/۰۲۵\right) + \left(\frac{۳}{۵} \times ۰/۲\right) = ۰/۰۱ + ۰/۱۲ = ۰/۱۳$$

۴۴

گزینه ۲

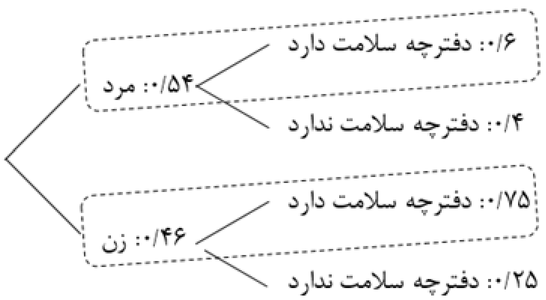
گام اول

فرد انتخاب شده با احتمال $۰/۵۴$ مرد و با احتمال $۰/۴۶$ زن است.

هر مرد با احتمال $۰/۶$ دفترچه دارد و با احتمال $۰/۴ = ۰/۶ - ۱$ دفترچه ندارد. همچنین هر زن با احتمال $۰/۷۵$ دفترچه دارد و با احتمال $۰/۲۵$ دفترچه ندارد.

گام دوم

با رسم یک نمودار درختی می‌توان احتمال دفترچه‌دار بودن فرد انتخاب شده را محاسبه کرد.



حالت مطلوب می‌تواند به صورت مردی با دفترچه باشد یا یک زن با دفترچه، پس:

$$P\,(\text{دفترچه دار بودن}) = P\,(\text{مرد با دفترچه}) + P\,(\text{زن با دفترچه})$$

$$= (۰/۵۴ \times ۰/۶) + (۰/۴۶ \times ۰/۷۵) = ۰/۳۲۴ + ۰/۳۴۵ = ۰/۶۶۹$$

۴۵ گزینه ۳

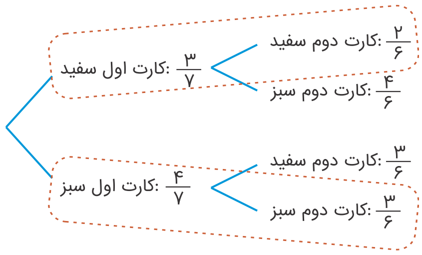
گام اول

کارت اول می‌تواند سفید یا سبز باشد و کارت دوم هم می‌تواند سفید یا سبز باشد. حالت دلخواه همرنگ بودن دو کارت است یعنی هر دو سبز یا هر دو سفید. دقت کنید که کارت‌ها بدون جای‌گذاری بیرون آورده می‌شوند و کل کارت‌های موجود برابر است با: $۳+۴=۷$

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال همرنگ بودن دو کارت را محاسبه می‌کنیم.

$$P(\text{همرنگ بودن}) = P(\text{هردو سفید}) + P(\text{هردو سبز}) = \left(\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}\right)+\left(\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}\right)=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۷}=\frac{۳}{۷}$$



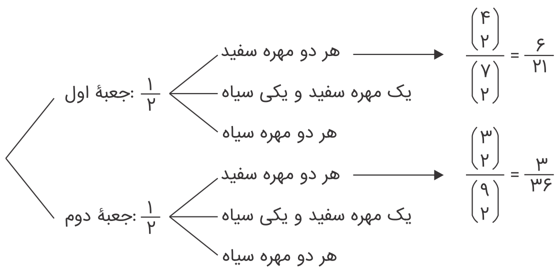
۴۶ گزینه ۱

گام اول

الف) احتمال انتخاب هر یک از جعبه‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

ب) احتمال سفید بودن دو مهره خارج شده از هر یک از جعبه‌ها را تعیین کرده و با استفاده از نمودار درختی احتمال کل را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

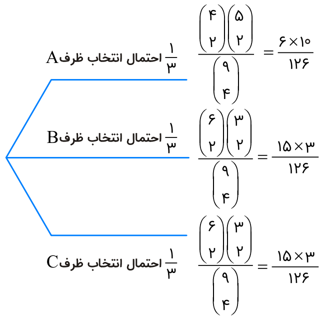


$$P(\text{هر دو مهره سفید}) = P(\text{جعبهٔ اول و سفید}) + P(\text{جعبهٔ دوم و سفید})$$

$$=\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۲۱}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۳۶}\right)=\frac{۳۱}{۱۶۸}$$

۴۷ گزینه ۱

دقت کنید که چون می‌خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهرهٔ انتخابی سفید باشد بنابراین باید ۲ مهرهٔ دیگر سیاه باشند و چون سه ظرف داریم، احتمال انتخاب هریک از ۳ ظرف $\frac{۱}{۳}$ است. احتمال آنکه از هر ظرف ۲ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ سفید خارج شود را پیدا می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(E) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۶۰}{۱۲۶}+\frac{۴۵}{۱۲۶}+\frac{۴۵}{۱۲۶}\right) = \frac{۱}{۳}\times\frac{۱۵۰}{۱۲۶} = \frac{۵۰}{۱۲۶} = \frac{۲۵}{۶۳}$$

توجه کنید:

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \binom{۶}{۲} = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵ \\ \binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲} = ۱۰ \end{cases}$$

۴۸ گزینه ۳

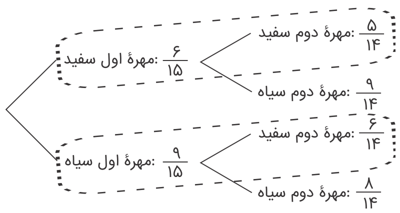
گام اول

الف) مهره اول خارج شده می‌تواند سفید یا سیاه باشد. احتمال سفیدبودن مهرهٔ دوم بر اساس حالت مهرهٔ اول قابل محاسبه است.

ب) از نگاهی دیگر، چون رنگ مهرهٔ اول را نمی‌دانیم فرض می‌کنیم هنوز مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفیدبودن مهرهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:



بنابراین داریم:

$$P(\text{دو مهرهٔ سفید}) = \left(\frac{۶}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۴}\right) + \left(\frac{۹}{۱۵}\times\frac{۶}{۱۴}\right) = \frac{۳۰+۵۴}{۲۱۰} = \frac{۸۴}{۲۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

روش دوم:

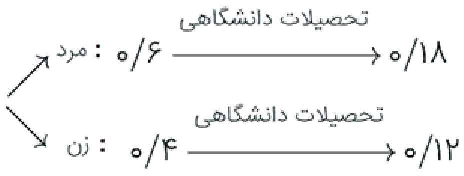
بدون توجه به رنگ مهرهٔ اول و با فرض اینکه هنوز مهره‌ای خارج نشده، احتمال سفیدبودن رنگ مهرهٔ دوم برابر $\frac{۲}{۵}$ است.

۴۹ گزینه ۲

گام اول

فرد تحصیل‌کرده می‌تواند زن با تحصیلات دانشگاهی یا مرد با تحصیلات دانشگاهی باشد. برای حل سؤال از قانون احتمال کل (نمودار درختی) استفاده می‌کنیم.

گام دوم



$$P\,(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = (۰/۶ \times ۰/۱۸) + (۰/۴ \times ۰/۱۲) = ۰/۱۰۸ + ۰/۰۴۸$$
$$= ۰/۱۵۶ \Rightarrow P\,(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = \%۱۵/۶$$

۵۰ گزینه ۲

راه‌حل اول:

باتوجه‌به آنکه رنگ مهرهٔ اولی که از جعبه خارج شده، مشاهده نشده است، مثل این است که مهره‌ای خارج نشده، پس احتمال خروج مهرهٔ سفید در انتخاب دوم $\frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$ است.

راه‌حل دوم:

پیشامد سفیدبودن کارت اول: B

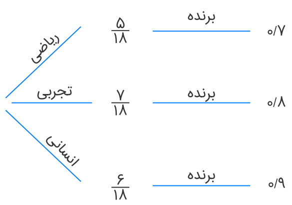
پیشامد سیاه‌بودن کارت اول: B'

پیشامد سفیدبودن کارت دوم: A

$$P\,(A) = P\,(B)P\,(A|B) + P\,(B')P\,(A|B') = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۹}$$
$$= \frac{۵۴}{۹۰} = ۰/۶$$

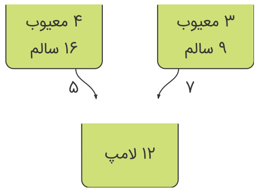
۵۱ گزینه ۲

فرض کنید A پیشامد برنده‌شدن بهروز باشد، پس:



$$P\,(A) = \frac{۵}{۱۸} \times ۰/۷ + \frac{۷}{۱۸} \times ۰/۸ + \frac{۶}{۱۸} \times ۰/۹$$
$$= \frac{۳۵}{۱۸۰} + \frac{۵۶}{۱۸۰} + \frac{۵۴}{۱۸۰} = \frac{۱۴۵}{۱۸۰} = \frac{۲۹}{۳۶}$$

۵۲ گزینه ۲



در جعبهٔ جدید در کل ۱۲ لامپ وجود دارد. حال اگر لامپی از جعبهٔ جدید انتخاب کنیم، احتمال اینکه به ترتیب متعلق به جعبهٔ اول و دوم باشد برابر $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۲}$ است. همچنین احتمال معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ اول و دوم برابر $\frac{۴}{۲۰}$ و $\frac{۳}{۱۲}$ است. فرض کنید A پیشامد معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ جدید باشد، پس:

$$P(A) = \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۲۰} + \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۷}{۴۸} = \frac{۱۱}{۴۸}$$

۵۳ گزینه ۲

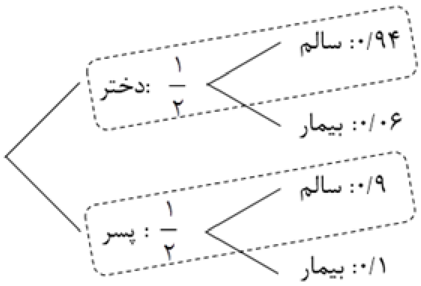
گام اول

الف) هر فرزند پسر با احتمال ۰/۱ بیماری ارثی از والدینش دریافت می‌کند و با احتمال ۰/۹ دریافت نمی‌کند و سالم است. به همین ترتیب هر فرزند دختر با احتمال ۰/۰۶ بیماری ارثی دریافت می‌کند و با احتمال ۰/۹۴ دریافت نمی‌کند و سالم است.

ب) به کلمه ندارد دقت کنید. احتمال سالم بودن فرزند به دنیا آمده را باید حساب کرد.

گام دوم

هر فرزند به دنیا آمده با احتمال $\frac{۱}{۲}$ دختر و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ پسر است. دو حالت مطلوب وجود دارد: فرزند پسر و سالم باشد یا فرزند دختر و سالم باشد. با استفاده از نمودار درختی احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.



$$P(\text{سالم بودن فرزند}) = P(\text{دختر و سالم}) + P(\text{پسر و سالم}) = \left(\frac{۱}{۲} \times ۰/۹۴\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times ۰/۹\right) = ۰/۴۷ + ۰/۴۵ = ۰/۹۲ = \%۹۲$$

۵۴ گزینه ۴

$$\text{میانگین داده‌ها با حذف داده‌های ناجور}:\ \bar{x} = \frac{۲۵ \times ۳۰ - (۵۰ + ۴۵ + ۱۵ + ۱۰)}{۲۵ - ۴} = \frac{۷۵۰ - ۱۲۰}{۲۱} = \frac{۶۳۰}{۲۱} = ۳۰$$

با حذف داده‌ها، میانگین تغییری نکرد، بنابراین برای محاسبهٔ واریانس داده‌های باقی‌مانده، کافی است جملات مربوط به داده‌های ناجور را از واریانس حذف کنیم:

$$\sigma^۲ = (۸)^۲ = ۶۴ \Rightarrow (\sigma')^۲ = \frac{۶۴ \times ۲۵ - [(۱۰ - ۳۰)^۲ + (۱۵ - ۳۰)^۲ + (۴۵ - ۳۰)^۲ + (۵۰ - ۳۰)^۲]}{۲۵ - ۴}$$
$$= \frac{۱۶۰۰ - ۱۲۵۰}{۲۱} = \frac{۳۵۰}{۲۱} = ۱۶/۶۶$$

۵۵ **گزینه ۴**

انحراف معیار و میانگین داده‌های اولیه را به ترتیب با σ_x و $\bar{x}$ نشان می‌دهیم، در این صورت ضریب تغییرات این داده‌ها برابر می‌شود با:

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad (*)$$

برای محاسبهٔ ضریب تغییرات داده‌های جدید داریم:

$$CV_{(۲x+۳)} = \frac{\sigma_{(۲x+۳)}}{\overline{۲x+۳}}$$

می‌دانیم $\begin{cases} \overline{ax+b} = a\bar{x}+b \\ \sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x \end{cases}$، پس:

$$CV_{(۲x+۳)} = \frac{۲\sigma_x}{۲\bar{x}+۳} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{CV_{(۲x+۳)}}{CV_x} = \frac{\frac{۲\sigma_x}{۲\bar{x}+۳}}{\frac{\sigma_x}{\bar{x}}} = \frac{۲\bar{x}}{۲\bar{x}+۳}$$

باتوجه‌به فرض سؤال $\bar{x} = ۱۲$، پس نسبت ضریب تغییرات داده‌های جدید به ضریب تغییرات داده‌های اولیه، برابر است با:

$$\frac{۲ \times ۱۲}{۲ \times ۱۲ + ۳} = \frac{۲۴}{۲۷} = \frac{۸}{۹}$$

۵۶ **گزینه ۳**

رابطهٔ احتمال اجتماع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow ۰/۶ = P(A) + P(B) - ۰/۱ \Rightarrow P(A) + P(B) = ۰/۷$$

همچنین چون A و B مستقل‌اند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A).P(B) = ۰/۱ \Rightarrow P(A) = \frac{۰/۱}{P(B)}$$

بنابراین:

$$P(A) + P(B) = ۰/۷ \Rightarrow \frac{۰/۱}{P(B)} + P(B) = ۰/۷ \Rightarrow P^۲(B) - ۰/۷P(B) + ۰/۱ = ۰$$
$$P(B) = \frac{۰/۷ \pm \sqrt{۰/۴۹ - ۰/۴}}{۲} = \frac{۰/۷ \pm ۰/۳}{۲} \Rightarrow P(B) = ۰/۵ \ , \ ۰/۲$$

باتوجه‌به اینکه $P(B') > P(B)$ است، پس $P(B) = ۰/۲$.

۵۷ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{5 + 7 + 3 \times 8 + 2 \times 10}{7} = \frac{12 + 24 + 20}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

واریانس:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(5-8)^2 + (7-8)^2 + 3 \times (8-8)^2 + 2 \times (10-8)^2}{7}$$

$$= \frac{9 + 1 + 0 + 8}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} : \sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

حال ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} = \frac{3}{8} \times 0/534 \simeq 0/20$$

راه‌حل دوم: برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۸ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$-3, -1, 0, 0, 0, 2, 2$$

$$\overline{x}_{\text{جدید}} = \frac{2 + 2 - 1 - 3}{7} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{2 \times 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}{7} = \frac{18}{7} \quad \Rightarrow \sigma = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{جدید}} + 8 = 0 + 8 = 8$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} \simeq 0/20$$

۵۸ گزینه ۲

برای محاسبهٔ $P(B|A')$ به $P(B \cap A')$ و $P(A')$ نیاز است.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0/4 = 0/6$$

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0/3 - P(A).P(B|A)$$
$$= 0/3 - 0/4 \times 0/25 = 0/3 - 0/1 = 0/2$$

پس:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3}$$

۵۹ گزینه ۲

راه‌حل اول:

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{5 \times 10 + 4 \times 11 + 7 \times 14}{16} = \frac{50 + 44 + 98}{16} = \frac{192}{16} = 12$$

سپس انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{واریانس } \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$
$$= \frac{5 \times (10 - 12)^2 + 4 \times (11 - 12)^2 + 7 \times (14 - 12)^2}{16}$$
$$= \frac{5 \times 4 + 4 \times 1 + 7 \times 4}{16} = \frac{20 + 4 + 28}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$
$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

حالت ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{24} \simeq 0/15$$

راه‌حل دوم:

برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۱۰ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$\text{داده‌ها}: \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{۵ تا}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{۴ تا}}, \underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{\text{۷ تا}}$$
$$\bar{x}_{\text{کوچک}} = \frac{0 + 4(1) + 7(4)}{16} = \frac{32}{16} = 2$$
$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$
$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$
$$\bar{x}_{\text{اصلی}} = \bar{x}_{\text{کوچک}} + 10 = 2 + 10 = 12$$
$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} \simeq 0/15$$

۶۰ گزینه ۳

$$\text{واریانس} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 9 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{18} \Rightarrow \sum_{i=1}^{18} (x_i - 25)^2 = 18 \times 9 = 162$$

ازآنجاکه میانگین سه دادهٔ آماری اضافه‌شده برابر ۲۵ می‌باشد $\left(\frac{20 + 27 + 28}{3} = 25\right)$، بنابراین میانگین داده‌های جدید همان ۲۵ است.

$$\sigma'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{21} (x_i - 25)^2}{21} = \frac{\sum_{i=1}^{18} (x_i - 25)^2 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2}{21}$$
$$= \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} \simeq 9/52$$

۶۱ گزینه ۴

چون واریانس برابر صفر است نتیجه می‌گیریم تمام داده‌ها باهم برابرند و چون با افزودن ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ میانگین تغییر نمی‌کند میانگین این ۳ عدد برابر یازده دادهٔ قبلی است.

$$\bar{x}=\frac{۲۴+۱۶+۲۶}{۳}=۲۲$$

بنابراین باید انحراف معیار داده‌های زیر را حساب کنیم:

$$\underbrace{۲۲,\dots,۲۲}_{۱۱},۱۶,۲۴,۲۶,\bar{x}=۲۲$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(۲۲-۱۶)^۲+(۲۴-۲۲)^۲+(۲۶-۲۲)^۲}{۱۴}}=۲$$

۶۲ گزینه ۴

نکته: واریانس داده‌ها را می‌توان از رابطهٔ $\sigma^۲=\frac{\Sigma x_i^۲}{n}-(\frac{\Sigma x_i}{n})^۲$ به دست آورد.

اگر طول اضلاع مربع‌ها را x_i درنظر بگیریم، باتوجه‌به فرض سؤال داریم:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=۰/۲\xrightarrow{\bar{x}=۱۵}\sigma=۱۵\times۰/۲=۳\Rightarrow۹=\frac{\Sigma x_i^۲}{n}-۱۵^۲\Rightarrow\frac{\Sigma x_i^۲}{n}=۲۳۴$$

ازآنجاکه مساحت مربع‌ها به‌صورت $x_i^۲$ است، پس میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۲۳۴ است.

۶۳ گزینه ۳

گام اول

الف) فضای نمونه‌ای مربوط به یک خانواده دو فرزندی چهار حالت دارد. اما با توجه به اینکه می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، حالتی که هر دو فرزند دختر باشند را حذف می‌کنیم.

ب) با توجه به فضای نمونه‌ای جدید، احتمال پیشامد خواسته شده را حساب می‌کنیم.

گام دوم

$$S=\{(پ,پ),(پ,د),(د,پ)\}\ ,\ n(S)=۳$$

از میان ۳ حالت نوشته شده فقط ۲ حالت مطلوب ماست و حالتی که هر دو فرزند پسر باشد قابل قبول نیست. بنابراین احتمال این‌که این خانواده دارای فرزند دختر باشد برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۶۴ گزینه ۲

داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$۱۰/۶,۱۰/۶,۱۱/۲,۱۱/۵,۱۱/۹,۱۲/۳,۱۲/۷,۱۲/۸,۱۳/۵,۳۰/۲$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، پس میانه $(Q_۲)$ برابر میانگین دادهٔ پنجم و ششم است.

$$\text{(میانه)چارک دوم}\ Q_۲=\frac{۱۱/۹+۱۲/۳}{۲}=۱۲/۱$$

۵ عدد قبل از میانه و ۵ عدد بعد از آن قرار دارند، بنابراین:

$$Q_۱=۱۱/۲\ ,\ Q_۳=۱۲/۸$$

پس:

$$\frac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱}=\frac{۱۱/۲+۱۲/۸-۲(۱۲/۱)}{۱۲/۸-۱۱/۲}=\frac{-۰/۲}{۱/۶}=-۰/۱۲۵$$

۶۵ گزینه ۱

احتمال قبولی در آزمون اول را $P(A)$ و احتمال قبولی در آزمون دوم را $P(B)$ فرض می‌کنیم.

$$P(A)=0/7\ ,\ P(B)=0/6\ ,\ P(B|A)=0/8$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow P(B\cap A)=0/7\times 0/8=0/56$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7+0/6-0/56$$
$$=1/3-0/56=0/74$$

۶۶ گزینه ۲

در گروه اول $\overline{X}_1=80$ و $\sigma_1=5$ و در گروه دوم $\overline{X}_2=72$ و $\sigma_2=4$ است. برای دو گروه، ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_1=\frac{\sigma_1}{\overline{X}_1}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$$

$$CV_2=\frac{\sigma_2}{\overline{X}_2}=\frac{4}{72}=\frac{1}{18}$$

چون $CV_2<CV_1$ است، پس گروه دوم بهتر است.

۶۷ گزینه ۴

گام اول

الف) در چنین تست‌های احتمال شرطی بهتر است ابتدا فضای نمونه‌ای جدید را با توجه به شرط داده شده تعریف کنیم. می‌دانیم در یک خانوادهٔ سه فرزندی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $2^3=8$ است. چون حداقل یکی از فرزندان حتماً دختر است پس حالتی که هر سه فرزند پسر باشند از فضای نمونه‌ای حذف می‌شود.

ب) پیشامد مطلوب را با توجه به فضای نمونه‌ای جدید تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$n(S)=8-1=7$$

اگر پیشامد داشتن حداقل دو فرزند دختر را با A نشان دهیم، داریم:

$$A=\{(\text{د},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{د}),(\text{پ},\text{د},\text{د}),(\text{د},\text{د},\text{د})\}$$

$$n(A)=4$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{7}$$

۶۸ گزینه ۴

گام اول

الف) با توجه به این‌که مشخص شده فرزند اول خانواده دختر است، اعضای فضای نمونه‌ای را در حالت جدید حساب کرده و احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم.

ب) چون گفته شده لااقل یکی از فرزندان پسر باشد، پس از دو فرزند باقی مانده یکی یا هر دو باید پسر باشد.

گام دوم

$$S=\{(\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{د}),(\text{د},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{د},\text{د})\}$$

$$n(S)=4$$

$$A=\{(\text{د},\text{پ},\text{د}),(\text{د},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{پ})\}$$

$$n(A)=3$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{4}$$

۶۹ گزینه ۴

گام اول

الف) به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. قرار است اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد پس موش دوم می‌تواند سفید یا سیاه باشد. یعنی دو حالت داریم.

ب) این دو حالت هیچ اشتراکی با هم ندارند پس احتمال کل برابر مجموع احتمال‌های دو حالت تعریف می‌شود.

گام دوم

حالت اول: موش اول سفید، موش دوم سفید، موش سوم سیاه

$$P_۱ = \frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۶۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۲۸}$$

حالت دوم: موش اول سفید، موش دوم سیاه، موش سوم سیاه

$$P_۲ = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۳۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۵۶}$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P = P_۱ + P_۲ = \frac{۵}{۲۸} + \frac{۵}{۵۶} = \frac{۱۰ + ۵}{۵۶} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

۷۰ گزینه ۲

گام اول

با این شرط که می‌دانیم یکی از فرزندان خانوادهٔ سه فرزندی پسر است، فضای نمونه‌ای جدید را تعریف کرده و پیشامد مطلوب را از میان آن مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(\text{پ, د, د}), (\text{د, پ, د}), (\text{د, د, پ}), (\text{پ, پ, د}), (\text{پ, د, پ}), (\text{د, پ, پ}), (\text{پ, پ, پ})\}$$

در واقع حالتی که تمام فرزندان دختر باشد، حذف شده است. پس در حالت جدید داریم:

$$n(S) = ۷$$

پیشامد A که داشتن دو دختر از میان سه فرزند را بیان می‌کند، ۳ عضو دارد.

$$A = \{(\text{پ, د, د}), (\text{د, پ, د}), (\text{د, د, پ})\}$$

$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۷}$$

۷۱ گزینه ۳

ابتدا از همهٔ داده‌ها، ۱۱ واحد کم می‌کنیم. با انجام این تغییر، واریانس داده‌ها تغییری نمی‌کند؛ بنابراین به جدول زیر می‌رسیم که با استفاده از رابطهٔ $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$، میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

مرکز دسته (x_i)	۱	۴	۷	۱۰	۱۳
فراوانی (f_i)	۴	۳	۹	۷	۲

$$\bar{x} = \frac{۴ \times ۱ + ۳ \times ۴ + ۹ \times ۷ + ۷ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۳}{۴ + ۳ + ۹ + ۷ + ۲} = \frac{۱۷۵}{۲۵} = ۷$$

$$\text{واریانس}: \sigma^۲ = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^۲}{\Sigma f_i} = \frac{۴(۱-۷)^۲ + ۳(۴-۷)^۲ + ۹(۷-۷)^۲ + ۷(۱۰-۷)^۲ + ۲(۱۳-۷)^۲}{۴ + ۳ + ۹ + ۷ + ۲}$$

$$= \frac{۱۴۴ + ۲۷ + ۰ + ۶۳ + ۷۲}{۲۵} = \frac{۳۰۶}{۲۵} = ۱۲/۲۴$$

۷۲ **گزینه ۴**

مجموع درصد فراوانی‌های نسبی باید برابر با ۱۰۰ درصد باشد. داریم:

$$۱۵ + ۳۰ + ۲۵ + \alpha = ۱۰۰ \Rightarrow \alpha = ۳۰ \text{ درصد}$$

اگر F_i و f_i به ترتیب فراوانی نسبی و فراوانی (مطلق) دستهٔ iام و n تعداد کل داده‌ها باشد، داریم: $F_i = \frac{f_i}{n} \Rightarrow f_i = nF_i$

$$\text{میانگین} = \frac{۱۲ \times f_۱ + ۱۵ \times f_۲ + ۱۸ \times f_۳ + ۲۱ \times f_۴}{n}$$
$$= \frac{۱۲ \times nF_۱ + ۱۵ \times nF_۲ + ۱۸ \times nF_۳ + ۲۱ \times nF_۴}{n}$$
$$\Rightarrow \text{میانگین} = ۱۲ \times F_۱ + ۱۵ \times F_۲ + ۱۸ \times F_۳ + ۲۱ \times F_۴$$
$$= ۱۲ \times ۰/۱۵ + ۱۵ \times ۰/۳ + ۱۸ \times ۰/۲۵ + ۲۱ \times ۰/۳ = ۱۷/۱$$

۷۳ **گزینه ۱**

گام اول

الف) پیشامد داشتن تحصیلات ابتدایی را با A و پیشامد داشتن مهارت قالی‌بافی را با B نشان می‌دهیم. هدف محاسبه $P(A \cup B)$ است.

ب) می‌دانیم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ج) دو پیشامد A و B مستقل‌اند پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

با محاسبه $P(A \cap B)$ می‌توان $P(A \cup B)$ را حساب کرد.

گام دوم

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۲۵ = ۰/۱۵$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۲۵ - ۰/۱۵ = ۰/۷$$

۷۴ **گزینه ۲**

ابتدا توجه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ است.

سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:

۱) در پرتاب اول، هر دو تاس زوج بیایند: $P_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

۲) در پرتاب دوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_۲ = \underbrace{(۱ - \overset{\text{هر دو زوج}}{\frac{۱}{۴}})}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب دوم}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

۳) در پرتاب سوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_۳ = \underbrace{(۱ - \overset{\text{هر دو زوج}}{\frac{۱}{۴}})}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{(۱ - \overset{\text{هر دو زوج}}{\frac{۱}{۴}})}_{\text{پرتاب دوم}} \underbrace{(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب سوم}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۶۴}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر}: P = P_۱ + P_۲ + P_۳$$

$$= \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۱۶} + \frac{۹}{۶۴} = \frac{۱۶}{۶۴} + \frac{۱۲}{۶۴} + \frac{۹}{۶۴} = \frac{۱۶ + ۱۲ + ۹}{۶۴} = \frac{۳۷}{۶۴}$$

۷۵ گزینه ۲

چون هیچ اطلاعی از رنگ مهره‌های خارج‌شده نداریم، پس می‌توانیم فرض کنیم که هیچ مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفید بودن این مهره را به دست آوریم:

$$P\,(\text{سفید بودن}) = \frac{۳}{۷}$$

۷۶ گزینه ۴

$$\sigma^۲ = \frac{\Sigma x_i^۲}{n} - \bar{x}^۲ \xrightarrow{\bar{P}=۴\bar{x},۴\bar{x}=۸۴\Rightarrow\bar{x}=۲۱} \sigma^۲ = ۴۹۰ - ۴۴۱ = ۴۹ \Rightarrow \sigma = ۷$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۷}{۲۱} = \frac{۱}{۳} \simeq ۰/۳۳$$

۷۷ گزینه ۱

برای مقایسهٔ دقت عمل دو دستگاه، باید ضریب تغییرات مربوط به دو دستگاه را به دست آوریم.

$$\text{دستگاه } A : CV_A = \frac{\sigma_A}{x_A} = \frac{۳/۶}{۱۵۰} = ۰/۰۲۴$$

$$\text{دستگاه } B : CV_B = \frac{\sigma_B}{x_B} = \frac{۳/۸۴}{۱۶۰} = ۰/۰۲۴$$

چون ضریب تغییرات دو دستگاه یکسان است؛ پس دقت عمل دو دستگاه نیز یکسان می‌باشد.

۷۸ گزینه ۲

ضریب تغییرات نمرات آزمون هر کارگری کمتر باشد به منزلهٔ آن است که دقت بیشتری دارد.

$$\bar{x}_A = \frac{۱۵+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۹}{۶} = ۱۶$$

$$\bar{x}_B = \frac{۱۶+۱۴+۱۷+۱۴+۱۷+۱۸}{۶} = ۱۶$$

$$\sigma_A^۲ = \frac{(-۱)^۲+(-۲)^۲+(-۱)^۲+۰^۲+۱^۲+۳^۲}{۶} = \frac{۸}{۳}$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{۰^۲+(-۲)^۲+۱^۲+(-۲)^۲+۱^۲+۲^۲}{۶} = \frac{۷}{۳}$$

$$\sigma_B^۲ < \sigma_A^۲ \Rightarrow \sigma_B < \sigma_A \xrightarrow{\bar{x}_A=\bar{x}_B} CV_B < CV_A$$

پس دقت عمل B بیشتر است.

۷۹ گزینه ۳

$$\text{میانگین داده‌ها} :\ \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{۷۲}{۱۲} = ۶$$

$$\text{واریانس داده‌ها} :\ \sigma^۲ = \frac{\Sigma x_i^۲}{n} - \bar{x}^۲ = \frac{۴۸۰}{۱۲} - ۳۶ = ۴$$

$$\Rightarrow \text{ضریب تغییرات داده‌ها} :\ CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۸۰ گزینه ۳

$$\sigma^۲ = \frac{\Sigma x_i^۲}{n} - \bar{x}^۲ \Rightarrow ۵ = \frac{\Sigma x_i^۲}{n} - ۱۲^۲ \Rightarrow \frac{\Sigma x_i^۲}{n} = \text{میانگین مساحت‌ها} = ۱۴۹$$

۸۱

گزینه ۱

گام اول

اگر n دادهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ داشته باشیم، ضریب تغییرات این داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

که $\bar{x}$ میانگین داده‌هاست و داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

و σ انحراف معیار داده‌هاست و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

گام دوم

با دو روش می‌توان ضریب تغییرات u_iها را محاسبه کرد.

روش اول:

$$u_i = 12x_i + 6 \Rightarrow u_i = 18, 30, 42, 54, 66$$

$$\bar{x} = \frac{18 + 30 + 42 + 54 + 66}{5} = \frac{210}{5} = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(18-42)^2 + (30-42)^2 + (42-42)^2 + (54-42)^2 + (66-42)^2}{5} = \frac{576 + 144 + 0 + 144 + 576}{5} = 288$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

بنابراین ضریب تغییرات u_iها برابر است با:

$$CV = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7} \simeq \frac{2 \times 1/4}{7} = 0/4$$

روش دوم:

نکتهٔ ۱: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه میانگین داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه میانگین داده‌ها نیز با آن عدد ثابت جمع می‌شود.

نکتهٔ ۲: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه انحراف معیار داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه انحراف معیار داده‌ها تغییری نمی‌کند.

ابتدا با استفاده از روابط گام اول، میانگین و انحراف معیار x_iها را به‌دست می‌آوریم، سپس با توجه به دو نکتهٔ بالا، میانگین و انحراف معیار u_iها و در آخر ضریب تغییرات آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = 12\bar{x} + 6 = 12\,(3) + 6 = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = 12\sigma = 12\left(\sqrt{2}\right) = 12\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} \simeq \frac{2 \times 1/4}{7} = 0/4$$

۸۲ گزینه ۲

اگر داده‌های جامعهٔ اول را با x_i و داده‌های جامعهٔ دوم را با y_i نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\sigma_1^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n_1}\Rightarrow ۱۲/۶=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{۱۲}$$
$$\Rightarrow \sum(x_i-\bar{x})^2=۱۵۱/۲$$
$$\sigma_2^2=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n_2}\Rightarrow ۷/۲=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{۲۴}$$
$$\Rightarrow \sum(y_i-\bar{y})^2=۱۷۲/۸$$

باتوجه‌به آنکه $\bar{x}=\bar{y}$، پس واریانس کل داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2}{n_1+n_2}=\frac{۳۲۴}{۳۶}=۹$$

و درنتیجه انحراف معیار داده‌ها برابر با $\sigma=۳$ است.

۸۳ گزینه ۲

مهرهٔ اول در حل مسئله تأثیری ندارد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}=\frac{\frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۱۱\times۱۰}{۲}}=\frac{۲}{۱۱}$$

۸۴ گزینه ۳

وقتی A و B باشند، A و B' نیز مستقل‌اند. پس:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۶$$
$$P(A\cap B')=P(A)P(B')=۰/۲$$
$$\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B')}=\frac{P(B)}{P(B')}=\frac{۰/۶}{۰/۲}=۳$$
$$\Rightarrow P(B)=۳P(B')\quad,\quad P(B)+P(B')=۱$$
$$\Rightarrow P(B')=\frac{۱}{۴}\quad,\quad P(B)=\frac{۳}{۴}$$

حال چون $P(A)P(B)=۰/۶$، پس $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و داریم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$
$$=\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵$$

۸۵ گزینه ۳

$$\text{ضریب تغییرات}=\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\xrightarrow[CV=۰/۲]{\bar{x}=۱۵}\sigma=۳\Rightarrow\sigma^2=۹$$

مطابق رابطهٔ واریانس داریم:

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2\xrightarrow[\bar{x}=۱۵]{x_i^2=S_i}۹+۱۵^2=\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}=\bar{S}\Rightarrow\bar{S}=۲۳۴$$

۸۶ گزینه ۴

گام اول

الف) ضریب تغییرات از رابطهٔ $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ به دست می‌آید که σ انحراف معیار و $\bar{x}$ میانگین داده‌ها است. می‌دانیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

ب) داریم:

$$n = 30$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 240$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{30}^2 = 2190$$

گام دوم

با توجه به اطلاعات موجود، ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌ها را به دست آوریم:

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{30}^2}{30} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{2190}{30} - 8^2 = 73 - 64 = 9 \Rightarrow \sigma = \sqrt{9} = 3$$

پس ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0/375$$

۸۷ گزینه ۲

گام اول

برای به دست آوردن ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، ابتدا انحراف معیار طول اضلاع را با σ نشان داده و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

در این تست $\bar{x} = 8$ و $\frac{\sum x_i^2}{n} = 65/44$ است، پس σ را محاسبه کرده و با استفاده از فرمول $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$، ضریب تغییرات را مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{65/44 - 8^2} = \sqrt{65/44 - 64} = \sqrt{1/44} = 1/2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/2}{8} = 0/15$$

۸۸ گزینه ۱

گام اول: تعداد کل حالت‌های پیش‌آمده برابر است با:

$$\binom{۸}{۱} \times \binom{۵}{۱} = ۸ \times ۵ = ۴۰$$

گام دوم: حالت‌های مطلوب را می‌نویسیم:

$(۴,۵)$
$(۵,۴),(۵,۵)$
$(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵)$
$(۷,۲),(۷,۳),(۷,۴),(۷,۵)$
$(۸,۱),(۸,۲),(۸,۳),(۸,۴),(۸,۵)$

تعداد حالت‌ها برابر ۱۵تا است.

گام آخر: احتمال مطلوب ما برابر است با:

$$P(A) = \frac{۱۵}{۴۰} = \frac{۳}{۸}$$

۸۹ گزینه ۱

A: پیشامد آن است که هر دو سکه رو بیاید.
B: پیشامد آن است که تاس ۶ بیاید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۶+۴-۱}{۲۴} = \frac{۹}{۲۴} = \frac{۳}{۸}$$

نکته: دقت کنید که A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر هستند.

۹۰ گزینه ۴

گام اول: احتمال هر پیشامد را حساب می‌کنیم:

$$P(A) = \text{فقط یک سکه رو} = \binom{۳}{۱} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ = \frac{۳}{۸}$$
$$P(B) = \text{تاس زوج} = \frac{۱}{۲}$$
$$P(\text{مطلوب}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

توجه داشته باشید که دو پیشامد از هم مستقل‌اند، بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

۹۱ گزینه ۴

اگر پیشامد آنکه جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ باشد را با A و پیشامد آنکه سکه رو ظاهر شود را با B نمایش دهیم، آنگاه متمم پیشامد A آن است که جمع دو تاس کمتر یا مساوی ۴ باشد. در این صورت داریم:

$$A' = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$$
$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۶}$$

همچنین احتمال وقوع پیشامد B برابر $P(B) = \frac{۱}{۲}$ است. دو پیشامد A و B، مستقل از یکدیگرند، پس $P(A \cap B) = \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۲}$ است. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۵}{۶} + \frac{۱}{۲} - \frac{۵}{۱۲} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

۹۲ گزینه ۴

$$\sigma^{2}=\frac{\sum x_i^{2}}{n}-(\bar{x})^{2}=\frac{۳۲۵۰}{۲۵}-(\frac{۲۷۵}{۲۵})^{۲}=۱۳۰-۱۲۱=۹\Rightarrow\sigma=۳$$
$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}\ ,\ \bar{x}=\frac{۲۷۵}{۲۵}=۱۱$$
$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷$$

۹۳ گزینه ۴

راه‌حل اول:

دو پیشامد مستقل از یکدیگرند:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=۰/۹+۰/۸-۰/۹\times۰/۸=۰/۹۸$$

راه‌حل دوم:

متمم پیشامد آنکه "حداقل یک نفر عمل موفقیت‌آمیز داشته باشد" آن است که "هیچ‌کدام عمل موفقیت‌آمیز نداشته باشند"، ازآنجاکه عمل جراحی A و B مستقل از هم است، احتمال پیشامد اخیر برابر است با:

$$(۱-۰/۹)\times(۱-۰/۸)=۰/۰۲$$

پس احتمال موردنظر سؤال، برابر می‌شود با $۱-۰/۰۲=۰/۹۸$.

۹۴ گزینه ۳

راه‌حل اول:

چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{۸۴}{۱۰۰}+\frac{۷۵}{۱۰۰}-(\frac{۸۴}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰})=۰/۹۶$$

راه‌حل دوم:

هرگاه در مسائل احتمال لااقل یکی داشتیم از متمم استفاده می‌کنیم (C') : احتمال اینکه هیچ‌کدام قبول نشوند:

$$P(C')=\frac{۱۶}{۱۰۰}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow P(C)=۱-\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۹۶}{۱۰۰}$$

۹۵ گزینه ۱

$$A:۱۲\quad ۱۳\quad ۱۴\quad ۱۵\quad ۱۶\Rightarrow\bar{x}_A=۱۴$$
$$B:۱۱/۵\quad ۱۳\quad ۱۵/۵\quad ۱۶\quad ۱۶/۵\Rightarrow\bar{x}_B=۱۴/۵$$

$$\sigma^{2}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^{2}}{n}\ ,\ CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$$
$$\sigma_A^{2}=\frac{(۱۲-۱۴)^{۲}+(۱۳-۱۴)^{۲}+۰+(۱۵-۱۴)^{۲}+(۱۶-۱۴)^{۲}}{۵}=\frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$
$$\Rightarrow CV_A=\frac{\sqrt{۲}}{۱۴}$$
$$\sigma_B^{2}=\frac{(۱۱/۵-۱۴/۵)^{۲}+(۱۳-۱۴/۵)^{۲}+(۱۵/۵-۱۴/۵)^{۲}+(۱۶-۱۴/۵)^{۲}+(۱۶/۵-۱۴/۵)^{۲}}{۵}$$
$$=\frac{۹+۲/۲۵+۱+۲/۲۵+۴}{۵}=\frac{۱۸/۵}{۵}=۳/۷\Rightarrow CV_B=\frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$$

CV_A کوچک‌تر است، پس کارگر A دقت بیشتری دارد.

۹۶ گزینه ۴

$$P(A)=2P(B)=2x$$

$$P(A\cup B)=\frac{7}{9}\Rightarrow P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)}=\frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow 2x+x-2x(x)=\frac{7}{9}\Rightarrow 3x-2x^2=\frac{7}{9}$$

$$\xrightarrow{\times 9} 27x-18x^2=7\Rightarrow 18x^2-27x+7=0$$

$$\Rightarrow (3x-1)(6x-7)=0\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} & \checkmark \\ x=\frac{7}{6} & \times \end{cases}$$

بنابراین $P(A)=2x=\frac{2}{3}$ است.

۹۷ گزینه ۳

گام اول: ابتدا میانگین تمام داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{6\times 12+9\times 14}{6+9}=13/2$$

گام دوم: رابطهٔ دوم واریانس را برای هرکدام از دسته داده‌ها می‌نویسیم:

$$\sigma_1^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}_1^2\Rightarrow 6=\frac{\sum x_i^2}{6}-12^2\Rightarrow \sum x_i^2=900$$

$$\sigma_2{}^2=\frac{\sum x_i'^2}{n'}-\bar{x}_2{}^2\Rightarrow 4=\frac{\sum x_i'^2}{9}-14^2\Rightarrow \sum x_i'^2=1800$$

گام سوم: حال واریانس تمام داده‌های ترکیب‌شده را می‌یابیم:

$$\sigma^2=\frac{\sum x_i{}^2+\sum x_i'^2}{n+n'}-\bar{x}^2\Rightarrow \sigma^2=\frac{900+1800}{15}-13/2^2\Rightarrow \sigma^2=5/76$$

$$\Rightarrow \sigma=2/4$$

۹۸ گزینه ۳

$$\bar{x}=13\Rightarrow \frac{a+7+10+14+11+16+18+9+20}{9}=\frac{a+105}{9}=13$$

$$\Rightarrow a+105=117\Rightarrow a=12$$

حالا با داشتن a، داده‌ها را مرتب می‌کنیم تا میانهٔ آن‌ها را پیدا کنیم:

$$7\quad 9\quad 10\quad 11\quad \underset{\text{میانه}}{12}\quad 14\quad 16\quad 18\quad 20$$

۹۹ گزینه ۲

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow 0/06=\frac{\sigma}{25}\Rightarrow \sigma=1/5$$

$$\sigma^2=2/25=\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}-(\bar{x})^2$$

$2/25=$ میانگین مساحت‌ها -25^2

$2/25+625=627/25$: میانگین مساحت‌ها

۱۰۰ گزینه ۴

گام اول

به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. پیشامد مطلوب این است که فقط یکی از موش‌ها دیابتی باشد. پس یک موش از بین ۵ موشِ سالم و یک موش از بین ۳ موشِ دیابتی انتخاب می‌شود.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۸}{۲} = \frac{۸!}{۲!۶!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲ \times ۶!} = \frac{۵۶}{۲} = ۲۸$$

$$n(A) = \binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱} = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

۱ اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ برابر با کدام است؟

۱) x^2-x+3
۲) x^2-2x-1
۳) x^2-2x+1
۴) x^2-x+1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2\left[\frac{x}{2}\right]+1$ ، $x\in[-2,6)$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل‌شده است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳ در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|+|x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=2x^2-x-10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) فاقد نقطهٔ مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۴ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

۱) $\tan x$
۲) $\cot x$
۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$
۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵ اگر $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y=3$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ اگر $f(x) = x^۲ - x - ۲$ و $f(g(x)) = x^۲ + x - ۲$، آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $x^۲ - ۱$
۲) $x^۲ + ۱$
۳) $x^۲ - ۲x$
۴) $x^۲ + ۲x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۲x}$ باشند آنگاه حاصل $g^{-۱}(۶)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۸ اگر $f(x) = \sqrt{۲ - x - x^۲}$، مقدار $f(f(-۱))$ کدام است؟

۱) تعریف نشده
۲) صفر
۳) ۱
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۹ قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به‌طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۲
۲) $۰/۵$
۳) ۱
۴) $۱/۵$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = ۲ - |x|$، کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

۱۱ قرینهٔ خط به معادلهٔ $۳y - ۲x = ۴$ را نسبت به خط $y = x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}(۲-x)^{۲}$ حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $۴x$
۳) $۲x^{۲}$
۴) $۴x^{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۳ فرض کنید در دامنهٔ $[۰,+\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۲^{x}+\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{x}}{۲}$، مفروض باشد. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_{۲}^{(۲-\sqrt{۳})}$
۲) $\log_{۲}^{(\sqrt{۳}-۱)}$
۳) $\log_{۲}^{(۱+\sqrt{۳})}$
۴) $\log_{۲}^{(۲+\sqrt{۳})}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=۵-|x-۱|$ و $y=|x|$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۵ اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}}$، دامنه تابع $f(۳-x)$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$
۲) $[۰,۳]$
۳) $[۱,۲]$
۴) $[۱,۳]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۶ اگر $f\ (x)=x^{۲}-۲x-۳\ ;\ x\geq ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g\ (x)=\dfrac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۷ اگر عبارت $ax^{۳}+۴x^{۲}-۱۴x+۱۰-a$، بر سه‌جمله‌ای $x^{۲}-۲x+۱$، بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۸ اگر عبارت $x^{۴}+ax^{۲}-bx+۴$ بر $(x-۱)^{۲}$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

۱) -۸
۲) -۵
۳) -۲
۴) تعریف نشده

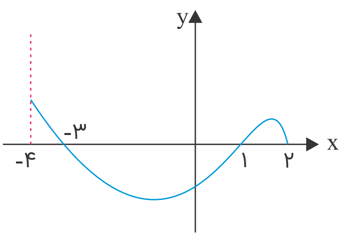
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۰ اگر عبارت $x^{۲n+۱}+۲x^{۲n}+x^{۵}-۵x^{۳}+k$، به ازای هر عدد طبیعی n بر دوجمله‌ای $x+۲$ بخش پذیر باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x^{۲}-۱$ کدام است؟

۱) $-۳x-۶$
۲) $-۲x+۱$
۳) $۲x+۴$
۴) $۳x-۴$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

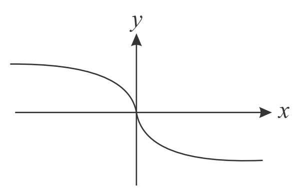
۲۱ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

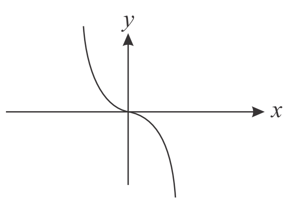


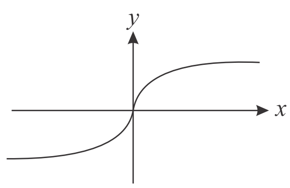
۱) $[۰,۲]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$
۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

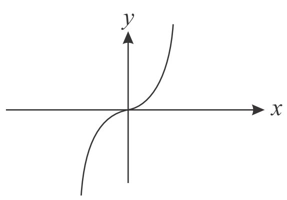
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۴

۲۲ اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۲۳ اگر $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنهٔ تابع gof، کدام است؟

۱) $[0,1]$

۲) $[-1,1]$

۳) $\mathbb{R}$

۴) $\mathbb{R}-(-1,1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$، آنگاه عدد a کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $4\sqrt{15}$

۲) $6\sqrt{7}$

۳) $4\sqrt{17}$

۴) $6\sqrt{10}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۶ اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x^2+22x+20$ باشند، ضابطهٔ تابع fog، کدام است؟

۱) $2x^2-7x+3$

۲) $2x^2-3x+7$

۳) $4x^2-2x+13$

۴) $4x^2-4x+11$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۷ رابطه $R=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z},|x|+|y|=2\}$، چند عضو زوج مرتب دارد؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۸ اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\dfrac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

$$\text{ورودی}\longrightarrow 2x-2\longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1}\longrightarrow \text{خروجی}$$

۱) $\dfrac{11}{9}$

۲) $\dfrac{7}{2}$

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۲۹ اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^{۴}x$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}\sin^{۲}۲x$
۲) $-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x$
۳) $\frac{۱}{۴}\cos^{۲}۲x$
۴) $\frac{۱}{۲}\cos^{۲}۲x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۰ اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{۱-۲x}{x+۱}$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟

۱) $[-۱,۱)$
۲) $(-۱,۱]$
۳) $[۱,+\infty)$
۴) $(-\infty,۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۱ اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$، $g(x)=x^{۲}$ و $x>۰$، آنگاه ضابطهٔ $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

۱) $x-۱$
۲) $x+۱$
۳) $x^{۲}-۱$
۴) $x^{۲}+۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۳۲ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۴x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$
۲) $R-\{۰,۸\}$
۳) $R-\{۰\}$
۴) $(۰,\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۳ اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^{۲}+۴x$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟

۱) $[۰,۲)$
۲) $[۰,۳)$
۳) $[۰,۴)$
۴) $[۱,۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|$، در یک بازه، صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

۱) $-x+۷\ ;x>۸$
۲) $\frac{۱}{۳}x+۲\ ;x>۳$
۳) $x+۷\ ;x>-۴$
۴) $\frac{۱}{۲}x-۲\ ;-۴<x<۸$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۵ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^{۲} + ۲x + ۱$، آنگاه حاصل $(gof)(۱ - \sqrt{۲}) - (fog)(۱ - \sqrt{۲})$، کدام است؟

۱) $۴(۱ - \sqrt{۲})$
۲) $۴(\sqrt{۲} - ۱)$
۳) ۴
۴) $۴\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۶ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{-۱}{۲} & , \quad x < ۰ \\ ۲x & , \quad x \geq ۰ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -۲x & , \quad x < ۰ \\ ۱ & , \quad x \geq ۰ \end{cases}$، کدام تابع در $x = ۰$ پیوسته است؟

۱) $f + g$
۲) fof
۳) gof
۴) fog

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۷ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) ۴
۳) $\frac{۱۶}{۳}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

۳۸ اگر $f(x) = ۳ + \sqrt{۲x}$ آنگاه $f(۸)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۷
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x + ۲| + |x - ۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty, -۲)$
۲) $(-\infty, ۱)$
۳) $(-۲, ۱)$
۴) $(۱, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۰ اگر $f(x) = (۲x - ۳)^{۲}$ و $g(x) = x + ۲$ نمودارهای دو تابع f و fog، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۱ اگر $f(x)=x+|x|$ و $g(x)=|x+1|+1$؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$، کدام است؟

۱) $[0,1)$

۲) $[0,2)$

۳) $[0,+\infty)$

۴) $[1,+\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر k، بازهٔ $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ است؟

۱) $(\frac{1}{3},3]$

۲) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

۳) $[-1,\frac{1}{3})$

۴) $[-1,-\frac{1}{3})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۳ اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\log_2^{(x^2+2x)}$ باشند، دامنهٔ تابع fog، کدام است؟

۱) $[-4,2]$

۲) $[-2,0]$

۳) $[-4,-1]\cup(1,2]$

۴) $[-4,-2)\cup(0,2]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۴ اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ آنگاه مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

۱) $(-4,1)$

۲) $(-3,2)$

۳) $(-2,1)$

۴) $(-1,4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۵ اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$، کدام است؟

۱) $2x$

۲) $\frac{2}{x}$

۳) x^2-1

۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴۶ اگر $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$، تابع $g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)$ چگونه است؟

۱) ثابت

۲) همانی

۳) چندجمله‌ای

۴) یک به یک

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۷ اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x-۱$
۲) $x+۱$
۳) x
۴) $۲x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۸ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ باشند. دامنهٔ تابع fog، کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$
۲) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$
۳) $(-۲,۰)$
۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹ دو تابع f و g به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب بیان شده‌اند، در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

۱) $f\cup g$
۲) $f\cap g$
۳) $f-g$
۴) fog

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۰ اگر $g(x)=۲x-۳$ و $(fog)(x)=۴(x^۲-۴x+۵)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^۲-۴x+۳$
۲) $x^۲-۴x+۵$
۳) $x^۲-۲x+۵$
۴) $x^۲-۲x+۳$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۵۱ اگر $f(x-۳)=x^۲-۴x+۵$ آنگاه $f(۱-x)$ کدام است؟

۱) $x^۲+۱$
۲) $x^۲+۳$
۳) $x^۲+۴x+۵$
۴) $x^۲-۴x+۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۵۲ اگر $f(x)=\frac{x}{۲-x}$ و $gof(x)=\frac{۱}{۲}x$ ضابطهٔ تابع g برابر کدام است؟

۱) $\frac{x}{x+۱}$
۲) $\frac{x-۱}{x}$
۳) $\frac{x}{x-۱}$
۴) $\frac{x+۱}{x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۵۳ اگر $g(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۸x^۲+۶x+۵$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $۲x^۲+۳x+۱$

۲) $۲x^۲-۲x+۳$

۳) $۲x^۲-x+۴$

۴) $۲x^۲+x+۳$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۴ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f=\{(x,۲x-۱),x\in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۵۵ با فرض $f(x)=x^۲-۴x+۹\ ;\ x\geq ۲$ و $g(x)=\frac{۳-x}{۲}$، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$، کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۶ اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) x

۲) $-x$

۳) $-x-۱$

۴) $x+۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۷ اگر جزء صحیح $(x^۲+x)$ برابر (-۱) باشد، آنگاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟ ([ ] : جزء صحیح)

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۸ دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$

۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$

۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$

۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۹ ضابطهٔ معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ; x \neq ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \end{cases}$، به کدام صورت است؟

۱) $y = x\sqrt{|x|}\ ;\ x \in \mathbb{R}$

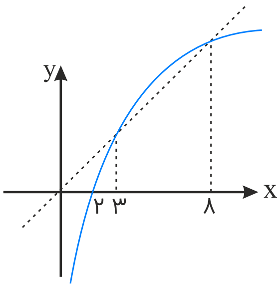
۲) $y = x\sqrt{|x|}\ ;\ x \in \mathbb{R} - \{۰\}$

۳) $y = x\,|x|\ ;\ x \in \mathbb{R} - \{۰\}$

۴) $y = x\,|x|\ ;\ x \in \mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) $[۰, ۲]$

۲) $[۲, ۳]$

۳) $[۲, ۸]$

۴) $[۳, ۸]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۶۱ ضابطهٔ وارون تابع $\begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & ; x < ۰ \end{cases}$، کدام است؟

۱) $y = x|x|\ ; x \in \mathbb{R}$

۲) $y = -x^۲\ ; x < ۰$

۳) $y = \pm x^۲\ ; x \in \mathbb{R}$

۴) $y = \pm x|x|\ ; x \in \mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۲ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{۹x + ۶}{۱ - x}$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$

۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶۳ اگر $f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴$ و $g(x) = x^۳ + x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ کدام است؟

۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۴ نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$، با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -4 و -1
۲) 4 و -1
۳) -4 و 1
۴) 4 و 1

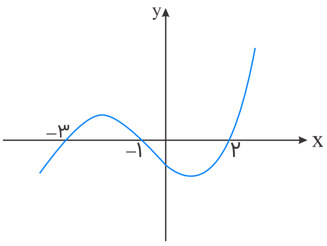
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۵ نمودار تابع $y=x^2-x-3$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی، سپس ۹ واحد به طرف yها منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

۱) $(-5,2)$
۲) $(-5,3)$
۳) $(-2,3)$
۴) $(-2,5)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۶ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-3,2]$
۲) $[-1,+\infty)$
۳) $(-\infty,-1]$
۴) $\mathbb{R}-(-3,2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $x^4-ax^3+x^2+2ax+1$ بر $x+1$ برابر ۴ است، a کدام است؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۶۸ فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$، کدام است؟

۱) ۷
۲) ۱
۳) صفر
۴) -1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶۹ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{1}{2x}$ بر دامنهٔ $(0,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{3}{2}$
۲) $-\frac{3}{4}$
۳) -1
۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷۰ اگر $f(۳x-۴) = g(x)$ و $f^{-۱}(x) = x + \sqrt{x}$ آنگاه حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۷۱ قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به‌سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

۱) $x = ۱$
۲) $x = ۱/۵$
۳) $x = ۲$
۴) $x = ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۷۲ اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^۲ - ۲| < |x+۱| - ۱$ بازهٔ (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+۴} & ; x > ۳ \\ ۲x + ۳ & ; x \leq ۳ \end{cases}$، مقدار $f(f(۵)) + f(f(۱))$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۷۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۱| - |x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty, ۲)$
۲) $(-۱, +\infty)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(۲, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۵ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x - |۴ - ۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ در آن بازه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}x + ۱ \; ; x \geq ۴$
۲) $\frac{۱}{۴}x - ۱ \; ; x \leq ۴$
۳) $\frac{۱}{۴}x - ۱ \; ; \; x \geq ۴$
۴) $\frac{۱}{۴}x + ۱ \; ; x \leq ۴$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۶ اگر $f(x) = x^۲ + x - ۲$ و $g(x) = \frac{۱}{۲}(x-۳)$، آنگاه مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار می گیرند برابر کدام بازه است؟

۱) $(-۵, ۱)$
۲) $(-۱, ۵)$
۳) $(-۲, ۱)$
۴) $(۱, ۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۷ اگر $f = \{(۱,۲), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳), (۴,۲), (۵,۶), (۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of) - f$، کدام است؟

۱) $\{-۱, ۴\}$
۲) $\{۲, ۳\}$
۳) $\{۳, ۴\}$
۴) $\{۲, -۱\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۸ رابطهٔ $R = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{N}, ۲x + y \leq ۷\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۷۹ اگر $[x - ۲] = ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-۳| - |x-۴|$ و $g(x) = ۲x^۲ + x - ۱۷$، در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) فاقد نقطهٔ مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۰ اگر خروجی ماشین شکل مقابل برای ورودی ۲، برابر ۵- باشد، A کدام است؟

خروجی $\longleftarrow \sqrt{x} - ۲x - ۴ \longleftarrow ۲x + A \longleftarrow$ ورودی

۱) $\frac{-۱۵}{۴}$
۲) ۳-
۳) ۳
۴) $\frac{۱۵}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۸۱ تابع با ضابطهٔ $y = x|x-۲|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن کدام است؟

۱) $۱ - \sqrt{۱+x}\ ; x < ۰$
۲) $۱ - \sqrt{۱-x}\ ; x < ۱$
۳) $۱ + \sqrt{۱-x}\ ; ۰ \leq x \leq ۱$
۴) $۱ - \sqrt{۱-x}\ ; ۰ < x < ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۸۲ نمودار تابع $y = |۲x - ۶| - |x + ۴| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $-x + ۶\, ;\, x < -۴$

۲) $-x + ۵\, ;\, x > ۲$

۳) $-\frac{۱}{۲}x + ۱;\ -۴ < x < ۳$

۴) $-\frac{۱}{۲}x + ۱;\ -۴ < x < ۱۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۸۳ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ;\ x \geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & ;\ x < ۰ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $-x^۲$

۲) $x^۲$

۳) $x\,|x|$

۴) $-x\,|x|$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۴ ضابطهٔ وارون تابع $y = \frac{x}{۱ + |x|}$ کدام است؟

۱) $y = \frac{x}{۱ - |x|}\ ;\ |x| < ۱$

۲) $y = \frac{۱ - |x|}{|x|}\ ;\ |x| > ۱$

۳) $y = \frac{x}{|x| - ۱}\ ;\ |x| > ۱$

۴) $y = \frac{|x| - ۱}{x}\ ;\ |x| < ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۸۵ اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد، حاصل $[x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴]$ کدام است؟

۱) -۲

۲) -۱

۳) صفر

۴) ۱

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۸۶ نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) $(۳, ۴)$

۲) $(۲, ۵)$

۳) $(۳, ۵)$

۴) $(۲, ۶)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۷ اگر $f(x) = ۲x^۲ + ۴$ و $f(g(x)) = ۴x^۲ + ۶x$، مقدار $g(-۲)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۸۸ اگر $g(x) = ۲x - ۱$ و $(fog)(x) = \dfrac{x}{x-۳}$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) -۴ ‏‏‏‏‏‏ ۲) -۲

۳) ۲ ‏‏‏‏‏‏ ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۸۹ دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^۲ + x - ۲$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -۲$ آنگاه مجموعهٔ مقادیر x کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ‏‏‏‏‏‏ ۲) $\mathbb{Z}$

۳) $\mathbb{R}$ ‏‏‏‏‏‏ ۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۹۰ مقادیر تابع با ضابطهٔ $f(x) = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۶$، در بازهٔ (a, b) بزرگ تر از $\frac{۷}{۲}$ است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

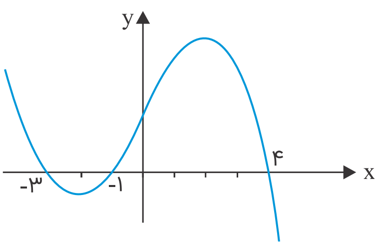
۱) ۴ ‏‏‏‏‏‏ ۲) ۵

۳) ۵/۵ ‏‏‏‏‏‏ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۹۱ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x - ۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



۱) $[-۱, ۱] \cup [۰, ۶]$

۲) $[-۳, ۱] \cup [۰, ۲]$

۳) $[-۵, -۳] \cup [-۱, ۲]$

۴) $[-۵, -۳] \cup [۰, ۲]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۹۲ به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x) = ۲x^۴ + ax^۳ + ۲x^۲ - ۳x$، بر $۲x - ۱$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x + ۲$، کدام است؟

۱) -۱۰ ‏‏‏‏‏‏ ۲) -۸

۳) ۴ ‏‏‏‏‏‏ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹۳ تابع $f = \{(۲, ۱), (۳, ۲), (۴, ۵), (۱, ۷)\}$ و $g = \{(۱, ۲), (۳, ۱), (a, ۳), (b, ۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴, ۲) \in fog$ و $(۴, ۱) \in gof$ باشند، دوتایی (a, b) کدام است؟

۱) $(۳, ۴)$ ‏‏‏‏‏‏ ۲) $(۴, ۳)$

۳) $(۴, ۵)$ ‏‏‏‏‏‏ ۴) $(۵, ۴)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۹۴ دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; \ x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ; \ x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(۳,-۲),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند.
اگر $g^{-۱}(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟

۱) ۴-
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۹۵ اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$
۲) $(-۱,۳)$
۳) $(۲,۱)$
۴) $(۲,۳)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۹۶ اگر $f\left(x\right)=۲-\left|x-۲\right|$، ضابطه تابع $f\left(f\left(x\right)\right)$ برابر کدام است؟

۱) x
۲) $۴-x$
۳) $f\left(x\right)$
۴) $۲-f\left(x\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۹۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left|x^۳\right|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟

۱) نزولی
۲) صعودی
۳) وارون‌ناپذیر
۴) یک‌به‌یک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۹۸ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند، تابع $\dfrac{g}{gof^{-۱}}$، کدام است؟

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$
۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$
۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$
۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۹۹ اگر $f(x)=۲-|x+۱|$ و $g(x)=x+|x|$، آنگاه برد تابع $(\dfrac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$
۲) $(-۱,+\infty)$
۳) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$
۴) $(۰,+\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۰ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$، تابع gof^{-1} کدام است؟

۱) $\{(۱,۳),(۰,۰)\}$
۲) $\{(۲,۴),(۳,۵)\}$
۳) $\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$
۴) $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۰۱ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۳)+g(۱۵)$، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۱
۳) ۱۰
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۲ اگر $f(x)=x-[x]$، آنگاه برد تابع $g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰]$
۲) $[۰,۱]$
۳) $\{-۱,۰\}$
۴) $\{۰,۱\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ و $۲x+۱$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲-x-۱$، کدام است؟

۱) $-x+۴$
۲) $x+۳$
۳) $۲x+۶$
۴) $۲x-۳$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x\ ;\ (x>۱)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$
۲) $۶\sqrt{۲}$
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰۵ عبارت $x^۴+۴ax^۲+۲bx+۱$ بر $x^۲-۴$ بخش‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۸}$
۲) $-\frac{۱۷}{۱۶}$
۳) $\frac{۱۷}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۵}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۰۶ اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\log(x^۲-۱۵x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog، کدام است؟

۱) $(۰,۵]\cup[۲۰,۲۵)$

۲) $[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$

۳) $(۱۵,۲۰]$

۴) $[-۵,۰)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۰۷ اگر $f(x)=x+\sqrt{x^۲+۱}$، دقیقاً ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{x})\ ,\ x\in\mathbb{R}$

۲) $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}-x)\ ,\ x\in\mathbb{R}$

۳) $\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{x})\ ,\ x>۰$

۴) $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}-x)\ ,\ x>۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۰۸ دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۱۰۹ اگر $f\ (x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $fog\ (x)=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$، مقدار $g\ (۱)$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۱۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P\ (x)$ بر $x-۲$ و $x+۳$ به ترتیب ۱ و ۴- است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P\ (x)$ بر $x^۲+x-۶$ کدام است؟

۱) $x-۱$

۲) $x+۱$

۳) $-x+۲$

۴) $۲x-۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۱۱ اگر $f(x)=-x+[x]$ و $g(x)=۲^x$، انگاه برد تابع gof کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۱]$

۲) $[\frac{۱}{۲},۱)$

۳) $(۱,۲]$

۴) $[۱,۲)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۱۲ دو تابع $f = \{(۵,۲), (۷,۳), (۱,۴), (۳,۶), (۹,۱)\}$ و $g(x) = \sqrt{۵x + ۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a) = ۸$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱۳ اگر $f(x) = |x| - x$، ضابطه تابع $fof(x)$ برابر کدام است؟

۱) x
۲) $|x|$
۳) $x + |x|$
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۱۴ فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع نمایی $y = ۲^x$ با محور yها و نقطهٔ برخورد معکوس این تابع نمایی با محور xها کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۵ ضابطهٔ معکوس تابع $y = ۲ - \sqrt{x - ۱}$، به کدام صورت است؟

۱) $y = x^۲ - ۴x + ۵\,;\ x \leq ۲$
۲) $y = -x^۲ - ۴x + ۵\,;\ x \leq ۲$
۳) $y = x^۲ - ۴x + ۵\,;\ x \geq ۱$
۴) $y = -x^۲ + ۴x - ۵\,;\ x \geq ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۱۶ اگر $f(x) = \frac{۲x - ۱}{x + ۲}$ و $g(x) = x + ۴$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)(x) = (fog)(x)$ کدام است؟

۱) ‎-۷ و ‎-۱
۲) ‎-۷ و ۱
۳) ۷ و ‎-۱
۴) ۷ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۱۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x - \frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f = (-\infty, ۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱۸ اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت زیر باشد:

$$\xrightarrow{x} \underline{f} \longrightarrow \underline{g} \longrightarrow ۲x \quad , \quad g(x) = ۳x + ۴$$

آنگاه مقدار $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱۹ برای هر عدد طبیعی $n > ۲$ حاصل $[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}]$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۲۰ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x - [x] \, ; x \in [-۲ \, , ۳)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازهٔ L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

۱) $(۴, ۱)$
۲) $(۴, \sqrt{۲})$
۳) $(۵, ۱)$
۴) $(۵, \sqrt{۲})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۲۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲[x]$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}))$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۱/۷۵
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۲۲ به ازای مقداری از a، چندجمله‌ای $f(x) = x^۴ + ax^۳ - ۸x$ بر $x + ۲$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ کدام است؟

۱) $۱ - \sqrt{۳}$
۲) $۱ - \sqrt{۵}$
۳) $-۱ - \sqrt{۳}$
۴) $-۱ - \sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۲۳ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲ - ۱$، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x - ۱) + p(۱ - x)$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x - ۲$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۲۴ اگر عبارت $\sqrt[3]{2x-x^2}+\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر x در کدام بازه است؟

۱) $[\frac{2}{3},2]$
۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$
۳) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$
۴) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۲۵ اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{1-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟

۱) $(0,+\infty)$
۲) $[0,+\infty)$
۳) $(1,+\infty)$
۴) $[1,+\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۱۲۶ دو تابع با ضابطه های $g=\{(2,5),(3,4),(1,6),(4,7),(8,1)\}$ و $f(x)=2x-5$ مفروض اند. اگر $(f^{-1}og)(a)=6$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۲۷ اگر $f\,(x)=\sqrt{x+2\,|x|}$، مقدار $f\,(f\,(-144))$ کدام است؟

۱) تعریف نشده
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۲۸ اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $[0,1)$
۲) $\{0\}$
۳) $(-1,1)$
۴) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۱۲۹ اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\sqrt{3x+4}>2|x-1|-x$ بازهٔ (a,b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$
۲) ۳
۳) $\frac{7}{2}$
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۳۰ نمودار تابع $y=[x^۲]$، روی بازهٔ $x\in(-۲\,,\,۲)$ از چند پاره خط تشکیل‌شده است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۳۱ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به‌سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) $۰\,,\,۲$
۲) $-۱\,,\,۱$
۳) $-۱\,,\,۲$
۴) $-۲\,,\,۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۳۲ اگر $f\left(x\right)=\sqrt{x+|x+۲|}$، دامنهٔ تابع $f\left(-x\right)$ کدام است؟

۱) $x\le -۱$
۲) $x\ge -۱$
۳) $x\le ۱$
۴) $x\ge ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۱۳۳ رابطهٔ $A=\left\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\right\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۳۴ تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۴ و $\frac{۱}{۹}$
۲) ۹ و $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ و ۴
۴) ۹ و ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۳۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$، کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$$
$$x=۱\Rightarrow f(-۱)=۴-۱۴+۱۳=۳$$

فقط در گزینهٔ ۴، $f(-۱)=۳$ است.

راه‌حل دوم:

$$۲x-۳=t\Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}$$
$$f(t)=۴(\frac{t+۳}{۲})^۲-۱۴(\frac{t+۳}{۲})+۱۳$$
$$=t^۲+۶t+۹-۷t-۲۱+۱۳=t^۲-t+۱$$

۲ گزینه ۲

گام اول

با توجه به ضابطهٔ تابع که به صورت $y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱$ است، محدودهٔ اولیهٔ x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$$-۲\leq x<۰,۰\leq x<۲,۲\leq x<۴,۴\leq x<۶$$

گام دوم

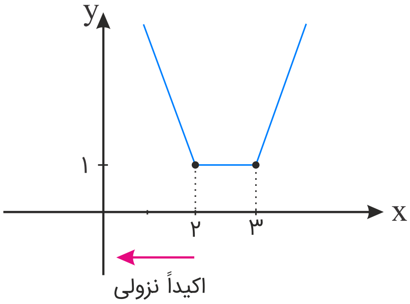
برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-۲\leq x<۰\Rightarrow -۱\leq\frac{x}{۲}<۰\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=-۱\Rightarrow y=۲(-۱)+۱=-۲+۱=-۱$$
$$۰\leq x<۲\Rightarrow ۰\leq\frac{x}{۲}<۱\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۰\Rightarrow y=۱$$
$$۲\leq x<۴\Rightarrow ۱\leq\frac{x}{۲}<۲\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۱\Rightarrow y=۲(۱)+۱=۲+۱=۳$$
$$۴\leq x<۶\Rightarrow ۲\leq\frac{x}{۲}<۳\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۲\Rightarrow y=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل‌شده است.

۳ گزینه ۱

$$x \leq ۲ \Rightarrow f(x) = -(x-۲)-(x-۳) = -۲x+۵$$
$$۲ < x < ۳ \Rightarrow f(x) = (x-۲)-(x-۳) = ۱$$
$$x \geq ۳ \Rightarrow f(x) = x-۲+x-۳ = ۲x-۵$$



بنابراین:

$$x \leq ۲ \Rightarrow -۲x+۵ = ۲x^۲ - x - ۱۰ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۱۵ = ۰$$

$$(۲x-۵)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ & \checkmark \\ x = \frac{۵}{۲} & \times \end{cases}$$

۴ گزینه ۴

ضابطهٔ $f^{-۱}(\sin x)$ از ما خواسته شده است ابتدا باید ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر x نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطهٔ $f^{-۱}(\sin x)$ را به دست آوریم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow y\sqrt{۱+x^۲} = x$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^۲(۱+x^۲) = x^۲ \Rightarrow y^۲ + y^۲x^۲ = x^۲ \Rightarrow x^۲ - y^۲x^۲ = y^۲$$
$$\Rightarrow x^۲(۱-y^۲) = y^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{y^۲}{۱-y^۲} \xrightarrow{\text{هم علامت } y,x} x = \frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}} \quad ; -۱ < x < ۱$$

ضابطهٔ $f^{-۱}(\sin x)$ را به دست می آوریم:

$$f^{-۱}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{۱-\sin^۲ x}} \xrightarrow{۱-\sin^۲ x = \cos^۲ x} f^{-۱}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^۲ x}}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(\sin x) = \frac{\sin x}{|\cos x|}$$

۵

گزینه ۳

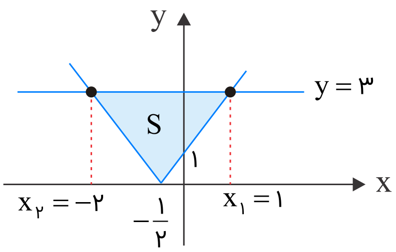
ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^۲ + x) = \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} \Rightarrow (gof)(x) = |۲x + ۱|$$

$$|۲x+۱| = \begin{cases} ۲x+۱ & ; x \geq -\frac{۱}{۲} \\ -۲x-۱ & ; x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|۲x + ۱|$ و خط $y = ۳$ را می‌یابیم.

$$۲x_۱ + ۱ = ۳ \Rightarrow x_۱ = ۱ \ , \ -۲x_۲ - ۱ = ۳ \Rightarrow x_۲ = -۲$$



$$S = \frac{(|x_۱| + |x_۲|) \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

۶ گزینهٔ ۱

ضابطهٔ $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطهٔ تابع $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = x^2 - x - 2 \; , \; f(g(x)) = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) = x^2 + x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^2 - g(x) = x^2 + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{1}{4} \text{ اضافه می کنیم}} (g(x))^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x)) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{2} = \pm(x + \frac{1}{2})$$

پس برای ضابطهٔ $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$1) \; g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1$$
$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1$$
$$2) \; g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x$$
$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینهٔ ۱ قابل قبول است.

۷ گزینهٔ ۲

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$، ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(6)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{\text{به توان } 3} y^3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$6 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow 4 + 2 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow \frac{x^3}{2} = 4 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

نقطهٔ $(2, 6)$ در ضابطهٔ $g(x)$ صدق می کند، پس نقطهٔ $(6, 2)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(6) = 2$ است.

۸ گزینه ۱

ابتدا $f(-۱)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{۲})$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{۲ - x - x^۲} \Rightarrow f(-۱) = \sqrt{۲ - (-۱) - (-۱)^۲} = \sqrt{۲ + ۱ - ۱} = \sqrt{۲}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{۲})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-۱)) = f(\sqrt{۲}) = \sqrt{۲ - \sqrt{۲} - (\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۲ - \sqrt{۲} - ۲} = \sqrt{-\sqrt{۲}}$$

می دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد پس حاصل $f(f(-۱))$ تعریف نشده است.

۹ گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-۲)} = \sqrt{-x+۲}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y = \sqrt{-x+۲}$ و $y = x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

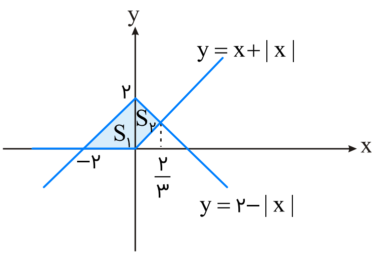
$$\sqrt{-x+۲} = x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+۲ = x^۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$x = -۲$ غیرقابل‌قبول است، زیرا در معادلهٔ $(*)$ صدق نمی‌کند.

۱۰ گزینه ۳

$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases} \quad , \quad y = ۲ - |x| = \begin{cases} ۲ - x & ; x \geq ۰ \\ x + ۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$



$$۲ - x = ۲x \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

$$S = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times ۲ = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

۱۱ گزینه ۱

اگر خط $۳y - ۲x = ۴$ را به‌صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینهٔ خط $۳y - ۲x = ۴$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$۳y - ۴ = ۲x \Rightarrow x = \frac{۳y - ۴}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۳x - ۴}{۲} = \frac{۳}{۲}x - ۲ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -۲$$

۱۲ گزینه ۱

ابتدا با توجه به ضابطهٔ تابع $f(x)$، ضابطهٔ دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$ را تشکیل می دهیم. یعنی یک بار در ضابطهٔ $f(x)$ به جای متغیر x، متغیر $(۱+x)$ و یک بار متغیر $(۱-x)$ را قرار داده و ضابطهٔ هر یک را تعیین می کنیم.

$$f(۱+x) = (۱+x)^۲(۲-۱-x)^۲ = (۱+x)^۲(۱-x)^۲ = [(۱+x)(۱-x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲$$
$$f(۱-x) = (۱-x)^۲(۲-۱+x)^۲ = (۱-x)^۲(۱+x)^۲ = [(۱-x)(۱+x)]^۲ = (۱-x^۲)^۲$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(۱+x)$ و $f(۱-x)$، حاصل $f(۱+x) - f(۱-x)$ را به دست می آوریم:

$$f(۱+x) - f(۱-x) = (۱-x^۲)^۲ - (۱-x^۲)^۲ = ۰$$

۱۳ گزینه ۴

$$f(x) = \frac{۲^x + (\frac{۱}{۲})^x}{۲} \xrightarrow{f^{-۱}(۲)=?} \frac{۲^x + (\frac{۱}{۲})^x}{۲} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲^x + (\frac{۱}{۲})^x = ۴ \Rightarrow ۲^x + \frac{۱}{۲^x} = ۴ \xrightarrow{t=۲^x} t + \frac{۱}{t} = ۴$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۱ = ۴t \Rightarrow t^۲ - ۴t + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ + \sqrt{۳} \\ t = \dfrac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ - \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$t = ۲^x \Rightarrow x = \log_۲^t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_۲^{(۲+\sqrt{۳})} \\ x = \log_۲^{(۲-\sqrt{۳})} < ۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

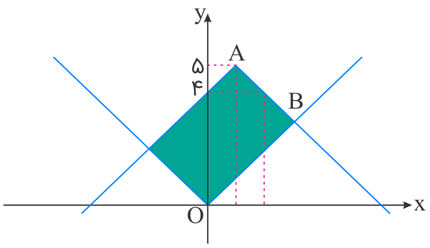
جواب $x = \log_۲^{(۲-\sqrt{۳})}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا دامنه $[۰, +\infty)$ است.

۱۴ گزینه ۴

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y=۵-\lvert x-۱\rvert$	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y=\lvert x\rvert$	۱	۰	۱



برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵-|x-۱|=|x| \Rightarrow |x|+|x-۱|=۵ \Rightarrow x=\frac{۰+۱\pm ۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳,۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۳-۵)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$|BO|=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$S=|AB|\times|BO|=۳\sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲}=۱۲$$

۱۵

گزینه ۴

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. سپس باتوجه‌به محدودهٔ قابل قبول برای x، بازه‌ای که در آن تابع $f(۳-x)$ تعریف شده است را مشخص می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}\Rightarrow ۲x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۲-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

پس باید داشته باشیم: $۰\leq ۳-x\leq ۲$، بنابراین:

$$۰\leq ۳-x\leq ۲\Rightarrow -۳\leq -x\leq -۱\Rightarrow ۱\leq x\leq ۳\Rightarrow D_{f(۳-x)}=[۱,۳]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطهٔ $f(۳-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}\Rightarrow f(۳-x)=\sqrt{۲(۳-x)-(۳-x)^۲}$$
$$=\sqrt{۶-۲x-۹+۶x-x^۲}=\sqrt{-x^۲+۴x-۳}\Rightarrow -x^۲+۴x-۳\geq ۰$$
$$\xrightarrow{\times(-۱)} x^۲-۴x+۳\leq ۰\Rightarrow (x-۳)(x-۱)\leq ۰\Rightarrow ۱\leq x\leq ۳\Rightarrow D_{f(۳-x)}=[۱,۳]$$

۱۶

گزینه ۴

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=y\Rightarrow x^۲-۲x+۱=y+۴$$
$$\Rightarrow (x-۱)^۲=y+۴\xrightarrow{\text{جذر}}|x-۱|=\sqrt{y+۴}$$
$$\xrightarrow{x\geq ۱} x-۱=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=\sqrt{y+۴}+۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$$

حال $f^{-۱}$ را با g قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱\quad (۱)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x=۲۱$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

۱۷ گزینه ۲

گام اول

چون عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه‌جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش‌پذیر است، باید باقی‌ماندهٔ تقسیم این عبارت بر سه‌جمله‌ای موردنظر برابر صفر شود.

گام دوم

$$\begin{array}{l|l} ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -\left(ax^3 - 2ax^2 + ax\right) & ax + (2a+4) \\ \hline (2a+4)x^2 + (-a-14)x + 10 - a & \\ -\left((2a+4)x^2 - 2(2a+4)x + 2a + 4\right) & \\ \hline (3a-6)x + (6-3a) & \end{array}$$

باقی‌مانده را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(3a-6)x + (6-3a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3a - 6 = 0 \\ 6 - 3a = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

بنابراین به ازای $a = 2$ عبارت $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه‌جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش‌پذیر است.

۱۸ گزینه ۴

نکته: چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^2$ بخش‌پذیر است، هرگاه: $P(a) = P'(a) = 0$

$$P(x) = x^4 + ax^2 - bx + 4 \Rightarrow P'(x) = 4x^3 + 2ax - b$$

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a - b + 4 = 0 \\ P'(1) = 0 \Rightarrow 4 + 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -5 \\ 2a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$

۱۹ گزینه ۳

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع f صدق کند، نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(۴)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(۴)$ برابر α شود، در این صورت $(۴,\alpha)$ در ضابطهٔ f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha,۴)$ باید در ضابطهٔ تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطهٔ تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادلهٔ $f(\alpha)=۴$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x)=-x+\sqrt{-۲x}\xrightarrow{f(\alpha)=۴}۴=-\alpha+\sqrt{-۲\alpha}\Rightarrow\sqrt{-۲\alpha}=\alpha+۴$$

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-۲\alpha\geq ۰\Rightarrow\alpha\leq ۰\ ,\ \ \alpha+۴\geq ۰\Rightarrow\alpha\geq -۴$$

پس $\alpha\in[-۴,۰]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$-۲\alpha=(\alpha+۴)^۲\Rightarrow -۲\alpha=\alpha^۲+۸\alpha+۱۶\Rightarrow\alpha^۲+۱۰\alpha+۱۶=۰$$
$$\Rightarrow(\alpha+۸)(\alpha+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-۲\\ \alpha=-۸\end{cases}$$

با توجه به این که $\alpha\in[-۴,۰]$ است، فقط $\alpha=-۲$ قابل قبول خواهد بود.

۲۰

گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت $P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش پذیر است (به ازای هر عدد طبیعی n)، بنابراین $P(-2)=0$ است.

ب) با توجه به گزینه های داده شده باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x)$ بر x^2-1 یک چند جمله ای درجه یک به فرم $ax+b$ است. برای تعیین مقادیر a و b یک بار مقدار $P(1)$ و بار دیگر $P(-1)$ را محاسبه کرده و با حل دو معادله و دو مجهول مقدار a و b حساب می شود.

گام دوم

$$P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$$

$$P(-2)=0\Rightarrow (-2)^{2n+1}+2(-2)^{2n}+(-2)^5-5(-2)^3+k=0$$

$2n+1$ عددی فرد است. بنابراین $(-2)^{2n+1}=-2^{2n+1}$ است. هم چنین $2n$ یک عدد زوج بوده و داریم:

$$(-2)^{2n}=2^{2n}$$

$P(-2)$ را بازنویسی می کنیم:

$$P(-2)=-2^{2n+1}+2^{2n+1}-32+40+k=0\Rightarrow k+8=0\Rightarrow k=-8$$

با مشخص شدن مقدار k، سراغ محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ برا x^2- می رویم:

$$P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3-8=Q(x)(x^2-1)+ax+b$$

$$P(1)=1^{2n+1}+2(1)^{2n}+(1)^5-5(1)^3-8=a+b$$

$$\Rightarrow 1+2+1-5-8=a+b\Rightarrow a+b=-9\quad (I)$$

$$P(-1)=(-1)^{2n+1}+2(-1)^{2n}+(-1)^5-5(-1)^3-8=-a+b$$

$$\Rightarrow -1+2-1+5-8=-a+b\Rightarrow -a+b=-3\quad (II)$$

از دو رابطهٔ (I) و (II) مقدار a و b را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} a+b=-9\\ -a+b=-3\end{cases}\xrightarrow{+}2b=-12\Rightarrow b=-6\xrightarrow{(I)}a=-3$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر x^2-1 به‌صورت $-3x-6$ است.

روش دوم:

باقی‌ماندهٔ عبارت $P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3-8$ را بر x^2-1 می خواهیم.

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1$$

کافی است در عبارت فوق به جای x^2 عدد ۱ را قرار دهیم:

$$P(x)=x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3-8\Rightarrow P(x)=(x^2)^n x+2(x^2)^n+(x^2)^2x-5x^2x-8$$
$$\xrightarrow{x^2=1}(1)^n x+2(1)^n+(1)^2x-5(1)x-8=x+2+x-5x-8=-3x-6$$

مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم $۶ - ۳x -$ است.

۲۱

گزینه ۴

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq ۰$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می‌کنیم در چه بازه‌هایی $xf(x) \geq ۰$ برقرار است. داریم:

x	-۴		-۳		۰		۱		۲
x		−		−	۰	+		+	
f(x)		+	۰	−		−	۰	+	۰
xf(x)		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰
				ج				ج	

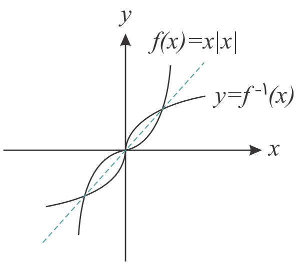
دو بازهٔ مشخص‌شده مقادیر قابل‌قبول برای دامنهٔ تعریف تابع است، پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌صورت $[۱,۲] \cup [-۳,۰]$ درمی‌آید.

۲۲

گزینه ۳

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. نمودار $f^{-۱}$ قرینهٔ $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$



۲۳

گزینه ۲

$$f(x) = \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \Rightarrow ۱+x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۱ \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^۲} \Rightarrow x-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x(۱-x) \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_g : [۰,۱]$$

$$D_{gof} : \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} | ۰ \leq \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \leq ۱\}$$

همواره داریم $\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \leq ۱$ ، درنتیجه:

$$\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \geq ۰ \xrightarrow{۱+x^۲>۰} ۱-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x \in [-۱,۱]$$

۲۴ گزینه ۴

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = ۵$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفهٔ دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفهٔ اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطهٔ تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = ۵$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهندهٔ تابع g، زوج مرتب $(۶,۵)$ دارای مؤلفهٔ دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = ۶$. حال با داشتن ضابطهٔ $f(x)$، مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=۶} a + \sqrt{a} = ۶$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$، معادله را به یک معادلهٔ درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود.)

$$a + \sqrt{a} = ۶ \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^۲ + t = ۶ \Rightarrow t^۲ + t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t+۳)(t-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -۳ & \text{غ ق ق} \\ t = ۲ \Rightarrow \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = ۴$ جواب تست می شود.

۲۵ گزینه ۳

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{مثبت محور x ها}]{\text{۱۲ واحد در جهت}} y = \sqrt{x - ۱۲} \xrightarrow[\text{مثبت محور y ها}]{\text{۲ واحد در جهت}} y = \sqrt{x-۱۲} + ۲$$

حال منحنی حاصل را با $f(x) = \sqrt{x}$ برابر قرار می‌دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-۱۲} + ۲ = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-۱۲} = \sqrt{x} - ۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان۲}} \cancel{x} - ۱۲ = \cancel{x} + ۴ - ۴\sqrt{x} \Rightarrow ۴\sqrt{x} = ۱۶ \Rightarrow x = ۱۶$$

$x = ۱۶$ را در $f(x) = \sqrt{x}$ جایگذاری می‌کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(۱۶) = \sqrt{۱۶} = ۴ \quad \Rightarrow A(۱۶,۴)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{۱۶^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۱۶(۱۶+۱)} = ۴\sqrt{۱۷}$$

۲۶ گزینه ۳

در صورت مسئله ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع fog کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x) = ۲x + ۳ \ , \ g(f(x)) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰ \Rightarrow g(۲x + ۳) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$$
$$۲x + ۳ = t \Rightarrow ۲x = t - ۳ \Rightarrow x = \frac{t - ۳}{۲}$$
$$g(t) = ۸(\frac{t - ۳}{۲})^۲ + ۲۲(\frac{t - ۳}{۲}) + ۲۰ \Rightarrow g(t) = ۸(\frac{t^۲ - ۶t + ۹}{۴}) + ۱۱(t - ۳) + ۲۰$$
$$\Rightarrow g(t) = ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۸ + ۱۱t - ۳۳ + ۲۰ = ۲t^۲ - t + ۵ \Rightarrow g(x) = ۲x^۲ - x + ۵$$

حالا ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می کنیم:

$$f(x) = ۲x + ۳ \ , \ g(x) = ۲x^۲ - x + ۵ \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = ۲(۲x^۲ - x + ۵) + ۳$$
$$\Rightarrow f(g(x)) = ۴x^۲ - ۲x + ۱۰ + ۳ = ۴x^۲ - ۲x + ۱۳$$

۲۷ گزینه ۴

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می تواند رخ دهد:

$$۱)|x| = ۲ \ , \ |y| = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \, , \, y = ۰ \Rightarrow (۲, ۰), (-۲, ۰) \in R$$
$$۲)|x| = ۰ \ , \ |y| = ۲ \Rightarrow x = ۰ \, , \, y = \pm ۲ \Rightarrow (۰, ۲), (۰, -۲) \in R$$
$$۳)|x| = ۱ \ , \ |y| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \, , \, y = \pm ۱ \Rightarrow (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱) \in R$$

بنابراین رابطهٔ R با اعضایش به صورت زیر در می آید:

$$R = \{(۲, ۰), (۰, ۲), (-۲, ۰), (۰, -۲), (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱)\}$$

پس رابطهٔ R دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

۲۸ گزینه ۳

گام اول

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \longrightarrow ۲x - ۲ \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \longrightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را x در نظر می گیریم. وارد دستگاهی می شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_{x} \longrightarrow \underbrace{۲x - ۲}_{f(x)} \longrightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x}+۱}}_{g(x)} \longrightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{۴}{۳}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{۴}{۳}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و در نهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$f(x) = ۲x - ۲ \ , \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+۱}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}+۱} = \frac{۲x-۲}{\sqrt{۲x-۲}+۱} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳(۲x-۲) = ۴\sqrt{۲x-۲}+۴$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲x-۲}=t} ۳t^۲ = ۴t + ۴ \Rightarrow ۳t^۲ - ۴t - ۴ = ۰ \Rightarrow (۳t+۲)(t-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = ۲ \Rightarrow ۲x - ۲ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \\ t = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = -\frac{۲}{۳} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = ۳$ به دست آمد.

۲۹ گزینه ۱

برای یافتن ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$، کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$fog(x) = f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^۴ x - \sqrt{\sin^۴ x} = \sin^۴ x - \sin^۲ x$$
$$= \sin^۲ x(\sin^۲ x - ۱) = \sin^۲ x(-\cos^۲ x) = -\sin^۲ x\cos^۲ x$$

با توجه به فرمول $\sin ۲x$، داریم:

$$\sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

پس ضابطهٔ تابع fog به صورت زیر درمی‌آید:

$$fog(x) = -(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲ = -\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

۳۰ گزینه ۳

نکته:

$$۰ \leq x - [x] < ۱$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{۱ - ۲x}{x + ۱} = \frac{۱ - ۲x + ۲ - ۲}{x + ۱} = \frac{-۲x - ۲}{x + ۱} + \frac{۱ + ۲}{x + ۱} = -۲ + \frac{۳}{x + ۱}$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -۲ + \frac{۳}{[x] - x + ۱}$$

طبق نکته داریم:

$$۰ \leq x - [x] < ۱ \xrightarrow{\text{در (۱-) ضرب می‌کنیم}} -۱ < [x] - x \leq ۰$$
$$\xrightarrow{+۱} ۰ < [x] - x + ۱ \leq ۱ \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} ۱ \leq \frac{۱}{[x] - x + ۱}$$
$$\xrightarrow{\times ۳} ۳ \leq \frac{۳}{[x] - x + ۱} \xrightarrow{-۲} ۱ \leq \frac{۳}{[x] - x + ۱} - ۲$$
$$\Rightarrow g(f(x)) \geq ۱ \Rightarrow R_{gof} = [۱, +\infty)$$

۳۱ گزینه ۱

ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ما داده شده و ضابطهٔ تابع $g^{-1}of^{-1}$ را می خواهند. برای این کار ابتدا ضابطهٔ دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم سپس برای تعیین ضابطهٔ $g^{-1}of^{-1}$ یا همان $g^{-1}(f^{-1}(x))$ در ضابطهٔ $g^{-1}(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را قرار می دهیم:

$$f(x)=1+\sqrt{x}\Rightarrow y=1+\sqrt{x}\Rightarrow y-1=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(y-1)^2=x$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2\ ;\ x\geq 1$$
$$g(x)=x^2\Rightarrow y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x}\ ;\ x>0$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $g^{-1}of^{-1}(x)$ برابر است با:

$$g^{-1}of^{-1}(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=\sqrt{f^{-1}(x)}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$
$$\xrightarrow[x-1\geq 0]{x\geq 1}g^{-1}of^{-1}(x)=x-1$$

۳۲ گزینه ۱

طبق تعریف، دامنهٔ تابع gof از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنهٔ تعریف دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده D_{gof} را مشخص کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}x\geq 0: |x|=x\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x}\\ x<0: |x|=-x\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-x}=0\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$
$$g(x)=\frac{1}{x^2-4x}=\frac{1}{x(x-4)}\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow x=0, x=4$$
$$\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0,4\}$$

حالا دامنهٔ تعریف تابع gof را به دست می آوریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}|\sqrt{x+|x|}\in\mathbb{R}-\{0,4\}\}$$
$$\sqrt{x+|x|}=4\xrightarrow{x\geq 0}\sqrt{2x}=4\xrightarrow{\text{به توان ۲}}2x=16\Rightarrow x=8$$
$$\sqrt{x+|x|}=0\Rightarrow x\in(-\infty,0]$$

پس دامنهٔ gof برابر است با: $D_{gof}=(0,8)\cup(8,+\infty)$

۳۳ گزینه ۲

نکته: $\circ \leq x - [x] < ۱$

ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = -x^{۲} + ۴x = -x^{۲} + ۴x - ۴ + ۴$$
$$= -(x^{۲} - ۴x + ۴) + ۴ = -(x - ۲)^{۲} + ۴$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(۲x - [۲x] - ۲)^{۲} + ۴$$

طبق نکته داریم:

$$\circ \leq ۲x - [۲x] < ۱ \xrightarrow{-۲} -۲ \leq ۲x - [۲x] - ۲ < -۱$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱ < (۲x - [۲x] - ۲)^{۲} \leq ۴$$
$$\xrightarrow{\times(-۱)} -۴ \leq -(۲x - [۲x] - ۲)^{۲} < -۱$$
$$\xrightarrow{+۴} \circ \leq -(۲x - [۲x] - ۲)^{۲} + ۴ < ۳$$
$$\Rightarrow \circ \leq gof(x) < ۳ \Rightarrow R_{gof} = [\circ, ۳)$$

۳۴ گزینه ۳

گام اول

الف) ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را باتوجه‌به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدودهٔ x بر اساس ریشهٔ عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشهٔ عبارت‌های درون قدر مطلق، $x = -۱$ و $x = ۳$ است. داریم:

$$x < -۱ : f(x) = -۲x + ۶ - (-x - ۱) = -۲x + ۶ + x + ۱ = -x + ۷$$
$$-۱ \leq x \leq ۳ : f(x) = -۲x + ۶ - (x + ۱) = -۳x + ۵$$
$$x > ۳ : f(x) = ۲x - ۶ - (x + ۱) = x - ۷$$

در بازهٔ $x > ۳$ تابع $f(x) = x - ۷$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = x - ۷ \Rightarrow x = y + ۷ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x + ۷ \ , \ x > -۴$$

۳۵ گزینه ۱

در تست حاصل مقادیری از دو تابع fog و gof از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطهٔ $f(x)$ و $g(x)$، ابتدا ضابطهٔ توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$$
$$(fog)(x)=f(g(x))=|(x+۱)^۲|\xrightarrow{(x+۱)^۲\geq ۰}(fog)(x)=(x+۱)^۲$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=(|x|+۱)^۲$$

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲-(|۱-\sqrt{۲}|+۱)^۲=$$
$$(۲-\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=۴-۴\sqrt{۲}+۲-(\sqrt{۲})^۲=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۳۶ گزینه ۳

هر یک از توابع $f+g$، fof، gof و fog را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در $x=0$ بحث می کنیم.

بررسی گزینهٔ اول:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}-2x & , x<0\\ 1+2x & , x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}(f+g)(x)=-\frac{1}{2}\ ,\ \lim_{x\to 0^+}(f+g)(x)=1$$

بنابراین تابع $f+g$ در $x=0$ ناپیوسته است.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$fof(x)=f(f(x))=\begin{cases}-\frac{1}{2} & , f(x)<0\\ 2f(x) & , f(x)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-\frac{1}{2} & , x<0\\ 4x & , x\geq 0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} fof(x)=-\frac{1}{2}\ ,\ \lim_{x\to 0^+} fof(x)=0 \to$ در $x=0$ ناپیوسته است

بنابراین تابع fof در $x=0$ ناپیوسته است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}-2f(x) & , f(x)<0\\ 1 & , f(x)\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2(-\frac{1}{2}) & , x<0\\ 1 & , x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}1 & , x<0\\ 1 & , x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} gof(x)=\lim_{x\to 0^+} gof(x)=gof(0)=1$$

پس تابع gof در $x=0$ پیوسته است.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}-\frac{1}{2} & , g(x)<0\\ 2g(x) & , g(x)\geq 0\end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ تابع $g(x)$ این تابع همواره نامنفی است پس تابع fog برای ضابطهٔ بالا تشکیل نشده و داریم:

$$fog(x)=\begin{cases}-4x & , x<0\\ 2 & , x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} fog(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 0^+} fog(x)=2$$

بنابراین تابع fog در $x=0$ ناپیوسته است.

۳۷ گزینه ۳

گام اول

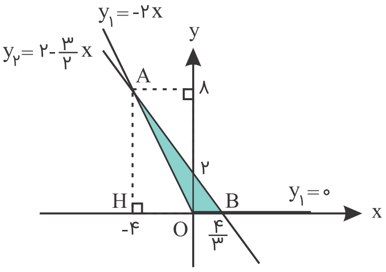
هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq \circ \\ -x & ; x < \circ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq \circ$ و $x < \circ$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = \circ & ; x \geq \circ \\ -x - x = -۲x & ; x < \circ \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطهٔ A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$۲ - \frac{۳}{۲}x = -۲x \Rightarrow -۲x + \frac{۳}{۲}x = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x = ۲ \Rightarrow x = -۴$$
$$\xrightarrow{y=-۲x} y = ۸ \Rightarrow A(-۴, ۸)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ برابر ۸ است و مساحتش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{A\overset{\Delta}{B}C} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \frac{۴}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

۳۸

گزینه ۳

گام اول

ساده تر از این امکان ندارد. ضابطهٔ $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبهٔ $f(۸)$ کافی است در ضابطهٔ داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم .

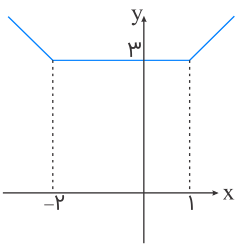
گام دوم

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸) = ۳ + \sqrt{۲ \times ۸} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷ \Rightarrow f(۸) = ۷$$

۳۹

گزینه ۱

$$f\,(x) = |x+۲| + |x-۱| = \begin{cases} ۲x+۱ & ; x > ۱ \\ ۳ & ; -۲ \le x \le ۱ \\ -۲x-۱ & ; x < -۲ \end{cases}$$



باتوجه‌به نمودار تابع گلدانی $y = |x+۲| + |x-۱|$، در فاصلهٔ $(-\infty, -۲)$ تابع نزولی اکید است.

۴۰

گزینه ۲

برای تعیین نقطهٔ تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطهٔ fog مشخص شود. سپس معادلهٔ $f(x) = fog(x)$ را حل کرده و نقطهٔ تلاقی دو تابع که در واقع ریشهٔ همین معادله است را به دست می آوریم.

$$f(x) = (۲x-۳)^۲\ ,\ g(x) = x+۲ \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = (۲g(x)-۳)^۲$$
$$= (۲(x+۲)-۳)^۲ = (۲x+۴-۳)^۲ = (۲x+۱)^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱$$

معادلهٔ $f(x) = fog(x)$ را حل می کنیم:

$$f(x) = fog(x) \Rightarrow (۲x-۳)^۲ = (۲x+۱)^۲$$

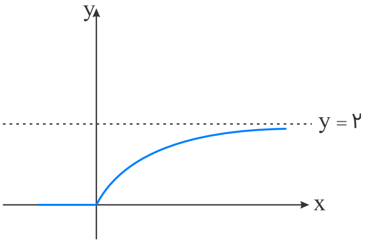
$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow ۱۶x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه ای به طول $x = \frac{۱}{۲}$ با هم متقاطع اند.

۴۱ گزینه ۲

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x+|x|}{|x+۱|+۱}=\begin{cases}۰ & ;x\leq ۰\\ \frac{۲x}{x+۲} & ;x>۰\end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[۰,۲)$ خواهد بود.

۴۲ گزینه ۴

دامنهٔ تابع $[-۳,۳]-\{۱\}$ است. اگر $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

$$(۱):(k-۲,۳k+۲)\subseteq[-۳,۱)\Rightarrow\begin{cases}۳k+۲<۱\Rightarrow k<-\frac{۱}{۳}\\ k-۲\geq -۳\Rightarrow k\geq -۱\end{cases}\xrightarrow{\cap} k\in[-۱,\frac{-۱}{۳})$$

$$(۲):(k-۲,۳k+۲)\subseteq(۱,۳]\Rightarrow\begin{cases}۳k+۲\leq ۳\Rightarrow k\leq\frac{۱}{۳}\\ k-۲>۱\Rightarrow k>۳\end{cases}\xrightarrow{\cap}\varnothing$$

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

۴۳ گزینه ۴

برای به دست آوردن D_{fog} اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطهٔ $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$، دامنهٔ تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x)=\sqrt{۳-x}\Rightarrow ۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow D_f=(-\infty,۳]$$

$$g(x)=\log_۲^{(x^۲+۲x)}\Rightarrow x^۲+۲x>۰\Rightarrow x(x+۲)>۰\Rightarrow x>۰ \text{ یا } x<-۲$$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)$$

حالا سراغ تعیین D_{fog} می رویم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$
$$D_{fog}=\{x\in(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)|\log_۲^{(x^۲+۲x)}\leq ۳\}$$
$$\log_۲^{(x^۲+۲x)}\leq ۳\Rightarrow x^۲+۲x\leq ۲^۳\Rightarrow x^۲+۲x\leq ۸\Rightarrow x^۲+۲x-۸\leq ۰\Rightarrow(x+۴)(x-۲)\leq ۰$$
$$\Rightarrow -۴\leq x\leq ۲\Rightarrow D_{fog}=[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

۴۴ گزینه ۱

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطهٔ تابع$gof(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطهٔ تابع $g(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جملهٔ "مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محورxها قرار بگیرد باید مقدارy تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطهٔ $gof(x)$ و حل نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$:

$$g(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \ , \ f(x) = x^۲ + ۳x$$
$$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{۱}{۲}(x^۲ + ۳x) + ۲ = -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲$$
$$gof(x) > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲ > ۰ \xrightarrow{\times(-۲)} x^۲ + ۳x - ۴ < ۰$$
$$\Rightarrow (x + ۴)(x - ۱) < ۰ \Rightarrow -۴ < x < ۱$$

بنابراین در بازهٔ $(-۴, ۱)$ مقادیر تابع $gof(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور xها قرار می گیرد.

۴۵ گزینه ۴

با توجه به ضابطهٔ تابع $f\,(x)$، ضابطهٔ $f\,(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f\,(-x) = \frac{۱}{۲}\left(-x + \sqrt{x^۲ + ۴}\right)$$

حاصل‌ضرب دو تابع $f\,(x)$ و $f\,(-x)$ برابر است با:

$$f\,(x)\,f\,(-x) = \frac{۱}{۲}\left(x + \sqrt{x^۲ + ۴}\right)\frac{۱}{۲}\left(-x + \sqrt{x^۲ + ۴}\right) = \frac{۱}{۴}\left(x^۲ + ۴ - x^۲\right) = \frac{۱}{۴} \times ۴ = ۱$$
$$\Rightarrow \quad f\,(x)\,f\,(-x) = ۱$$

بنابراین اگر فرض کنیم $f\,(x) = \alpha$ باشد آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{lll} f\,(x) = \alpha & \Rightarrow & f^{-۱}\,(\alpha) = x \\ f\,(-x) = \dfrac{۱}{\alpha} & \Rightarrow & f^{-۱}\left(\dfrac{۱}{\alpha}\right) = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \ f^{-۱}\,(\alpha) + f^{-۱}\left(\dfrac{۱}{\alpha}\right) = x - x = ۰$$

۴۶ گزینه ۱

اول ضابطهٔ $f(\sqrt{x})$ را تعیین می کنیم. در تعیین ضابطهٔ $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنهٔ آن متفاوت با دامنهٔ تابع $f(x)$ است.

$$f(x)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}} \Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^{۲}+\frac{۱}{(\sqrt{x})^{۲}}=x+\frac{۱}{x} \quad , \quad x\in(۰,+\infty)$$

حالا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x)=(f(\sqrt{x}))^{۲}-f(x)=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})=x^{۲}+۲+\frac{۱}{x^{۲}}-x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}}$$
$$\Rightarrow g(x)=۲ \ , \ x\in(۰,+\infty)$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

۴۷ گزینه ۴

گام اول

در ضابطهٔ $g(x)$، به‌جای x ضابطهٔ $f(x)$ را جایگذاری می‌کنیم.

گام دوم

$$g(f(x))=g(\frac{۲x-۱}{x+۱})=\frac{۲\times\frac{۲x-۱}{x+۱}+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}$$
$$=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=\frac{۶x}{۳}=۲x \Rightarrow g(f(x))=۲x$$

۴۸

گزینه ۱

گام اول

دامنهٔ تابع fog از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

گام دوم

دامنهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطهٔ گفته‌شده در گام اول، D_{fog} را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^۲ + x + ۲}}$$

$$-x^۲ + x + ۲ > ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \Rightarrow D_f = (-۱, ۲)$$

$$g(x) = (\frac{۱}{۴})^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} | -۱ < (\frac{۱}{۴})^x < ۲\}$$

$$\xrightarrow{(\frac{۱}{۴})^x > ۰} (\frac{۱}{۴})^x < ۲ \Rightarrow (۲^{-۲})^x < ۲ \Rightarrow ۲^{-۲x} < ۲ \Rightarrow -۲x < ۱$$

$$\xrightarrow{\div -۲} x > -\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_{fog} = (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

۴۹

گزینه ۱

اگر دو تابع f و g که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بیان شده‌اند را داشته باشیم، پس $f \cap g$ زیرمجموعه ای از این توابع خواهد بود، بنابراین تابع است. همچنین $f - g$ نیز تابع خواهد بود. ترکیب دو تابع f و g یعنی fog نیز تابع است.
رابطهٔ $f \cup g$ ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

$f = \{(۲, ۳)\}$ تابع است

$g = \{(۲, ۴)\}$ تابع است

$f \cup g = \{(۲, ۳), (۲, ۴)\}$ تابع نیست

۵۰ گزینه ۳

دو ضابطهٔ $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(x)$ از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض می کنیم $g(x)$ برابر t باشد. در این صورت x را بر حسب t به دست آورده و در نهایت $f(t)$ را مشخص می کنیم. حالا تابع $f(x)$ به صورت مستقل به دست آمده است.

$$g(x) = ۲x - ۳ = t \Rightarrow ۲x = t + ۳ \Rightarrow x = \frac{t+۳}{۲}$$

$$f(g(x)) = ۴(x^۲ - ۴x + ۵) \Rightarrow f(t) = ۴(\frac{(t+۳)^۲}{۴} - ۲(t+۳) + ۵)$$
$$\Rightarrow f(t) = (t+۳)^۲ - ۸(t+۳) + ۲۰ = t^۲ + ۶t + ۹ - ۸t - ۲۴ + ۲۰$$
$$\Rightarrow f(t) = t^۲ - ۲t + ۵ \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۲x + ۵$$

۵۱ گزینه ۴

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $x - ۳ = t$، x را برحسب t به دست آورده و ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x-۳) = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow[x=t+۳]{x-۳=t} f(t) = (t+۳)^۲ - ۴(t+۳) + ۵$$
$$= t^۲ + ۶t + ۹ - ۴t - ۱۲ + ۵ \Rightarrow f(t) = t^۲ + ۲t + ۲ \Rightarrow f(x) = x^۲ + ۲x + ۲$$

ضابطهٔ $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطهٔ $f(۱-x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(۱-x) = (۱-x)^۲ + ۲(۱-x) + ۲ = ۱ - ۲x + x^۲ + ۲ - ۲x + ۲$$
$$= x^۲ - ۴x + ۵ \Rightarrow f(۱-x) = x^۲ - ۴x + ۵$$

روش دوم:روش دیگر برای به دست آوردن $f(۱-x)$ از روی ضابطهٔ $f(x-۳)$ این است که به جای x متغیر $۴-x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x-۳) = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow{x \to ۴-x} f(۴-x-۳) = (۴-x)^۲ - ۴(۴-x) + ۵$$
$$\Rightarrow f(۱-x) = ۱۶ - ۸x + x^۲ - ۱۶ + ۴x + ۵ = x^۲ - ۴x + ۵$$

۵۲ گزینه ۱

ضابطهٔ $f(x)$ و ضابطهٔ $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ به ما داده شده است و ضابطهٔ $g(x)$ را می خواهد. در این حالت برای پاسخ گویی به تست از تغییر متغیری به صورت زیر استفاده می کنیم. $f(x)$ را برابر t در نظر گرفته، x را بر حسب t به دست آورده و سپس $g(t)$ را بر حسب t تشکیل می دهیم. در نهایت برای تعیین ضابطهٔ $g(x)$، x را به جای t جای گزین می کنیم.

$$gof(x)=\frac{۱}{۲}x\ ,\ f(x)=\frac{x}{۲-x}\Rightarrow g(f(x))=g(\frac{x}{۲-x})=\frac{۱}{۲}x$$

طبق توضیحات گفته شده $\frac{x}{۲-x}$ را برابر t فرض می کنیم:

$$\frac{x}{۲-x}=t\Rightarrow x=۲t-tx\Rightarrow x+tx=۲t\Rightarrow x(۱+t)=۲t\Rightarrow x=\frac{۲t}{۱+t}$$

پس $g(t)$ برابر است با:

$$g(t)=\frac{۱}{۲}(\frac{۲t}{۱+t})=\frac{t}{۱+t}\Rightarrow g(x)=\frac{x}{۱+x}$$

۵۳ گزینه ۳

دو تابع $g\ (x)$ و $(fog)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=۸x^{۲}+۶x+۵\ \Rightarrow\ f\ (۲x+۱)=۸x^{۲}+۶x+۵\qquad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $f\ (x)$ را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $t=۲x+۱$ باشد، x را برحسب t به‌دست آورده و در ضابطهٔ (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$۲x+۱=t\quad\Rightarrow ۲x=t-۱\Rightarrow\ x=\frac{t-۱}{۲}$$

$$f\ (۲x+۱)=۸x^{۲}+۶x+۵\ \Rightarrow\ f\ (t)=۸\left(\frac{t-۱}{۲}\right)^{۲}+۶\ \left(\frac{t-۱}{۲}\right)+۵$$
$$=۲(t-۱)^{۲}+۳t-۳+۵$$
$$\Rightarrow\ f(t)=۲\ \left(t^{۲}-۲t+۱\right)+۳t+۲=۲t^{۲}-۴t+۲+۳t+۲=۲t^{۲}-t+۴$$

بنابراین ضابطهٔ $f\ (x)$ به‌صورت $f\ (x)=۲x^{۲}-x+۴$ است.

۵۴ گزینه ۳

با توجه به اعضای مجموعهٔ A، ابتدا تابع $f(x)$ را با مشخص کردن زوج مرتب های آن تشکیل می دهیم. برای تشکیل تابع $f(f(x))$ یا همان $fof(x)$، مقدار تابع fof را در نقاط دامنه اش حساب می کنیم. دقت کنید که اگر $x \in D_f$ باشد اما $f(x) \notin D_f$، آن گاه x در ترکیب شرکت نمی کند. حالا تابع $f(x)$ را با زوج مرتب هایش تشکیل می دهیم:

$$\left.\begin{matrix} f = \{(x, ۲x-۱), x \in A\} \\ A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۲ - ۱ = ۱ \\ x = ۲ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۴ - ۱ = ۳ \\ x = ۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۶ - ۱ = ۵ \\ x = ۴ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۸ - ۱ = ۷ \\ x = ۵ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۱۰ - ۱ = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \{(۱,۱), (۲,۳), (۳,۵), (۴,۷), (۵,۹)\}$$

تابع $f(f(x))$ را با رعایت شرط گفته شده تشکیل می دهیم:

$$x = ۱ : f(f(۱)) = f(۱) = ۱ \quad , \quad x = ۲ : f(f(۲)) = f(۳) = ۵$$

$$x = ۳ : f(f(۳)) = f(۵) = ۹ \quad , \quad x = ۴ : f(f(۴)) = f(۷) \to \text{تعریف نشده}$$

$$x = ۵ : f(f(۵)) = f(۹) \to \text{تعریف نشده}$$

$$fof(x) = f(f(x)) = \{(۱,۱), (۲,۵), (۳,۹)\}$$

بنابراین تابع $f(f(x))$ دارای ۳ عضو دوتایی (زوج مرتب) است.

۵۵ گزینه ۴

داریم $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹) = f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))$. ابتدا $g^{-۱}(-۹)$ را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $g^{-۱}(-۹) = a$ باشد، پس $g(a) = -۹$ و داریم:

$$g(x) = \frac{۳ - x}{۲} \Rightarrow g(a) = \frac{۳ - a}{۲} = -۹ \Rightarrow ۳ - a = -۱۸ \Rightarrow a = ۲۱$$

پس کافی است $f^{-۱}(۲۱)$ را حساب کنیم. فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۲۱) = b$ باشد، پس $f(b) = ۲۱$ است و داریم:

$$f(x) = x^۲ - ۴x + ۹ \Rightarrow f(b) = b^۲ - ۴b + ۹ = ۲۱ \Rightarrow b^۲ - ۴b - ۱۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (b - ۶)(b + ۲) = ۰ \xrightarrow{b \geq ۲} b = ۶$$

پس $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹) = ۶$ است.

۵۶ گزینه ۳

$$g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}\quad,\quad f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$$

$$g(f(x))=\frac{۱-۳(\frac{۲x+۳}{۲-x})}{(\frac{۲x+۳}{۲-x})+۲}\Rightarrow g(f(x))=\frac{۱-\frac{۶x+۹}{۲-x}}{\frac{۲x+۳}{۲-x}+۲}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=\frac{\frac{۲-x-۶x-۹}{\cancel{۲-x}}}{\frac{\cancel{۲x}+۳+۴-\cancel{۲x}}{\cancel{۲-x}}}\Rightarrow g(f(x))=\frac{-۷x-۷}{۷}\Rightarrow g(f(x))=-x-۱$$

۵۷ گزینه ۲

گام اول

با توجه به‌صورت سؤال $[x^۲+x]=-۱$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدودهٔ قابل‌قبول برای $x^۲+x$ به صورت $-۱\le x^۲+x<۰$ است.

گام دوم

$$[x^۲+x]=-۱\Rightarrow -۱\le x^۲+x<۰$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$۱)\ \ x^۲+x\ge -۱\Rightarrow x^۲+x+۱\ge ۰\Rightarrow \begin{cases}\Delta=۱-۴=-۳<۰\\ \text{ضریب } x^۲=۱>۰\end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است، عبارت $x^۲+x+۱$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$۲)\ \ x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰$$

پس $-۱<x<۰$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^{۲۰}<۱\Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$$

۵۸ گزینه ۴

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم هریک از زوج مرتب‌های تشکیل‌دهندهٔ دو تابع f و g، توابع f^{-1} و g^{-1} را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها مشخص می‌کنیم، سپس تابع $g^{-1}of^{-1}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا به سراغ تابع f^{-1} می‌رویم، سپس با خروجی‌هایی که به ما می‌دهد بررسی می‌کنیم که تابع $g^{-1}of^{-1}$ تشکیل می‌شود یا خیر.

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}\Rightarrow f^{-1}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴),(۴,۳)\}$$

$$g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}\Rightarrow g^{-1}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$$
$$D_{f^{-1}}=\{۲,۳,۵,۴\}$$

$$x=۲\Rightarrow f^{-1}(۲)=۱\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۲))=g^{-1}(۱)=۲\Rightarrow(۲,۲)\in g^{-1}of^{-1}$$
$$x=۳\Rightarrow f^{-1}(۳)=۲\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۳))=g^{-1}(۲)=۳\Rightarrow(۳,۳)\in g^{-1}of^{-1}$$
$$x=۵\Rightarrow f^{-1}(۵)=۴\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۵))=g^{-1}(۴)=۵\Rightarrow(۵,۵)\in g^{-1}of^{-1}$$

$$x=۴\Rightarrow f^{-1}(۴)=۳\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۴))=g^{-1}(۳)\Rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

بنابراین تابع $g^{-1}of^{-1}$ به‌صورت $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$ درمی‌آید.

۵۹ گزینه ۴

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x>۰$ و $x<۰$، تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه های جدید، ضابطهٔ معکوس تابع را به دست می آوریم. داریم:

$$x\neq۰: y=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\Rightarrow\begin{cases}x>۰: |x|=x\Rightarrow y=\sqrt{x}\ ;\ y>۰\\ x<۰: |x|=-x\Rightarrow y=-\sqrt{-x}\ ;\ y<۰\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y>۰}y^۲=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^۲\ ,\ x>۰$$

$$y=-\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y<۰}y^۲=-x\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^۲,x<۰$$

همچنین نقطهٔ $(۰,۰)$ باید در ضابطهٔ وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطهٔ معکوس تابع به صورت $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ در می آید.

روش دوم:

اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ صدق می کند. نقطهٔ $A(۴,۲)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق می کند. پس نقطهٔ $B(۲,۴)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعهٔ اعداد حقیقی یا همان $\mathbb{R}$ باشد. تنها گزینه ای که تمام این ویژگی ها را دارد، گزینهٔ $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ است.

۶۰ گزینه ۴

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

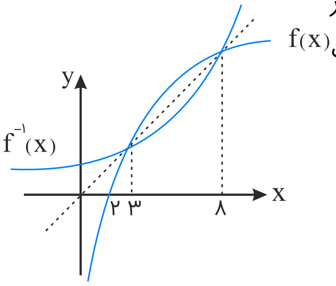
ب) نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x-f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

$$x-f^{-1}(x)\geq 0 \Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y=x$) قرینهٔ هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد، نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار می گیرد و برعکس.

در بازهٔ $[۳,۸]$ نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار گرفته و درنتیجه $x-f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت صحیح‌تر نامنفی می‌شود)، بنابراین بازهٔ $[۳,۸]$ دامنهٔ تعریف تابع داده‌شده است.



۶۱ گزینه ۱

یک روش این است که از روی تابع اصلی، ضابطهٔ وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سپس با توجه به این که اگر نقطهٔ $(\alpha\,,\,\beta)$ در ضابطهٔ اصلی صدق کند، نقطهٔ $(\beta\,,\,\alpha)$ در وارون آن صدق می کند، گزینهٔ درست را پیدا کنیم.

روش اول:

$$۱)\;\; y=\sqrt{x}\,,\, x\geq ۰\,,\, y\geq ۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^۲=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^۲\,,\, x\geq ۰$$

$$۲)\;\; y=-\sqrt{-x}\,,\, x<۰\Rightarrow y<۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^۲=-x$$

$$\Rightarrow x=-y^۲\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^۲\,,\, x<۰$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^۲ & ;x\geq ۰\\ -x^۲ & ;x<۰\end{cases}\Rightarrow y=x|x|\,,\, x\in\mathbb{R}$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطهٔ $(۴\,,\,۲)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینهٔ ۱ است که نقطهٔ $(۲\,,\,۴)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطهٔ وارون در نظر گرفته شود.

۶۲

گزینه ۱

داریم: $(g^{-1}of^{-1})(۲۰) = g^{-1}(f^{-1}(۲۰))$، پس کافی است $f^{-1}(۲۰)$ را یافته و در تابع g^{-1} قرار دهیم.
فرض کنیم $f^{-1}(۲۰) = a$ باشد، پس $f(a) = ۲۰$ است و داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۶$$
$$\Rightarrow f^{-1}(۲۰) = ۱۶$$

بنابراین $g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶)$. حال فرض می‌کنیم $g^{-1}(۱۶) = b$، پس $g(b) = ۱۶$ است. درنتیجه:

$$g(x) = \frac{۹x + ۶}{۱ - x} \Rightarrow g(b) = \frac{۹b + ۶}{۱ - b} = ۱۶ \Rightarrow ۹b + ۶ = ۱۶ - ۱۶b$$
$$\Rightarrow ۲۵b = ۱۰ \Rightarrow b = \frac{۱۰}{۲۵} = \frac{۲}{۵}$$
$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶) = \frac{۲}{۵}$$

۶۳

گزینه ۴

$$g(x) = x^۳ + x \quad , \quad f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴$$

اول $f^{-1}(۸)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x - ۴ = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x = ۱۲ \Rightarrow x = ۳۰ \Rightarrow f^{-1}(۸) = ۳۰$$

حال داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(۸)) = g^{-1}(۳۰)$$
$$g(x) = ۳۰ \Rightarrow x^۳ + x = ۳۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow g^{-1}(۳۰) = ۳$$

۶۴ گزینه ۲

ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow yx-۲y=x+۴\Rightarrow yx-x=۲y+۴$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴\Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱}\Rightarrow y^{-۱}=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

با مساوی قرار دادن ضابطهٔ تابع با وارون آن نقطهٔ تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲+\cancel{۴x}-\cancel{۴x}-۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=-۱\\x=+۴\end{cases}$$

۶۵ گزینه ۱

اگر نمودار $y=x^۲-x-۳$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی انتقال دهیم، $f(x)=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به‌طرف yهای منفی منتقل می‌کنیم، $g(x)=f(x)-۹$ به دست می‌آید.

$$g(x)=x^۲+۴x+۴-x-۲-۳-۹=x^۲+۳x-۱۰$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^۲+۳x-۱۰<۰\Rightarrow (x-۲)(x+۵)<۰\Rightarrow -۵<x<۲$$

۶۶ گزینه ۴

$$(x+۱)f(x)\geq ۰$$

$$(x+۱)f(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\\f(x)=۰\Rightarrow x=-۳,-۱,۲\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۳		-۱		۲		$+\infty$
$(x+۱)f(x)$		+	۰	−	۰	−	۰	+	

دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty,-۳]\cup[۲,+\infty)\cup\{-۱\}$ است که طبق گفتهٔ مسئله، دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای به‌صورت $\mathbb{R}-(-۳,۲)$ خواهد بود.

۶۷ گزینه ۲

گام اول

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x) = x^{۴} - ax^{۳} + x^{۲} + ۲ax + ۱$ بر $x + ۱$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-۱)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow P(-۱) = ۴$$

$$P(-۱) = (-۱)^{۴} - a(-۱)^{۳} + (-۱)^{۲} + ۲a(-۱) + ۱ = ۴ \Rightarrow ۱ + a + ۱ - ۲a + ۱ = ۴ \Rightarrow -a + ۳ = ۴$$
$$\Rightarrow a = ۳ - ۴ = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

۶۸ گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x - ۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴) = ۳$.
باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x + ۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲) = ۱$.
حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^{۲}) + ۴p(-x)$ بر $x - ۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = ۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^{۲}) + ۴p(-x) = p(۲^{۲}) + ۴p(-۲)$$
$$= p(۴) + ۴p(-۲) = ۳ + ۴ \times ۱ = ۷$$

۶۹ گزینه ۴

نیمساز ناحیهٔ دوم : $y = -x \ ; \ x < ۰$

نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-۱}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$
$$\Rightarrow -x + \frac{۱}{۲x} = x \Rightarrow \frac{۱}{۲x} = ۲x \Rightarrow ۴x^{۲} = ۱ \Rightarrow x^{۲} = \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x<۰} x = -\frac{۱}{۲}$$

۷۰ گزینه ۴

راه‌حل اول: ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(16)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x)=f(3x-4) \Rightarrow y=f(3x-4)$$

اگر تساوی $g(x)=y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y)=x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطهٔ تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y=f(3x-4) \Rightarrow f^{-1}(y)=f^{-1}(f(3x-4))=f^{-1}(y)=3x-4$$
$$\Rightarrow 3x=f^{-1}(y)+4 \Rightarrow x=\frac{f^{-1}(y)+4}{3} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}(x)+4}{3}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(16)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(16)$ را حساب می کنیم:

$$f^{-1}(x)=x+\sqrt{x} \xrightarrow{x=16} f^{-1}(16)=16+\sqrt{16}=16+4=20$$
$$g^{-1}(16)=\frac{20+4}{3}=\frac{24}{3}=8$$

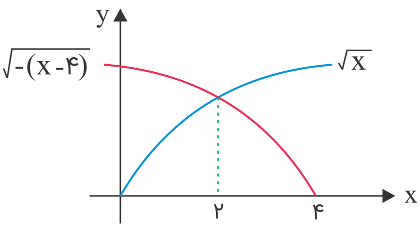
راه‌حل دوم: فرض می‌کنیم $g^{-1}(16)=a$، پس داریم: $g(a)=16$

$$g(x)=f(3x-4) \Rightarrow g(a)=f(3a-4)=16 \Rightarrow f^{-1}(16)=3a-4$$
$$f^{-1}(16)=16+\sqrt{16}=20=3a-4 \Rightarrow a=\frac{24}{3}=8$$

۷۱ گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}} \sqrt{-(x-4)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



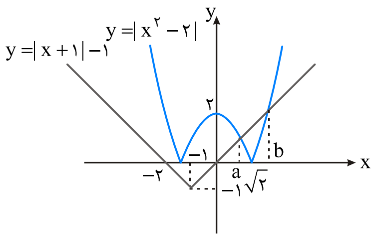
$$\sqrt{x}=\sqrt{-(x-4)} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x|=|-(x-4)|=|x-4|$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=x-4 \Rightarrow 0=-4 & \times \\ x=-x+4 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین $x=2$ محور تقارن دو نمودار است.

۷۲

گزینه ۳

دو منحنی $y_۱ = |x+۱| - ۱$ و $y_۲ = |x^۲ - ۲|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a، $۰ < x < \sqrt{۲}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^۲ - ۲| = |x+۱| - ۱ \Rightarrow -(x^۲ - ۲) = x + ۱ - ۱ \Rightarrow -x^۲ + ۲ = x \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۱ \end{cases} \xrightarrow{۰<x<\sqrt{۲}} a = ۱$$

برای یافتن b , $x > \sqrt{۲}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^۲ - ۲ = x + ۱ - ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases} \xrightarrow{b>\sqrt{۲}} b = ۲$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = (a, b) = (۱, ۲) \Rightarrow \frac{a+b}{۲} = \frac{۲+۱}{۲} = ۱/۵$$

۷۳

گزینه ۴

گام اول

تابع دوضابطه‌ای است. برای محاسبهٔ $f(۱)$ از ضابطهٔ پایین و برای محاسبهٔ $f(۵)$ از ضابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم.

گام دوم

$$x > ۳ : f(x) = x - \sqrt{x+۴} \Rightarrow f(۵) = ۵ - \sqrt{۵+۴} = ۵ - \sqrt{۹} = ۵ - ۳ = ۲$$

$$x \leq ۳ : f(x) = ۲x + ۳ \Rightarrow f(۱) = ۲(۱) + ۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

پس مقدار $f(f(۵)) + f(f(۱))$ برابر است با:

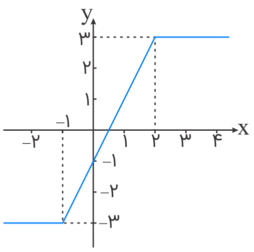
$$f(f(۵)) + f(f(۱)) = f(۲) + f(۵) = ۲(۲) + ۳ + ۲ = ۴ + ۳ + ۲ = ۹$$

۷۴ گزینه ۳

x		-۱		۲	
x+۱	-	۰	+		+
x-۲	-		-	۰	+

$$x \leq -۱ : f(x) = -x - ۱ + x - ۲ = -۳$$
$$-۱ < x \leq ۲ : f(x) = x + ۱ + x - ۲ = ۲x - ۱$$
$$x > ۲ : f(x) = x + ۱ - x + ۲ = ۳$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصلهٔ $(-۱, ۲)$ اکیداً صعودی است.

۷۵ گزینه ۴

در توابع شامل قدر مطلق بهتر است ابتدا تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم. باتوجه‌به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق، ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده به دست می‌آوریم. سپس هرکدام از ضابطه‌ها را که یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر بود انتخاب کرده و ضابطهٔ تابع معکوس را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = ۲x - |۴ - ۲x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \Rightarrow ۴ - ۲x < ۰ \Rightarrow |۴ - ۲x| = ۲x - ۴ \Rightarrow f(x) = ۲x - ۲x + ۴ = ۴ \\ x \leq ۲ \Rightarrow ۴ - ۲x \geq ۰ \Rightarrow |۴ - ۲x| = ۴ - ۲x \Rightarrow f(x) = ۲x - ۴ + ۲x = ۴x - ۴ \end{cases}$$

ضابطهٔ $f(x) = ۴$ یک‌به‌یک نیست، پس وارون ندارد؛ پس تابع فقط روی بازهٔ $(-\infty, ۲]$ معکوس‌پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$x \in (-\infty, ۲] \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow ۴x \leq ۸ \Rightarrow ۴x - ۴ \leq ۴ \Rightarrow f(x) \leq ۴$$

برد تابع f بازهٔ $(-\infty, ۴]$ به دست آمد. پس دامنهٔ $f^{-۱}$ نیز بازهٔ $(-\infty, ۴]$ خواهد بود.

$$y = ۴x - ۴ \Rightarrow y + ۴ = ۴x \Rightarrow x = \frac{y + ۴}{۴} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x + ۴}{۴}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۴}x + ۱ \quad ; x \leq ۴$$

۷۶ گزینه ۲

گام اول

الف) ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یعنی $f(g(x))$، با جایگذاری ضابطهٔ $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می آید.
ب) می خواهیم نمودار تابع $fog(x)$ زیر محور xها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < 0$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$fog(x) = f(g(x)) = (\frac{1}{2}(x-3))^2 + \frac{1}{2}(x-3) - 2 = \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 2$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}$$

حالا مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < 0$ را تعیین می کنیم:

$$fog(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} < 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

۷۷ گزینه ۴

$$g^{-1} = \{(3,2), (2,4), (6,5), (1,3)\}$$
$$f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$$

حال $g^{-1}of$ را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 4 \\ 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 4 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g^{-1}} 5 \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-1}of = \{(1,4), (4,5)\}$$

فرض می‌کنیم که $h = g^{-1}of$ باشد. خواستهٔ مسئله $h - f$ است که باید در دامنهٔ مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{1, 4\}$$
$$h - f = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1,2), (4,-1)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{2, -1\}$ است.

۷۸

گزینهٔ ۴

گام اول

به شرط‌های اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدار x و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت‌هایی که $2x + y \leq 7$ می شود را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسأله به x از یک مقدار می‌دهیم و مقادیر قابل‌قبول برای y را مشخص می‌کنیم.

$$1)\ \ x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \xrightarrow{2x+y\leq 7} 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \xrightarrow{y\in N} y = 1, 2, 3, 4, 5$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی موردنظر را دارند:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$

$$2) x = 2 \Rightarrow 2x = 4 \xrightarrow{2x+y\leq 7} 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3$$
$$\xrightarrow{y\in N} y = 1, 2, 3 \Rightarrow (2, 1), (2, 2), (2, 3) \in R$$
$$3) x = 3 \Rightarrow 2x = 6 \xrightarrow{2x+y\leq 7} 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \xrightarrow{y\in N} y = 1$$

در این حالت تنها زوج مرتب $(3, 1)$ عضو رابطهٔ R است.
به ازای مقادیر $x \geq 4$، هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی‌شود. بنابراین رابطهٔ R با زوج مرتب‌های تشکیل‌دهندهٔ آن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

پس مجموعهٔ R دارای ۹ عضو به‌صورت زوج مرتب است.

۷۹

گزینهٔ ۴

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x - 3 \geq 0$ و $x - 4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = |\underbrace{x - 3}_{\text{مثبت}}| - |\underbrace{x - 4}_{\text{منفی}}| = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} & \times \\ x = -2 & \times \end{cases}$$

هیچ‌کدام از جواب‌های به‌دست‌آمده در فاصلهٔ $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادلهٔ $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

۸۰ گزینه ۲

گام اول

اگر ضابطهٔ اول که بر روی ورودی اعمال می شود را $f(x)$ و ضابطهٔ دوم را $g(x)$ نام گذاری کنیم، شکل داده شده به صورت زیر در می آید:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_{x} \longrightarrow \underbrace{۲x+A}_{f(x)} \longrightarrow \underbrace{\sqrt{x}-۲x-۴}_{g(x)} \longrightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

ورودی یا همان x برابر ۲ و خروجی یا همان $g(f(x))$ برابر ۵- است. با توجه به ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم و مقدار A را محاسبه می کنیم.

گام دوم

به ازای $x=۲$، معادلهٔ $gof(x)=-۵$ برقرار است. A را حساب می کنیم:

$$f(x)=۲x+A\ ,\ g(x)=\sqrt{x}-۲x-۴$$

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{۲x+A}-۲(۲x+A)-۴=-۵\xrightarrow{x=۲}$$

$$\sqrt{۴+A}-۲(۴+A)-۴=-۵\xrightarrow{\sqrt{۴+A}=t}t-۲t^۲+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۲t^۲-t-۱=۰\Rightarrow(۲t+۱)(t-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{۱}{۲}\quad \text{غ ق ق}\\ t=۱\Rightarrow ۴+A=۱\Rightarrow A=-۳\end{cases}$$

۸۱ گزینه ۳

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

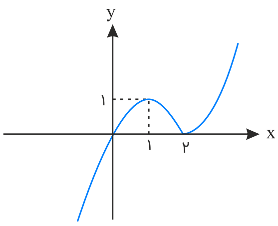
الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می کنیم $x \geq ۲$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < ۲$ باشد و ضابطهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) باتوجه‌به این نکته که $D_{f^{-۱}} = R_f$، دامنهٔ تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطهٔ آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-۲| = \begin{cases} x \geq ۲ \Rightarrow |x-۲| = x-۲ \Rightarrow y = x(x-۲) \\ x < ۲ \Rightarrow |x-۲| = -(x-۲) \Rightarrow y = -x(x-۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & ; x < ۲ \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازهٔ $[۱, ۲]$ است. برد تابع در این بازه $[۰, ۱]$ است. پس $D_{f^{-۱}} = [۰, ۱]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدودهٔ مشخص‌شده ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$۱ < x < ۲ \Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۲x \Rightarrow y = -x^۲ + ۲x \Rightarrow -y = x^۲ - ۲x$$

$$\xrightarrow{+۱} ۱ - y = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow ۱ - y = (x-۱)^۲ \Rightarrow x - ۱ = \sqrt{۱-y}$$

$$\Rightarrow x = ۱ + \sqrt{۱-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x} \; ; \; ۰ \leq x \leq ۱$$

۸۲ گزینه ۴

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدر مطلق ابتدا باتوجه‌به ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق، ضابطهٔ تابع را به‌صورت ساده‌شده می‌نویسیم.

ب) تعیین می‌کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x، $f^{-1}(x)$ و به جای y، x را جایگزین می‌کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنهٔ تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x)=|۲x-۶|-|x+۴|+x$$

$$=\begin{cases} x<-۴ : -(۲x-۶)+(x+۴)+x=۱۰ \\ -۴\leq x\leq ۳ : -(۲x-۶)-(x+۴)+x=-۲x+۲ \\ x>۳ : (۲x-۶)-(x+۴)+x=۲x-۱۰ \end{cases}$$

تابع در بازهٔ $[-۴,۳]$ اکیداً نزولی است. ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y=-۲x+۲\Rightarrow y-۲=-۲x\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}y+۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

در ضابطهٔ تابع اصلی وقتی $-۴\leq x\leq ۳$ باشد، $-۴\leq y\leq ۱۰$ است. پس دامنهٔ تابع معکوس به‌صورت $[-۴,۱۰]$ درمی‌آید.

پس گزینهٔ ۴ درست است.

۸۳ گزینه ۳

گام اول

می‌دانیم اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع صدق کند، نقطهٔ به مختصات $A'(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x=۴\Rightarrow f(۴)=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow (۴,۲)\in f\Rightarrow (۲,۴)\in f^{-۱}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x=-۴\Rightarrow f(-۴)=-\sqrt{۴}=-۲\Rightarrow (-۴,-۲)\in f\Rightarrow (-۲,-۴)\in f^{-۱}$$

باتوجه‌به این دو مثال ضابطهٔ وارون تابع به صورت $f^{-۱}(x)=x|x|$ خواهد بود.

۸۴

گزینه ۱

برای حل این تست از دو روش استفاده می کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطهٔ تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست ها است. اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطهٔ مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می کنیم آیا با جابه جایی مؤلفه های اول و دوم، نقطهٔ جدید در ضابطهٔ تابع معکوس صدق می کند یا خیر.

روش اول:

$$y=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x\geq 0 \Rightarrow 0\leq y<1\\ \dfrac{x}{1-x} & x<0 \Rightarrow -1<y<0\end{cases}$$

$$y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow x(1-y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow y-yx=x\Rightarrow x(1+y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع معکوس به صورت $|x|<1$, $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ درمی‌آید

روش دوم:

نقطهٔ $(0,0)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق می کند. از بین گزینه ها تنها معادله ای که $x=0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطهٔ $(0,0)$ هم در ضابطهٔ آن صدق کند، ضابطهٔ $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

۸۵

گزینه ۱

اگر $x^2+x<0$ باشد، $-1<x<0$ خواهد بود، بنابراین:

$$-1<x<0\Rightarrow [x]=-1$$
$$-1<x<0\Rightarrow 0<x^2<1\Rightarrow [x^2]=0$$
$$-1<x<0\Rightarrow -1<x^3<0\Rightarrow [x^3]=-1$$
$$-1<x<0\Rightarrow 0<x^4<1\Rightarrow [x^4]=0$$
$$\Rightarrow [x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]=-1+0-1+0=-2$$

۸۶ گزینه ۱

راه‌حل اول:

اگر تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f\left(x\right)=-(x-۳)^۲+۲\left(x-۳\right)+۵$ تبدیل می‌شود و اگر تابع $f\left(x\right)$ را دو واحد به سمت yهای منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطهٔ $g\left(x\right)=f\left(x\right)-۲$ خواهد بود.

$$g\left(x\right)=f(x)-۲=-(x-۳)^۲+۲\left(x-۳\right)+۵-۲=-\left(x^۲-۶x+۹\right)+۲x-۶+۵-۲$$
$$\Rightarrow g\left(x\right)=-x^۲+۶x-۹+۲x-۳=-x^۲+۸x-۱۲$$

حال باید $g\left(x\right)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y=x$ قرار گیرد.

$$g\left(x\right)>x\Rightarrow -x^۲+۸x-۱۲>x$$
$$\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲<۰\Rightarrow \underbrace{\left(x-۳\right)\left(x-۴\right)}_{h(x)}<۰\quad(*)$$

x	$-\infty$		۳		۴		$+\infty$
h(x)		+	۰	−	۰	+	

$$h\left(x\right)<۰\Rightarrow x\in\left(۳,۴\right)$$

راه‌حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم: $x=۴$ ، داریم: $۰<۰$ که غیرقابل‌قبول است، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

۸۷ گزینه ۱

با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $f(g(x))$، تابع $f(g(x))$ را بر حسب تابع $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس بدون این که ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین کنیم، x را برابر ۲- در نظر گرفته و مقدار $g(-۲)$ را حساب می کنیم.

$$f(x)=۲x^۲+۴\,,\;\; f(g(x))=۴x^۲+۶x\Rightarrow ۲(g(x))^۲+۴=۴x^۲+۶x$$
$$\xrightarrow{x=-۲} ۲(g(-۲))^۲+۴=۴(-۲)^۲+۶(-۲)=۴(۴)+۶(-۲)=۱۶-۱۲=۴$$
$$\Rightarrow ۲(g(-۲))^۲+۴=۴\Rightarrow ۲(g(-۲))^۲=۰\Rightarrow (g(-۲))^۲=۰\Rightarrow g(-۲)=۰$$

۸۸

گزینه ۲

گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(۳)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی‌تر می‌شود.) ضابطهٔ $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حال ما مقدار $f(۳)$ را می‌خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای x به‌دست‌آمده، مقدار $f(۳)$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

$$g(x) = ۲x - ۱\ ,\ \ fog(x) = \frac{x}{x-۳} \Rightarrow f(۲x-۱) = \frac{x}{x-۳}$$

$$۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow[x=۲]{f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}} f(۳) = \frac{۲}{۲-۳} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$

۸۹

گزینه ۳

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ;x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ;x \notin \mathbb{Z}\ (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطهٔ $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow g(f(x)) = g(۰) \xrightarrow{g(x)=x^۲+x-۲} g(۰) = ۰ + ۰ - ۲ = -۲$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطهٔ $g(f(x)) = -۲$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -۱ \Rightarrow g(f(x)) = g(-۱)$$
$$\xrightarrow{g(x)=x^۲+x-۲} g(-۱) = (-۱)^۲ + (-۱) - ۲ = ۱ - ۱ - ۲ = -۲ \Rightarrow g(f(x)) = -۲$$

پس رابطهٔ $g(f(x)) = -۲$ به ازای تمام xهای صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

۹۰

گزینه ۴

گام اول

مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x) > \frac{۷}{۲}$ را به دست می آوریم.

گام دوم

$$f(x) > \frac{۷}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۶ > \frac{۷}{۲} \xrightarrow{\times ۲} -x^۲ + ۴x + ۱۲ > ۷$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۴x - ۵ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۵ \Rightarrow x \in (-۱, ۵)$$

بنابراین بازهٔ (a, b) به صورت $(-۱, ۵)$ در آمده و بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$b - a = ۵ - (-۱) = ۵ + ۱ = ۶$$

۹۱

گزینه ۴

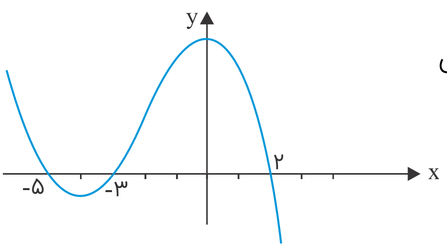
گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq ۰$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-۲)$، کافی است نمودار تابع $f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار تابع $f(x-۲)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل‌قبول است پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-۵, -۳] \cup [۰, ۲]$

۹۲

گزینه ۱

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰$، بنابراین:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ + a\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ - ۳\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right) + a\left(\frac{۱}{۸}\right) + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۸} + \frac{a}{۸} - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۷$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x + ۲$ برابر با $P(-۲)$ است، پس داریم:

$$P(x) = ۲x^۴ + ۷x^۳ + ۲x^۲ - ۳x$$
$$\Rightarrow P(-۲) = ۲(-۲)^۴ + ۷(-۲)^۳ + ۲(-۲)^۲ - ۳(-۲) = ۳۲ - ۵۶ + ۸ + ۶ = -۱۰$$

۹۳

گزینه ۳

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴,۲) \in fog$ و $(۴,۱) \in gof$ است. $(۴,۲) \in fog$ است، یعنی $f(g(۴)) = ۲$ و $(۴,۱) \in gof$ است. یعنی $g(f(۴)) = ۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴)) = ۲$ و $g(f(۴)) = ۱$:

$$f(g(۴)) = ۲ \xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴) = ۳ \xrightarrow{(a,۳)\in g} a = ۴$$
$$g(f(۴)) = ۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵) = ۱ \xrightarrow{(b,۱)\in g} b = ۵$$

پس دوتایی مرتب (a,b) به صورت $(۴,۵)$ درمی‌آید.

۹۴

گزینه ۱

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-۱} = \{(-۱,۲),(۴,-۱),(-۲,۳),(-۳,-۴)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x > ۰$، مثبت و به ازای مقادیر $x < ۰$، منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -۲ \Rightarrow \sqrt{-a} = ۲ \Rightarrow a = -۴$$

۹۵

گزینه ۴

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب‌ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آن‌ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع‌بودن در حل این گونه سؤال ها فراموش نشود. این که زوج مرتب‌ها نباید مؤلفهٔ اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود.

در رابطهٔ داده شده دو زوج مرتب $(۳,۲)$ و $(۳,a^۲-a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهلهٔ اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a = -۱ \Rightarrow (-۱,۵) \in f \;,\; (-۱,۴) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳,۲) \in f \;,\; (b,۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع f یک به یک است}} b = ۳$$

پس دوتایی (a,b) به صورت $(۲,۳)$ درمی آید.

۹۶ گزینه ۳

تست ضابطهٔ $f(f(x))$ یا همان $fof(x)$ را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(f(x))$، ابتدا باید ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه‌به آن، ضابطهٔ $fof(x)$ را تعیین کنیم.

ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = ۲ - |x - ۲| = \begin{cases} x \geq ۲ : x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow f(x) = ۲ - x + ۲ = ۴ - x \\ x < ۲ : x - ۲ < ۰ \Rightarrow f(x) = ۲ + x - ۲ = x \end{cases}$$

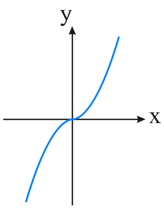
ضابطهٔ $f(f(x))$ را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

$$x \geq ۲ : f(f(x)) = ۲ - |۴ - x - ۲| = ۲ - |۲ - x|$$
$$\xrightarrow[۲-x<۰]{x\geq ۲} f(f(x)) = ۲ + ۲ - x = ۴ - x = f(x)$$
$$x < ۲ : f(f(x)) = ۲ - |x - ۲| \xrightarrow[x-۲<۰]{x<۲} ۲ + x - ۲ = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$$

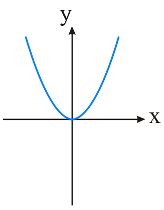
در هر دو حالت ضابطهٔ $f(f(x))$ برابر ضابطهٔ $f(x)$ شد.

۹۷ گزینه ۳

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^۳|$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y = x^۳$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور xها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



$f(x) = x^۳$



$f(x) = |x^۳|$

با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، درنتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینهٔ ۳ می‌تواند درست باشد.

۹۸ گزینه ۱

$$f^{-1} = \{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$
$$g = \{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{g} \times \\ ۵ \xrightarrow{f^{-1}} ۲ \xrightarrow{g} ۳ \\ ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۳ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۶ \xrightarrow{f^{-1}} ۴ \xrightarrow{g} ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow gof^{-1} = \{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$

حال اگر فرض کنیم $h = gof^{-1}$ باشد، خواستهٔ مسئله $\frac{g}{h}$ است که باید دامنه‌های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h \cap D_g = \{۵,۴\}$$
$$\frac{g}{h} = \left\{(۵,\frac{۶}{۳}),(۴,\frac{۲}{۱})\right\} = \{(۵,۲),(۴,۲)\}$$

۹۹ گزینه ۳

$$f(x) = ۲ - |x+۱| = \begin{cases} x+۳ & ;x \leq -۱ \\ -x+۱ & ;x > -۱ \end{cases}$$
$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} ۰ & ;x \leq ۰ \\ ۲x & ;x > ۰ \end{cases}$$

$$y = (\frac{f}{g})(x) = \frac{۲-|x+۱|}{x+|x|} = \begin{cases} \text{ت.ن} & ;x \leq ۰ \\ \frac{۱-x}{۲x} & ;x > ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} \quad ;x > ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x} - \frac{۱}{۲} > -\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow y > -\frac{۱}{۲} \Rightarrow R_y = (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

۱۰۰ گزینه ۴

گام اول

در تابع f و g به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به ما داده شده و تابع gof^{-1} را می‌خواهند، پس ابتدا باید تابع f^{-1} را با زوج مرتب‌هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب‌های تابع f، جای مؤلفه های اول و دوم را باهم عوض کنیم. پس باتوجه‌به دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ و زوج مرتب‌های تابع $g(x)$ تابع gof^{-1} را به دست می‌آوریم.

گام دوم

برای حل تست اول باید f^{-1} را مشخص کنیم:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\} \Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}$$
$$\Rightarrow D_{f^{-۱}}=\{۲,۵,۳,-۱\}$$

حالا بررسی می‌کنیم برای هریک از اعضای $D_{f^{-1}}$، تابع gof^{-1} تعریف می‌شود یا خیر:

$$x=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲)=۱ \Rightarrow g(f^{-۱}(۲))=g(۱) \rightarrow \text{تعریف نمی شود}$$

$$x=۵ \Rightarrow f^{-۱}(۵)=۲ \Rightarrow g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳ \Rightarrow (۵,۳)\in gof^{-۱}$$

$$x=۳ \Rightarrow f^{-۱}(۳)=۰ \Rightarrow g(f^{-۱}(۳))=g(۰) \rightarrow \text{تعریف نمی شود}$$

$$x=-۱ \Rightarrow f^{-۱}(-۱)=۴ \Rightarrow g(f^{-۱}(-۱))=g(۴)=۱ \Rightarrow (-۱,۱)\in gof^{-۱}$$

بنابراین تابع gof^{-1} به‌صورت $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$ درمی‌آید.

۱۰۱ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x)=f^{-۱}(x)$$

$$g(۳)=f^{-۱}(۳)=a \Rightarrow f(a)=۳ \Rightarrow a+۲\sqrt{a}=۳ \Rightarrow a+۲\sqrt{a}-۳=۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a}-۱)(\sqrt{a}+۳)=۰\begin{cases}\sqrt{a}=۱ \Rightarrow a=۱\\ \sqrt{a}=-۳ \quad \text{غ ق ق}\end{cases} \Rightarrow g(۳)=۱$$

$$g(۱۵)=f^{-۱}(۱۵)=b \Rightarrow f(b)=۱۵ \Rightarrow b+۲\sqrt{b}=۱۵ \Rightarrow b+۲\sqrt{b}-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b}-۳)(\sqrt{b}+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{b}=۳ \Rightarrow b=۹\\ \sqrt{b}=-۵ \quad \text{غ ق ق}\end{cases} \Rightarrow g(۱۵)=۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۳)+g(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

۱۰۲ گزینه ۳

ضابطهٔ $f(x)$ را داریم. باتوجه‌به آن حاصل $f(۲x-۳)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس تابع $g(x)$ را تشکیل داده و با استفاده از ویژگی‌های جزء صحیح، برد آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}&f(x)=x-[x]\Rightarrow f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x-۳]\\&\xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{[x+k]=[x]+k} f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x]+۳=۲x-[۲x]\\&g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)=۲x-[۲x]-۲(x-[x])\\&=۲x-[۲x]-۲x+۲[x]=۲[x]-[۲x]\end{aligned}$$

از ویژگی های جزء صحیح به خاطر داشته باشید: $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$

بنابراین تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x)=۲[x]-[x]-[x+\frac{۱}{۲}]=[x]-[x+\frac{۱}{۲}]$$

قسمت اعشاری عدد x را با p نشان می‌دهیم. باتوجه‌به مقدار p، دو حالت برای $g(x)$ اتفاق می‌افتد:

$$g(x)=[x]-[x+\frac{۱}{۲}]=\begin{cases}۰ & ;۰\le p<\frac{۱}{۲}\\ -۱ & ;\frac{۱}{۲}\le p<۱\end{cases}$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر $\{-۱,۰\}$ می‌شود.

۱۰۳ گزینه ۳

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(۱)=۸$ و $P(-\frac{۱}{۲})=۵$ است. همچنین داریم:

$$P(x)=(۲x^۲-x-۱)Q(x)+R(x)=((x-۱)(۲x+۱))Q(x)+R(x)\quad ;R(x)=ax+b$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}&P(۱)=R(۱)=a+b=۸\\&P(-\frac{۱}{۲})=R(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}a+b=۵\\&\begin{cases}a+b=۸\\-\frac{۱}{۲}a+b=۵\end{cases}\Rightarrow\frac{۳}{۲}a=۳\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۸-۲=۶\end{aligned}$$

پس: $R(x)=۲x+۶$

گزینه ۱

$$y = x^{۲} - ۲x \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\left(x^{۲} - ۲x\right) = -x^{۲} + ۲x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور y ها}]{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت}} y_{۱} = -x^{۲} + ۲x + ۱۶$$

حال معادلهٔ جدید را با معادلهٔ قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطهٔ برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_{۱} \Rightarrow x^{۲} - ۲x = -x^{۲} + ۲x + ۱۶ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۴x - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ & \text{ق.ق} \\ x = -۲ & (\text{غ.ق.ق زیرا } x > ۱) \end{cases}$$

$$x = ۴ \Rightarrow y = ۸ \Rightarrow A(۴, ۸)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{۱۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۶(۱+۴)} = ۴\sqrt{۵}$$

۱۰۵ گزینه ۲

گام اول

فرض می کنیم $P(x) = x^۴ + ۴ax^۲ + ۲bx + ۱$ بر $x^۲ - ۴$ بخش‌پذیر است، پس با فرض اینکه $Q(x)$ خارج‌قسمت باشد، رابطهٔ زیر را می‌توان نوشت:

$$P(x) = Q(x)(x^۲ - ۴)$$

گام دوم

روش اول:

عبارت $P(x)$ بر $(x^۲ - ۴)$ بخش‌پذیر است. بنابراین بر $(x-۲)(x+۲)$ بخش‌پذیر بوده و حاصل $P(x)$ به ازای $x = ۲$ و $x = -۲$ برابر صفر می‌شود. $P(۲)$ و $P(-۲)$ را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم و مقدار a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$P(۲) = ۲^۴ + ۴a(۲^۲) + ۲b(۲) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۱۶ + ۱۶a + ۴b + ۱ = ۰ \Rightarrow ۴b + ۱۶a = -۱۷ \quad (I)$$

$$P(-۲) = (-۲)^۴ + ۴a(-۲)^۲ + ۲b(-۲) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۱۶ + ۱۶a - ۴b + ۱ = ۰ \Rightarrow ۱۶a - ۴b = -۱۷ \quad (II)$$

$$(I)\ ,\ (II) \Rightarrow ۴b + ۱۶a = ۱۶a - ۴b \Rightarrow ۸b = ۰ \ \Rightarrow b = ۰\ ,\quad a = -\frac{۱۷}{۱۶} \Rightarrow a + b = -\frac{۱۷}{۱۶}$$

روش دوم:

عبارت $x^۴ + ۴ax^۲ + ۲bx + ۱$ بر $x^۲ - ۴$ بخش‌پذیر است. بنابراین به ازای $x^۲ = ۴$ برابر صفر است.

$$P(x) = x^۴ + ۴ax^۲ + ۲bx + ۱ \Rightarrow P(x) = (x^۲)^۲ + ۴a(x^۲) + ۲bx + ۱$$
$$\xrightarrow{x^۲ = ۴} (۴)^۲ + ۴a(۴) + ۲bx + ۱ = ۰ \Rightarrow ۱۶ + ۱۶a + ۲bx + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲bx + ۱۶a + ۱۷ = ۰$$

حاصل عبارت فوق صفر شده است؛ پس داریم:

$$\begin{cases} ۲b = ۰ \Rightarrow b = ۰ \\ ۱۶a + ۱۷ = ۰ \Rightarrow a = \dfrac{-۱۷}{۱۶} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{-۱۷}{۱۶} + ۰ = \frac{-۱۷}{۱۶}$$

۱۰۶ گزینه ۲

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲]$$
$$x^۲ - ۱۵x > ۰ \Rightarrow x(x - ۱۵) > ۰ \Rightarrow D_g = (\infty, ۰) \cup (۱۵, +\infty)$$
$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$
$$= \left\{x | x \in (-\infty, ۰) \underset{*}{\cup} (۱۵, +\infty), \log(x^۲ - ۱۵x) \leq ۲\right\}$$
$$\log(x^۲ - ۱۵x) \leq \log_{۱۰}^{۱۰۰} \Rightarrow x^۲ - ۱۵x \leq ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۵x - ۱۰۰ \leq ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۲۰)(x + ۵) \leq ۰ \Rightarrow x \in [-۵, ۲۰]\ (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**),(*)} x \in [-۵, ۰) \cup (۱۵, ۲۰]$$

۱۰۷ گزینه ۳

دامنه تابع معکوس $(D_{f^{-1}})$ همان برد تابع اصلی (R_f) است. بنابراین برای تعیین دامنه تعریف تابع معکوس ، باید برد تابع اصلی را به دست آوریم. بعد از تعیین $D_{f^{-1}}$، ضابطهٔ تابع معکوس را مشخص می کنیم. برای یافتن ضابطهٔ تابع معکوس از رابطهٔ $y=f(x)$، x را برحسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض بنابراین ضابطهٔ تابع معکوس به صورت $y=f^{-1}(x)$ به دست می آید.

$$x^۲+۱>x^۲ \Rightarrow \sqrt{x^۲+۱}>\sqrt{x^۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲+۱}>|x|$$
$$\xrightarrow{|x|=\pm x} \sqrt{x^۲+۱}>-x \Rightarrow \sqrt{x^۲+۱}+x>۰ \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x^۲+۱}} f(x)>۰$$
$$\Rightarrow R_f=(۰,+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=(۰,+\infty)$$

دامنهٔ تابع معکوس به صورت $x>۰$ در می آید.

$$f(x)=x+\sqrt{x^۲+۱} \Rightarrow y=x+\sqrt{x^۲+۱} \Rightarrow y-x=\sqrt{x^۲+۱}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (y-x)^۲=x^۲+۱ \Rightarrow y^۲-۲xy+x^۲=x^۲+۱ \Rightarrow y^۲-۲xy=۱$$
$$\Rightarrow ۲xy=y^۲-۱ \Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{۲y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^۲-۱}{۲x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{x}), x>۰$$

۱۰۸ گزینه ۲

گام اول

باتوجه‌به اینکه $f^{-1}(g(۲a))=۶$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $g(۲a)=f(۶)$

گام دوم

$$g(x)=\frac{x}{x-۱} \Rightarrow g(۲a)=\frac{۲a}{۲a-۱}=f(۶)=۳$$
$$\Rightarrow ۲a=۳(۲a-۱) \Rightarrow ۲a=۶a-۳ \Rightarrow ۴a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۱۰۹ گزینه ۴

اصلاً نیازی به تعیین ضابطهٔ $g(x)$ نداریم. با داشتن ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $f(g(x))$، ضابطهٔ تابع $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس x را برابر ۱ قرار داده و مقدار $g(۱)$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}\ ,\ fog(x)=f(g(x))=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱} \Rightarrow \frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$$
$$\xrightarrow{x=۱} \frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱}=\frac{۱+۲}{۱+۱} \Rightarrow \frac{g(۱)+۱}{g(۱)-۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲g(۱)+۲=۳g(۱)-۳$$
$$\Rightarrow g(۱)=۳+۲=۵ \Rightarrow g(۱)=۵$$

۱۱۰ گزینه ۱

چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x+3$ به ترتیب ۱ و ۴- است، درنتیجه:

$$P(2)=1\ ,\ P(-3)=-4$$

باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر x^2+x-6 را $ax+b$ در نظر می‌گیریم.

$$P(x)=(x^2+x-6)q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases}P(2)=2a+b=1\\ P(-3)=-3a+b=-4\end{cases}\Rightarrow 5a=5\Rightarrow a=1\ ,\ b=-1$$

پس باقی‌مانده $x-1$ خواهد بود.

۱۱۱ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ تابع gof را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع gof را تعیین می‌کنیم.

$$gof(x)=g(f(x))=2^{-x+[x]}$$

می‌دانیم به ازای هر x، $0\le x-[x]<1$ است، بنابراین:

$$0\le x-[x]<1\Rightarrow -1<-x+[x]\le 0$$

برد تابع gof برابر است با:

$$-x+[x]=-1\Rightarrow 2^{-x+[x]}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$
$$-x+[x]=0\Rightarrow 2^{-x+[x]}=2^0=1\Rightarrow R_{gof}=(\frac{1}{2},1]$$

۱۱۲ گزینه ۲

$$g^{-1}of^{-1}(a)=g^{-1}(f^{-1}(a))=8\Rightarrow (f^{-1}(a),8)\in g^{-1}$$
$$\Rightarrow (8,f^{-1}(a))\in g\Rightarrow g(8)=f^{-1}(a)\quad (*)$$
$$g(x)=\sqrt{5x+9}\Rightarrow g(8)=\sqrt{49}\Rightarrow g(8)=7$$
$$\xrightarrow{(*)} f^{-1}(a)=7\Rightarrow (a,7)\in f^{-1}\Rightarrow (7,a)\in f\Rightarrow a=3$$

گزینه ۴

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را برای دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می کنیم. برای هر کدام از این دو حالت ضابطهٔ $fof(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = |x| - x \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x - x = 0 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x - x = -2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$1)\ x \geq 0 : f(x) = 0 \Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$$

$$2)\ x < 0 : f(x) = -2x \Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = f(-2x)$$

$$\xrightarrow{x<0 \Rightarrow -2x>0} f(-2x) = 0 \Rightarrow fof(x) = 0$$

بنابراین تابع $fof(x)$ به ازای تمام مقادیر x برابر صفر می شود.

۱۱۴ گزینه ۲

گام اول

معکوس تابع نمایی $y = ۲^x$، تابع لگاریتمی $y = \log_۲^x$ است. نقطهٔ برخورد این دو تابع با محورها را A و B نام گذاری کرده و فاصلهٔ دو نقطه را محاسبه می کنیم.

گام دوم

روش اول:

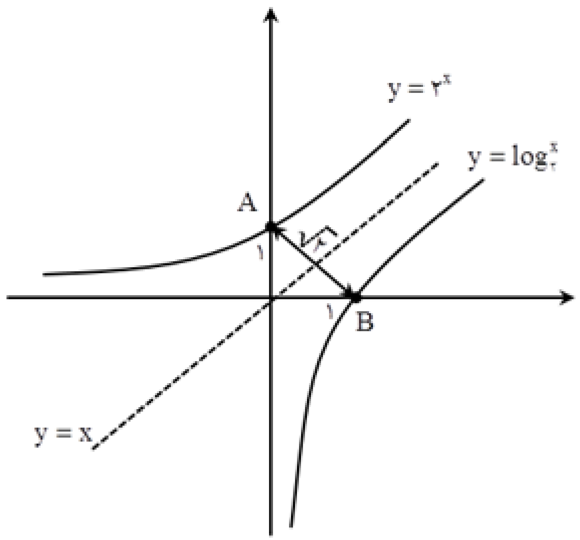
$$y = ۲^x \xrightarrow[x=۰]{\text{برخورد با محور } y} y = ۲^۰ = ۱$$

پس نقطهٔ برخورد تابع $y = ۲^x$ با محور yها نقطهٔ $A(۰, ۱)$ است. نقطهٔ برخورد تابع معکوس یا همان $y = \log_۲^x$ با محور xها نقطهٔ $B(۱, ۰)$ است. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۰-۱)^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

روش دوم:

با توجه به اینکه معکوس هر نمودار را می‌توانیم با رسم تقارن آن نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم، نمودار تابع $y = ۲^x$ را رسم کرده و با ترسیم وارون آن نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس را به‌دست می‌آوریم.



۱۱۵ گزینه ۱

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون از روی ضابطهٔ تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y = ۲ - \sqrt{x-۱} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت است}} x \geq ۱$$
$$\Rightarrow x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱} \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x-۱} \leq ۰$$
$$\Rightarrow ۲ - \sqrt{x-۱} \leq ۲ \Rightarrow y \leq ۲ \Rightarrow R_f = (-\infty, ۲] \Rightarrow D_{f^{-۱}} = (-\infty, ۲]$$

اکنون ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = ۲ - \sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱} = ۲ - y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x - ۱ = (۲-y)^۲$$
$$\Rightarrow x - ۱ = ۴ - ۴y + y^۲ \Rightarrow x = ۵ - ۴y + y^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^۲ - ۴x + ۵$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $y = x^۲ - ۴x + ۵\,;\ x \leq ۲$ است.

۱۱۶ گزینه ۱

توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را برابر می‌گذاریم:

$$fog(x) = f(x+۴) = \frac{۲(x+۴)-۱}{(x+۴)+۲} = \frac{۲x+۷}{x+۶}$$

$$gof(x) = g(\frac{۲x-۱}{x+۲}) = \frac{۲x-۱}{x+۲} + ۴ = \frac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲} = \frac{۶x+۷}{x+۲}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{۲x+۷}{x+۶} = \frac{۶x+۷}{x+۲} \Rightarrow (۲x+۷)(x+۲) = (۶x+۷)(x+۶)$$

$$۲x^۲ + ۴x + ۷x + ۱۴ = ۶x^۲ + ۳۶x + ۷x + ۴۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۳۲x + ۲۸ = ۰ \xrightarrow{\div ۴} x^۲ + ۸x + ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۷)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۷ \\ x = -۱ \end{cases}$$

۱۱۷ گزینه ۲

$\text{نیمساز ناحیهٔ چهارم} : y = -x \ ;\ x > ۰$

نمودار $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع می‌کند، بنابراین:

$$f^{-۱}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{۲}{x} = x \Rightarrow ۲x = \frac{۲}{x}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱$$

۱۱۸

گزینه ۲

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\xrightarrow{x} \underline{f} \xrightarrow{f(x)} \underline{g} \xrightarrow{g(f(x))} ۲x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطهٔ f می‌شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحلهٔ دوم $f(x)$ وارد ضابطهٔ g می‌شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = ۲x$ است.

گام دوم

ضابطهٔ $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطهٔ $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(۵)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = ۳x + ۴ \ , \ g(f(x)) = ۲x \Rightarrow ۳f(x) + ۴ = ۲x \Rightarrow ۳f(x) = ۲x - ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲}{۳}x - \frac{۴}{۳} \Rightarrow f(۵) = \frac{۲}{۳}(۵) - \frac{۴}{۳} = \frac{۱۰}{۳} - \frac{۴}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

۱۱۹

گزینه ۳

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$۴n^۲ - ۴n + ۱ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < ۴n^۲ \Rightarrow (۲n - ۱)^۲ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < (۲n)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} ۲n - ۱ < \sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱} < ۲n \Rightarrow [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] = ۲n - ۱$$

از طرف دیگر وقتی $n > ۲$ باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n^۲ - ۴n + ۴ < n^۲ - ۲n < n^۲ - ۲n + ۱ \Rightarrow (n - ۲)^۲ < n^۲ - ۲n < (n - ۱)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n - ۲ < \sqrt{n^۲ - ۲n} < n - ۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲ - ۲n}] = n - ۲$$

پس حاصل عبارت داده‌شده به ازای $n > ۲$ برابر است با:

$$[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲\,[\sqrt{n^۲ - ۲n}] = ۲n - ۱ - ۲(n - ۲) = ۲n - ۱ - ۲n + ۴ = ۳$$

روش دوم (روش عددگذاری):

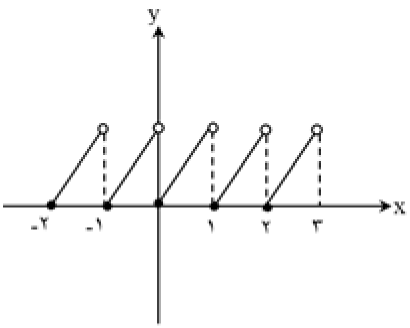
در صورت تست به این نکته اشاره‌شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده‌شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان‌تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A = [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}] \xrightarrow{n=۳} A = [\sqrt{۳۶ - ۹ + ۱}] - ۲\,[\sqrt{۹ - ۶}]$$

$$= [\sqrt{۲۸}] - ۲\,[\sqrt{۳}] = ۵ - ۲(۱) = ۵ - ۲ = ۳$$

۱۲۰ گزینه ۴

برای رسم نمودار تابع، محدودهٔ اولیهٔ x را به پنج زیربازهٔ زیر تقسیم می کنیم:



$$-۲ \leq x < -۱, -۱ \leq x < ۰, ۰ \leq x < ۱, ۱ \leq x < ۲, ۲ \leq x < ۳$$
$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x - (-۲) = x + ۲$$
$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x - (-۱) = x + ۱$$
$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x$$
$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x - (۱) = x - ۱$$
$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = x - (۲) = x - ۲$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازهٔ $\sqrt{۲}$ تشکیل‌شده است. پس دوتایی مرتب (n , L) به صورت $(۵ , \sqrt{۲})$ می شود.

۱۲۱ گزینه ۲

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۳} \approx ۱/۷$، پس:

$$f(x) = x^۲ - ۲[x] \Rightarrow f(\sqrt{۳}) = (\sqrt{۳})^۲ - ۲[\sqrt{۳}] = ۳ - ۲ \times ۱ = ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳}) = -\frac{۱}{۲} \times ۱ = -۰/۵$$
$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})) = (-۰/۵)^۲ - ۲[-۰/۵] = ۰/۲۵ - ۲(-۱) = ۲/۲۵$$

۱۲۲ گزینه ۴

چون $f(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-۲)=۰$ است.

$$f(x)=x^{۴}+ax^{۳}-۸x \Rightarrow f(-۲)=۱۶-۸a+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow ۸a=۳۲ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow f(x)=x^{۴}+۴x^{۳}-۸x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+۲$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l|l} x^{۴}+۴x^{۳}-۸x & x+۲ \\ \cline{2-2} -(x^{۴}+۲x^{۳}) & x^{۳}+۲x^{۲}-۴x \\ \cline{1-1} ۲x^{۳}-۸x & \\ -(۲x^{۳}+۴x^{۲}) & \\ \hline -۴x^{۲}-۸x & \\ -(-۴x^{۲}-۸x) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$f(x)=(x+۲)(x^{۳}+۲x^{۲}-۴x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x(x^{۲}+۲x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=-۱\pm\sqrt{۵} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ برابر با $x=-۱-\sqrt{۵}$ است.

۱۲۳ گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^{۲}-۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^{۲}-۱$ برابر صفر است.

$$x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=۱\ ,-۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱)=۰\ ,p(-۱)=۰ \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$$

$$\xrightarrow{x=۲} Q(۲)=p(۲-۱)+p(۱-۲)=p(۱)+p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(۲)=۰+۰=۰$$

۱۲۴ گزینه ۴

راه‌حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = ۰ \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینه ۲ حذف می‌شود.

$x = ۱ \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینهٔ (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{۲}{x^۲} - \frac{۹}{۲} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۴ - ۹x^۲}{۲x^۲} \geq ۰ \Rightarrow ۴ - ۹x^۲ \geq ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} x^۲ \leq \frac{۴}{۹} \xrightarrow{x \neq ۰} -\frac{۲}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳}$$

ازطرفی چون $x \neq ۰$ است، پس گزینهٔ ۴ قابل‌قبول است.

۱۲۵ گزینه ۱

برای به دست آوردن برد تابع gof ابتدا باید ضابطهٔ آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x] \ , \ g(x) = \frac{۱ - x}{x} \Rightarrow gof(x) = g(f(x)) = \frac{۱ - f(x)}{f(x)}$$
$$= \frac{۱ - x + [x]}{x - [x]} = \frac{۱}{x - [x]} - ۱$$

می‌دانیم $۰ \leq x - [x] < ۱$، ازطرفی $x - [x]$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا: .

$$۰ < x - [x] < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x - [x]} > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x - [x]} - ۱ > ۰$$
$$\Rightarrow (gof)(x) > ۰ \Rightarrow R_{gof} = (۰, +\infty)$$

۱۲۶ گزینه ۴

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به دست می آوریم (x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض می کنیم). سپس معادلهٔ $f^{-۱}(g(a)) = ۶$ را حل کرده و مقدار a را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = ۲x - ۵ \Rightarrow y = ۲x - ۵ \Rightarrow y + ۵ = ۲x \Rightarrow x = \frac{y + ۵}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x + ۵}{۲}$$
$$f^{-۱}(g(a)) = ۶ \Rightarrow \frac{g(a) + ۵}{۲} = ۶ \Rightarrow g(a) + ۵ = ۱۲ \Rightarrow g(a) = ۷ \xrightarrow{(۴,۷) \in g} a = ۴$$

۱۲۷ گزینه ۲

با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، ابتدا $f(-۱۴۴)$ و سپس $f(f(-۱۴۴))$ را حساب می کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x+۲|x|}\Rightarrow f(-۱۴۴)=\sqrt{-۱۴۴+۲|-۱۴۴|}$$
$$=\sqrt{-۱۴۴+۲۸۸}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\Rightarrow f(-۱۴۴)=۱۲$$

حالا $f(۱۲)$را محاسبه می کنیم:

$$f(f(-۱۴۴))=f(۱۲)=\sqrt{۱۲+۲|۱۲|}=\sqrt{۱۲+۲۴}=\sqrt{۳۶}=۶$$

۱۲۸ گزینه ۲

گام اول

دامنهٔ تابع gof از رابطهٔ $D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm ۱$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^۲}\Rightarrow x-x^۲\ge ۰\Rightarrow x(۱-x)\ge ۰\Rightarrow ۰\le x\le ۱$$

$$\Rightarrow D_g=[۰,۱]$$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}-\{\pm ۱\}|\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\in[۰,۱]\}$$

$$۰\le\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\le ۱\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\ge ۰\Rightarrow ۱-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۱\Rightarrow -۱<x<۱\quad(۱)\\ \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\le ۱\Rightarrow\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}-۱\le ۰\Rightarrow\frac{۱+x^۲-۱+x^۲}{۱-x^۲}\le ۰\\ \Rightarrow\frac{۲x^۲}{۱-x^۲}\le ۰\Rightarrow ۱-x^۲<۰\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)\cup\{۰\}\quad(۲)\end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲):x\in\{۰\}$$

۱۲۹ گزینه ۳

گام اول

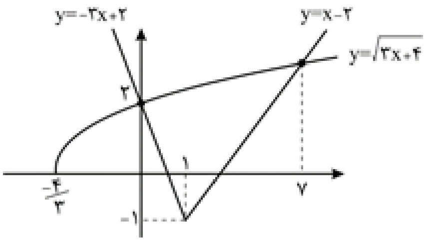
هر عبارت شامل قدر مطلق را می‌توان به ازای مقادیر بزرگ‌تر از ریشهٔ قدر مطلق و مقادیر کوچک‌تر از آن به‌طور جداگانه بررسی کرد.

گام دوم

روش اول:

منحنی مربوط به دو تابع $y=\sqrt{۳x+۴}$ و $y=۲|x-۱|-x$ را رسم می‌کنیم. مجموعه جواب ناحیه‌ای است که نمودار تابع $y=\sqrt{۳x+۴}$ بالای نمودار تابع $y=۲|x-۱|-x$ قرار می‌گیرد. باتوجه‌به گام اول، ابتدا وضعیت قدر مطلق را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$y=۲|x-۱|-x=\begin{cases}۲(x-۱)-x & ;\ x\geq ۱\\ ۲(-x+۱)-x & ;\ x<۱\end{cases}\Rightarrow\ y=\begin{cases}x-۲ & ;\ x\geq ۱\\ -۳x+۲ & ;\ x<۱\end{cases}$$



همان‌طور که از روی نمودار مشخص است مجموعه جواب نامعادلهٔ داده‌شده بازهٔ $(۰,۷)$ است و طول وسط آن $\frac{۷}{۲}$ می‌شود.

روش دوم:

عبارت رادیکالی $\sqrt{۳x+۴}$ روی بازهٔ $[-\frac{۴}{۳},+\infty)$ تعریف شده و $x=۱$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است، بنابراین مجموعه جواب نامعادله را در دو حالت $x\geq ۱$ و $\frac{-۴}{۳}\leq x<۱$ به دست می‌آوریم:

$$x\geq ۱:\quad |x-۱|=x-۱\ \Rightarrow\ \sqrt{۳x+۴}>۲(x-۱)-x\ \Rightarrow\ \sqrt{۳x+۴}>x-۲$$

در بازهٔ $[۱,۲)$ این رابطه همواره برقرار است؛ زیرا روی این بازه $x-۲<۰$ و $\sqrt{۳x+۴}>۰$ است. به ازای $x\geq ۲$ دو طرف نامساوی مثبت است بنابراین می‌توان دو طرف را به توان دو رساند، پس داریم:

$$۳x+۴>(x-۲)^۲\ \Rightarrow\ ۳x+۴>x^۲-۴x+۴\ \Rightarrow\ x^۲-۷x<۰$$
$$\Rightarrow\ x(x-۷)<۰\ \Rightarrow\ ۰<x<۷\ \xrightarrow{x\geq ۱}\ ۱\leq x<۷\qquad (I)$$

$$x<۱:\quad |x-۱|=-(x-۱)=-x+۱\ \Rightarrow\ \sqrt{۳x+۴}>۲(-x+۱)-x$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{۳x+۴}>-۲x+۲-x\ \Rightarrow\ \sqrt{۳x+۴}>-۳x+۲$$

درمحدودهٔ $-\frac{۴}{۳}\leq x\leq ۰$ نامعادلهٔ $\sqrt{۳x+۴}>-۳x+۲$ برقرار نیست پس جواب نامعادله را در محدودهٔ $۰<x<۱$ بررسی می‌کنیم. باتوجه‌به اینکه به ازای $۰<x<۱$، $\left|\sqrt{۳x+۴}\right|>|-۳x+۲|$ است پس می‌توان دو طرف نامساوی را به

توان دو رساند:

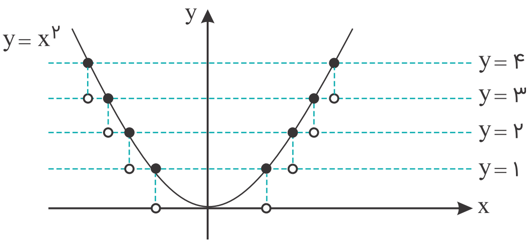
$$۳x + ۴ > (۲ - ۳x)^۲ \Rightarrow ۳x + ۴ > ۹x^۲ - ۱۲x + ۴ \Rightarrow ۹x^۲ - ۱۵x < ۰$$
$$\Rightarrow ۳x(۳x - ۵) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < \frac{۵}{۳} \xrightarrow{۰<x<۱} ۰ < x < ۱ \, (II)$$

اجتماع دو بازهٔ (I) و (II)، بازهٔ $۰ < x < ۷$ می‌شود که طول وسط این بازه برابر $\frac{۷}{۲}$ است.

۱۳۰

گزینه ۴

اول نمودار تابع $y = x^۲$ را در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ رسم می کنیم.
برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^۲]$ از روی نمودار تابع $y = x^۲$ در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + ۱$ $(k \in \mathbb{Z})$ قرار می گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم. درنهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^۲]$ در بازهٔ $x \in (-۲ , ۲)$ از هفت پاره خط تشکیل‌شده است.

۱۳۱

گزینه ۲

$$f(x) = (x - ۱)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x - ۱)^۲ = -(x + ۱)^۲$$
$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x + ۱)^۲ + ۴$$

حال باید طول نقطهٔ تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x - ۱)^۲ = -(x + ۱)^۲ + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = -(x^۲ + ۲x + ۱) + ۴$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm ۱$$

۱۳۲ گزینه ۳

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطهٔ $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطهٔ $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}\Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}=\sqrt{|-x+۲|-x}$$

$$|-x+۲|-x\geq ۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x>۲: -x+۲<۰\Rightarrow |-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow x-۲-x\geq ۰\Rightarrow -۲\geq ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \\ x\leq ۲: -x+۲\geq ۰\Rightarrow |-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow -x+۲-x\geq ۰\Rightarrow -۲x+۲\geq ۰ \\ \Rightarrow ۲x\leq ۲\Rightarrow x\leq ۱ \end{cases}$$

با توجه به بازهٔ اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$، به صورت $x\leq ۱$ در می آید.

۱۳۳ گزینه ۲

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفهٔ اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفهٔ اول آن‌ها باهم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

$$A=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$$

$$(۳,m^۲),(۳,m+۲)\in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^۲=m+۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} m=۲ \\ m=-۱\end{cases}$$

مقادیر به‌دست‌آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m=۲\Rightarrow A=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۳,۲),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

به ازای $m=۲$ دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,۴)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m=-۱\Rightarrow A=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m=-۱$ تنها مقدار قابل‌قبول برای m است.

۱۳۴ گزینه ۲

$$f(۶) = f(-\frac{۱}{۴}) = ۰$$

$$f(g(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۶ \\ g(x) = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = ۶ \\ x - \sqrt{x} = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - ۶ = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲) = ۰ \xrightarrow{t>۰} t = ۳ \xrightarrow{x=t^۲} x = ۹$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow (t - \frac{۱}{۲})^۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=t^۲} x = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع fog، محور xها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

۱۳۵ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-۱}(x)$$

$$g(۶) = f^{-۱}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۲)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \\ \sqrt{a} = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۶) = ۴$$

$$g(۱۲) = f^{-۱}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} + ۴)(\sqrt{b} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -۴ \quad \text{غ ق ق} \\ \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow g(۱۲) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

۱ تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

۱) ۱۸۴۸ ۲) ۱۷۹۲

۳) ۱۷۴۸ ۴) ۱۶۵۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۵

۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳ تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸ ۲) ۹۵۲

۳) ۹۶۸ ۴) ۹۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۴ به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر آنان، نخواهند باهم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷

۳) ۹۱ ۴) ۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ $SYSTEM$ به‌طوری‌که S ها کنار هم نباشند کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶

۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ اگر $\frac{P\ (n,۴)}{C\ (n-۱,۴)} = ۲۶$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۵۲

۲) ۵۳

۳) ۵۴

۴) ۵۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۷ در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو نفر موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱) ۲۰

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۸ با جابه جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به‌طوری که رقم‌های ۲ ، یک‌درمیان قرار بگیرند؟

۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۹ از ده پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

۱) ۲۵

۲) ۳۲

۳) ۳۰

۴) ۳۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۰ با ارقام ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ چند عدد سه‌رقمی با شرط " رقم یکان > رقم دهگان > رقم صدگان" می‌توان نوشت؟

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۱ حروف کلمهٔ $LAGRANGE$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰

۲) ۵۴۰

۳) ۷۲۰

۴) ۱۴۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۲ گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخهٔ مختلف موجود باشد؟

۱) ۱۲۶
۲) ۱۴۰
۳) ۱۵۴
۴) ۱۶۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۳ از هریک از ۸ مدرسهٔ علاقمند، ۶ نفر برای بازی تنیس چهار نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟ (بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود)

۱) ۴۲۰۰
۲) ۵۴۰۰
۳) ۵۶۰۰
۴) ۶۳۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۴ از هریک از ۶ منطقهٔ کشوری ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب نمود؟

۱) ۵۷۶۰۰
۲) ۶۷۵۰۰
۳) ۷۵۶۰۰
۴) ۷۶۵۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۵ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۷۲
۲) ۸۴
۳) ۹۶
۴) ۱۰۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۱۶ از هریک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوبه‌دو غیر هم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

۱) ۱۶۰
۲) ۳۲۰
۳) ۴۸۰
۴) ۶۴۰

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۵
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۷ از هر ۵ مدرسهٔ نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به‌طوری‌که هیچ دو نفر انتخاب‌شده از یک مدرسه نباشند؟

۱) ۱۳۵
۲) ۲۷۰
۳) ۳۲۰
۴) ۶۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۸ با ارقام متمایز ۹ ,... ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ به چند طریق می‌توان یک عدد چهاررقمی ساخت، به‌طوری‌که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰   ۲) ۷۲۰

۳) ۷۸۰   ۴) ۹۶۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۹ با ارقام ۹ و ... و ۳ و ۲ و ۱ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج‌رقمی ساخت به‌طوری که درست دو رقم آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰۰   ۲) ۷۲۰۰

۳) ۸۴۰۰   ۴) ۹۶۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۰ از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به‌طوری که لااقل ۲ نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟

۱) ۲۵   ۲) ۳۰

۳) ۳۵   ۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱ گزینه ۱

رقم ۵ می‌تواند در جایگاه‌های هزارگان، صدگان، دهگان یا یکان باشد.
اگر رقم ۵ در جایگاه هزارگان باشد:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{۵ باشد}}}{\underline{\ ۱\ }}\ \ \underline{\ ۹\ }\ \ \underline{\ ۸\ }\ \ \underline{\ ۷\ } :\ ۹ \times ۸ \times ۷ = ۵۰۴$$

اگر رقم ۵ در یکی از جایگاه‌های صدگان، دهگان یا یکان باشد:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{صفر نباید} \\ \text{باشد}}}{\underline{\ ۸\ }}\ \ \underbrace{\overbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}^{۱\times۸\times۷}}_{\substack{\downarrow \\ \text{یک ۵} \\ \text{داشته باشد}}} :\ ۸ \times ۱ \times ۸ \times ۷ \times ۳ = ۱۳۴۴$$

پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$۱۳۴۴ + ۵۰۴ = ۱۸۴۸$$

۲ گزینه ۴

برای توزیع کتاب دو حالت زیر را داریم:
۱) یک نفر فقط یک کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام دو کتاب داشته باشند:
ابتدا دو نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام دو کتاب می‌دهیم. سپس یک کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.
<u>یک کتاب</u> <u>دو کتاب</u> <u>دو کتاب</u>

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱} = ۳ \times \frac{۵!}{۲!۳!} \times ۳ \times ۱ = ۹۰$$

۲) یک نفر سه کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام یک کتاب داشته باشند:
ابتدا دو نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام یک کتاب می‌دهیم. سپس سه کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.
<u>یک کتاب</u> <u>یک کتاب</u> <u>سه کتاب</u>

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳} = ۳ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۶۰$$

در انتها تعداد حالت‌های به‌دست‌آمده را باهم جمع می‌کنیم:

$$۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰$$

۳ گزینه ۲

برای اینکه عددی بر ۵ بخش‌پذیر باشد، رقم یکان آن باید ۰ یا ۵ باشد؛ پس مسئله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر رقم یکان صفر باشد:

$$\underset{\text{صفر نباید باشد}}{\underline{9}}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underset{\text{صفر باشد}}{\underline{1}}\ :\ 9\times 8\times 7 = 72\times 7 = 504$$

حالت دوم: اگر رقم یکان ۵ باشد:

$$\underset{\text{صفر نباید باشد}}{\underline{8}}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underset{\text{۵ باشد}}{\underline{1}}\ :\ 8\times 8\times 7 = 64\times 7 = 448$$

پس تعداد کل حالات $504 + 448 = 952$ است.

۴ گزینه ۳

برای اینکه دو نفر مشخص باهم در مهمانی نباشند دو حالت زیر را داریم:

۱) از آن دو نفر فقط یکی در مهمانی باشد.

۲) هیچ‌کدام از آن دو نفر در مهمانی نباشند.

بنابراین داریم:

$$\underbrace{\binom{2}{1}\binom{7}{4}}_{\text{حالت اول}} + \underbrace{\binom{2}{0}\binom{7}{5}}_{\text{حالت دوم}} = 2\times\frac{7!}{4!3!} + 1\times\frac{7!}{5!2!}$$

$$2\times\frac{7\times\cancel{6}\times 5}{\cancel{6}} + \frac{7\times\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} = 70 + 21 = 91$$

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{۲ نفر}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{۷ نفر}}$$

۵ گزینه ۳

گام اول

الف) در این تست یک کلمهٔ ۶حرفی با دو حرف تکراری داریم پس تعداد کل کلمه‌ها برابر $\frac{6!}{2!}$ می‌شود.

ب) می‌خواهیم Sها کنار هم نباشند. برای راحتی کار ابتدا حالت‌هایی که Sها کنار هم باشند را در نظر می‌گیریم، سپس آن را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

گام دوم

$$\text{تعداد کل کلمات} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

$$\text{تعداد کلماتی که دو حرف S کنار هم باشند} : \underbrace{SS}\,YTEM \Rightarrow 5! = 120$$

$$\text{تعداد کلماتی که دو حرف S کنار هم نباشند} = 360 - 120 = 240$$

۶ گزینه ۱

در حل تست به دو نکتهٔ زیر توجه کنید.

الف) $P\ (n,r)$ یعنی تبدیل r شئ از میان n شئ که از رابطهٔ $P\ (n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ محاسبه می‌شود.

ب) $C\ (n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ یعنی ترکیب r شئ از بین n شئ که از رابطه‌ی $C\ (n,r) = \dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$ به دست می‌آید.

$P\ (n,۴)$ و $C\ (n-۱,۴)$ را جایگذاری کرده و مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P\ (n,۴)}{C\ (n-۱,۴)} = \frac{\dfrac{n!}{(n-۴)!}}{\dfrac{(n-۱)!}{(n-۱-۴)! \times ۴!}} = \frac{\dfrac{n!}{(n-۴)!}}{\dfrac{(n-۱)!}{(n-۵)! \times ۴!}}$$

$$= \frac{n! \times (n-۵)! \times ۴!}{(n-۴)! \times (n-۱)!} = \frac{n \times (n-۱)! \times (n-۵)! \times ۲۴}{(n-۴) \times (n-۵)! \times (n-۱)!} = ۲۶$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴n}{n-۴} = ۲۶ \Rightarrow ۲۴n = ۲۶n - ۱۰۴ \Rightarrow ۲n = ۱۰۴ \Rightarrow n = ۵۲$$

۷ گزینه ۳

گام اول

الف) ۵ نفر برای سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. دو نفر a و b را جدا کرده ایم. اگر قرار باشد بین دو نفر a و b فقط یک نفر سخنرانی کند، باید از ۳ نفر باقی مانده یک نفر انتخاب شود و بین این دو نفر قرار گیرد، یعنی انتخاب یک نفر از ۳ نفر باقی مانده.

ب) در صورت تست اشاره نشده است که ابتدا شخص a سخنرانی می‌کند یا شخص b، پس در محاسبهٔ تعداد حالت‌های ممکن باید جابه‌جایی این دو نفر را هم درنظر بگیریم (پس !۲ حالت برای جابه‌جایی a و b).

ج) حالا a و b و فردی که بین آن‌ها قرار می‌گیرد را یک نفر فرض می‌کنیم که با دو نفر باقی مانده می‌توانند جابه‌جا شوند (!۳ حالت داریم).

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر بین a,b}} \times \overbrace{۲!}^{\text{جابجایی a,b}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی ترکیب ۳ نفر با ۲نفر دیگر}} = ۳ \times ۲ \times ۶ = ۳۶$$

۸ گزینه ۲

گام اول

سه رقم ۲ و سه رقم غیر ۲ داریم (۶ و ۷ و ۵). اگر قرار باشد این ارقام به‌صورت یک‌درمیان کنار هم قرار بگیرند، دو حالت وجود دارد:

حالت اول این است که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ شروع شود و حالت دوم این‌که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ تمام شود. در هرکدام از حالت‌ها سه رقم باقی مانده یعنی ۶ و ۷ و ۵ می‌توانند به!۳ حالت در جاهای خالی قرار گیرند.

گام دوم

حالت اول : ۲ ◯ ۲ ◯ ۲◯

۵ و ۶ و۷ در سه دایره باقی مانده : تعداد حالت ها $= ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

حالت دوم : ◯۲ ◯ ۲ ◯ ۲

۵ و ۶ و ۷ در سه دایره باقی مانده : تعداد حالت ها $= ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

پس در مجموع ۱۲ عدد داریم که در آن ارقام ۲ به‌صورت یک‌درمیان قرار گرفته باشند.

۹ گزینه ۴

گام اول

به کلمهٔ "حداقل" در صورت تست خیلی توجه کنید. چون گفته شده حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول پاسخ داده شود، یعنی ۴ تا یا بیشتر. پس دو حالت می‌تواند رخ دهد:

یک حالت این است که از ۵ پرسش و از ۵ پرسش دوم هم به ۴ پرسش پاسخ داده شود. حالت دوم این است که از ۵ پرسش اول، به هر ۵ پرسش و از ۵ پرسش دوم به ۳ پرسش پاسخ داده شود.

گام دوم

$$\text{تعداد حالت های پاسخگویی} = \underbrace{\binom{۵}{۴}\times\binom{۵}{۴}}_{\text{از۵پرسش اول۴پرسش و از۵پرسش دوم۴پرسش}} + \underbrace{\binom{۵}{۵}\times\binom{۵}{۳}}_{\text{هر۵پرسش اول و از۵پرسش دوم ۳پرسش}}$$

$$= (۵\times۵) + (۱\times۱۰) = ۲۵ + ۱۰ = ۳۵$$

۱۰ گزینه ۳

گام اول

رقم صدگان باید از ارقام یکان و دهگان بزرگ تر باشد. پس ما نمی‌توانیم دو رقم ۱ و ۳ را در جایگاه صدگان به کار ببریم. برای هریک از ارقام ۵ و ۷ و ۹ که در جایگاه صدگان قرار می‌گیرند، حالت‌های موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

گام دوم

۱) رقم صدگان ۵ : $۵۳۱ \Rightarrow$ یک حالت

۲) رقم صدگان ۷ : $۷۵۳, ۷۵۱, ۷۳۱ \Rightarrow$ سه حالت

۳) رقم صدگان ۹ : $۹۷۵, ۹۷۳, ۹۷۱, ۹۵۳, ۹۵۱, ۹۳۱ \Rightarrow$ شش حالت

تعداد کل حالت‌ها : $۱ + ۳ + ۶ = ۱۰$

راه‌حل دوم: ابتدا سه رقم متمایز از بین این ۵ رقم انتخاب می‌کنیم که به $۱۰ = \binom{۵}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. واضح است که با هر سه رقم متمایز، فقط یک عدد سه‌رقمی با شرط داده‌شده می‌توان نوشت، پس تعداد اعداد موردنظر ۱۰تا است.

۱۱ گزینه ۳

گام اول

الف) در این کلمه دو حرف یکسان A و دو حرف یکسان G مشاهده می‌شود. این حروف یکسان باید کنار هم باشند.

ب) با قرار دادن حروف یکسان در کنار هم ۶ حرف متمایز داریم. تعداد حالت‌های قرارگیری این ۶ حرف را در کنار هم حساب می‌کنیم.

ج) دقت کنید دو حرف یکسان در کنار هم فقط به یک حالت می‌توانند قرار بگیرند و دیگر بین آن‌ها جابجایی نخواهیم داشت.

گام دوم

حروف ما به این صورت در می‌آیند :

$$L\underbrace{AA}\underbrace{GG}RNE$$

تعداد حالت ها $= ۶! = ۷۲۰$

۱۲ گزینه ۳

تعداد انتخاب‌ها به‌صورت زیر است:

$$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=\frac{۸!}{۴!۴!}+\frac{۸!}{۵!۳!}+\frac{۸!}{۶!۲!}$$
$$=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵}{۴\times ۳\times ۲\times ۱}+\frac{۸\times ۷\times ۶}{۶}+\frac{۸\times ۷}{۲}=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$$

۱۳ گزینه ۴

گام اول

الف) بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود پس برای یک بازی ۲ نفر در مقابل ۲ نفر، باید از بین ۸ مدرسه دو مدرسه، انتخاب شود.

ب) هر مدرسه ۶ دانش‌آموز برای بازی تنیس دارد. از بین این ۶ نفر باید ۲ نفر برای بازی انتخاب شود، یعنی برای هریک از مدارس $\binom{۶}{۲}$ انتخاب داریم.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها}=\underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{انتخاب ۲مدرسه از ۸مدرسه}}\times\overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه اول}}\times\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه دوم}}=۲۸\times ۱۵\times ۱۵=۶۳۰۰$$

۱۴ گزینه ۲

گام اول

الف) دانش‌آموزان باید دو به دو غیر هم‌منطقه‌ای باشند. بنابراین برای داشتن ۳ دانش‌آموز باید ۳ منطقه از بین ۶ منطقهٔ کشوری انتخاب شود تا مطمئن باشیم دو دانش‌آموز هم‌منطقه‌ای نداریم.

ب) هر منطقه ۱۵ دانش‌آموز دارد که هرکدام از این ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند انتخاب شوند.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها}=\underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{انتخاب ۳منطقه ازبین ۶منطقه}}\times\underbrace{\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱}}_{\text{هرکدام از ۱۵دانش آموز این ۳منطقه می توانند دعوت شوند}}=۲۰\times ۱۵\times ۱۵\times ۱۵=۶۷۵۰۰$$

۱۵ گزینه ۳

گام اول

الف) عدد موردنظر ما چهار رقم دارد.

ب) ارقام به‌کار رفته در عدد باید متمایز باشند یعنی رقم تکراری نداشته باشیم.

ج) فقط باید از ارقام فرد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ استفاده کنیم.

د) این عدد چهاررقمی باید بزرگ تر از ۳۰۰۰ باشد یعنی در جایگاه هزارگان نمی‌شود از رقم ۱ استفاده کرد.

گام دوم

پس تعداد ارقام چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگ تر از ۳۰۰۰ برابر است با:

$$\underset{\text{یک رقم از بین ۳و۵،۷،۹}}{\overset{۴}{\downarrow}}\times\underset{\text{رقم۱به ارقام موجود اضافه می شود}}{\overset{۴}{\downarrow}}\times ۳\times ۲=۹۶$$

۱۶ گزینهٔ ۴

ابتدا از میان پنج مدرسهٔ A، B، C، D و E سه تا را انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{۵}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. حال از هرکدام از این سه مدرسهٔ انتخابی، باید فقط یک نفر را انتخاب کنیم. چون از هر مدرسه چهار نفر به اردوگاه دعوت شده‌اند؛ پس برای انتخاب یک نفر از هرکدام از سه مدرسه، چهار حالت امکان‌پذیر است. یعنی با مشخص بودن مدارس، $۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳$ حالت برای انتخاب دانش‌آموزان وجود دارد.

$$\binom{۵}{۳} \times ۴^۳ = ۱۰ \times ۶۴ = ۶۴۰$$

۱۷ گزینهٔ ۴

اول ۳تا از مدرسه‌ها را به $\binom{۵}{۳}$ طریق انتخاب می‌کنیم. بعد از هر مدرسه ۱ نفر برمی‌داریم.

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱} = ۱۰ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴۰$$

۱۸ گزینهٔ ۴

$$\underbrace{۴!}_{\text{جایگشت ۴ رقم در کنار هم}} \times \overbrace{\binom{۵}{۳}}^{\text{انتخاب سه رقم از بین ۱, ۳, ۵, ۷, ۹}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک رقم از بین ۲, ۴, ۶, ۸}} = ۴ \times ۱۰ \times ۲۴ = ۹۶۰$$

۱۹ گزینهٔ ۲

گام اول

الف) عدد ما پنج‌رقمی است پس به پنج رقم از بین نه رقم موجود نیاز داریم.

ب) در صورت تست گفته شده درست دو رقم زوج باشد یعنی برای تشکیل این عدد پنج‌رقمی، باید دو رقم از بین چهار رقم زوج و سه رقم از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم.

گام دوم

$$\text{تعداد اعداد پنج رقمی با دو رقم زوج} = \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دورقم از بین ارقام ۲و۴،۶،۸}} \times \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{سه رقم از بین ارقام ۱و۳،۵،۷،۹}} \times \underbrace{۵!}_{\text{حالت های مختلف قرار گرفتن ارقام}} = ۶ \times ۱۰ \times ۱۲۰ = ۷۲۰۰$$

۲۰ گزینهٔ ۴

گام اول

دقت کنید که گفته شده حداقل ۲ نفر از بین ۳ نفر انتخاب شده، باید از رشتهٔ تجربی باشند. دو حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول این که ۲ نفر تجربی و یک نفر ریاضی باشند و حالت دوم این که هرسه نفر تجربی باشند.

گام دوم

تعداد حالت‌های انتخاب دانش‌آموزها با شرط انتخاب حداقل ۲ دانش‌آموز تجربی برابراست با:

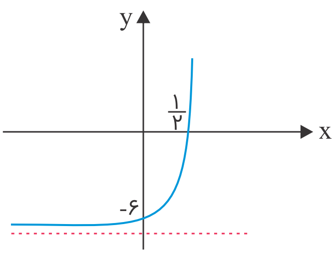
$$\underbrace{\binom{۵}{۲} \times \binom{۳}{۱}}_{\text{دو دانش آموز تجربی و یک دانش آموز ریاضی}} + \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{هر سه تجربی}} = (۱۰ \times ۳) + ۱۰ = ۳۰ + ۱۰ = ۴۰$$

۱ در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به‌جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{۱}{۳}$ غلظت اوّلیه می‌شود؟ $(\log ۲ = ۰/۳ \ , \ \log ۳ = ۰/۴۸)$

۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۳۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۹ + (\frac{۱}{۳})^{ax+b}$ است. $f(۲)$، کدام است؟



۱) ۲۳۴
۲) ۱۰۸
۳) ۷۲
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{۲^x - (\frac{۱}{۲})^x}{۲}$ را در نظر بگیرید. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_۲^{(-۱+\sqrt{۵})}$
۲) $\log_۲^{(۱+\sqrt{۵})}$
۳) $\log_۲^{(۲+\sqrt{۵})}$
۴) $\log_۲^{(۳+\sqrt{۵})}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ اگر $\log_۳^۲ = \frac{۵}{۸}$ باشد، آنگاه $\log_{۱۸}^۸$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۲}$
۲) $\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۸}{۱۱}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر موردنظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{۱}{۱۰}$ جرم باقی‌مانده را ازدست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log ۳ = ۰/۴۸)$

۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰

۳) ۲۷۰ ۴) ۲۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

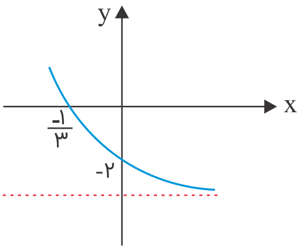
۶ اگر $\log_{۴}^{۳} = ۰/۸$ باشد، مقدار $\log_{۱۲}^{۶}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۴ + ۲^{ax+b}$ است. $f(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟



۱) ۵۴

۲) ۶۰

۳) ۴۸

۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ از معادله لگاریتمی $\log(x^۲ - x - ۶) - \log(x - ۳) = \log(۲x - ۵)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x + ۱}$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ دو تابع f و g مفروض اند، در کدام گزینه دو تابع مساوی اند؟

۱) $f(x) = ۲\log x$ و $g(x) = \log x^۲$ ۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}$ و $g(x) = ۱$

۳) $f(x) = (\sqrt{x})^۲$ و $g(x) = x$ ۴) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۰ اگر $۲^{A} = \left(\dfrac{۴\sqrt{۳۲}}{۲\sqrt{۸}}\right)^{۲}$ ، عدد A کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۶
۳) $۸\sqrt{۲}$
۴) $۱۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۱ اگر $f(x) = ۲^{x}$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(\frac{۱}{x}) - f(x)}$، به کدام صورت است؟

۱) $R - (-۱, ۱)$
۲) $[-۱, ۰) \cup (۰, ۱]$
۳) $[-۱, ۰) \cup [۱, +\infty)$
۴) $(-\infty, -۱] \cup (۰, ۱]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۲ اگر $۲^{-x} < ۰/۰۰۰۰۱$ و $\log ۲ = ۰/۳۰۱$، کوچک ترین عدد x با دو رقم اعشاری کدام است؟

۱) $۱۹/۸۹$
۲) $۱۹/۹۱$
۳) $۱۹/۹۴$
۴) $۱۹/۹۷$

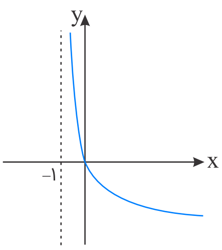
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۳ نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$، نمودار تابع $y = x^{۲} - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = \log_{۲}^{U(x)}$ است. $U(x)$ کدام است؟



۱) $x + ۱$
۲) $(x + ۱)^{-۱}$
۳) $x - ۱$
۴) $۱ - x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۵ اگر $(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲} = (۰/۴)^{۲x-۱}$ باشد، $\log_{۸}^{(۹x+۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = a.b^x \;;\; b > ۰$، داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$. مقدار $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۷ تابع $f(x) = \log_{۳}^{(ax+b)}$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ بامعنی است. اگر $f(۴) = ۲$ باشد، آن گاه $f(-\frac{۴}{۹})$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۸ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو منحنی به معادلات $y = ۲^x$ و $y = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴$ از نقطهٔ $A(۰, ۴)$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۹ اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - ۱$، از دو نقطهٔ $A\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $B(۱, ۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۰ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = A(۲)^{Bx}$ و خط به معادلهٔ $۴y = ۵x$، در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-۱}(۱۰)$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_{۲}^{(bx-۴)}$ از دو نقطهٔ $(۲, ۶)$ و $(۱۲, ۱۰)$ می‌گذرد. a کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۲ اگر $\log_b^a = \frac{۳}{۲}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^۲}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۳ از دو معادلهٔ دومجهولی $۳^{x-y} \times ۹ = ۳^{۲x+y}$ و $\log(x + ۲y) = ۱ + \log y$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱/۲
۲) ۱/۴
۳) ۱/۵
۴) ۱/۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = ۳^{Ax+B}$، نمودار تابع $y = x^۲$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۵ اگر $\log \frac{۲}{x} + \log(x + ۱) = ۱$ باشد، لگاریتم عدد x در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۲۶ اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^۳ + ۷)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۷ از تساوی $\log_x^{(x^۲+۴)} = ۱ + \log_x^۵$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۸ از دو معادلهٔ $\log(y+۲) = ۱$ و $\log(y-x) + \log(۴x+y) = ۲$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۹ از دو معادلهٔ $۴^x + ۲^x = ۷۲$ و $\log(x+۱) + \log(۲y+x^۲) = ۲$، مقدار y کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۰ از دو معادلهٔ $\log_۳^x + \log_۳^y = ۲$ و $x^۲ + y^۲ = ۴۶$، لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۱ اگر $۴^x = ۴\sqrt{۲}$ و $\log y = ۱ + \log\sqrt{x+۱}$، مقدار y کدام است؟

۱) ۷/۵
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۵
۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۲ از معادلات $۲^x \times ۸^y = ۴$ و $\log x = \log ۲ + \log y$، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۳۳ اگر $\log_۲^x + \log_۲^{(۵x+۱)} = ۲$ باشد، عدد $\frac{۴}{x}$ کدام است؟

۱) -۴
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۳۴ نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_{۲}\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ نسبت به هم چگونه اند؟

۱) $f(x)$ بالاتر
۲) $g(x)$ بالاتر
۳) منطبق‌اند
۴) فقط در یک نقطه متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۵ اگر $\log(۸۱)^{K}=\log ۳+\log\sqrt[۴]{۳}$، آنگاه لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در پایه ۲ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۶ اگر $\log ۲=k$ باشد، حاصل $\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})$، کدام است؟

۱) $۲k$
۲) $۴k$
۳) $۱+k$
۴) $۲+۴k$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۷ اگر a و b ریشه های معادلهٔ $x^{۲}-۱۰x+۰/۱=۰$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۸ اگر $۴^{a}=۲\sqrt{۲}$، لگاریتم $(۴a+۱)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۹ اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(\frac{۱}{A}-۱)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) -۳
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۴۰ اگر $A=۳^{a}$ باشد، $\log_{۳}^{۹A^{۲}}$ همواره کدام است؟

۱) $۲+۲a$
۲) $۳+۲a$
۳) $۲+a^{۲}$
۴) $۳+a^{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۴۱ از معادلهٔ لگاریتمی $\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)} - \log_{۳}^{(x+۲)} = ۱$، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایهٔ ۸، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۴۲ نمودار تابع $y = \log_{\frac{۱}{۲}}^{(ax+b)}$، محور xها رادر نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است. b کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۳ از تساوی $\log_{x}^{(x-۶)} = ۲ - \log_{x}^{(۳x+۸)}$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۴ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{۱ - \log(x^{۲} - ۳x)}$، به کدام صورت بازه‌ها است؟

۱) $[-۲, ۰) \cup (۳, ۵]$

۲) $[-۲, ۰] \cup (۳, ۵)$

۳) $[-۲, ۳)$

۴) $(۰, ۵]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

۴۵ نمودارهای دو تابع $f(x) = ۴^{x}$ و $g(x) = (\frac{۱}{۲})^{۲x} + \frac{۳}{۲}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$، کدام است؟

۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $\sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۶ کدام‌یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-۲}{x}$ برابر است؟

۱) $\log(x-۲) - \log x$

۲) $\log \frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}+۲x}$

۳) $\frac{۱}{۲} \log (\frac{x-۲}{x})^{۲}$

۴) $۲ \log \sqrt{\frac{x-۲}{x}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

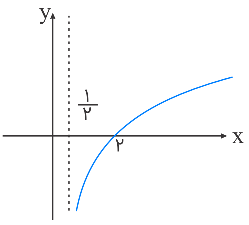
۴۷ از دو معادلهٔ دومجهولی $۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱$ و $\log y = ۲\log ۳ + \log x$، مقدار y کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۸ شکل زیر، نمودار تابع $y = -۱ + \log_b^{(۲x+a)}$ است. این منحنی خط $y = ۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟



۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۹ اگر $۳^{x^۲-۲} = ۸۱^x$ باشد، $\log_۶^{(x-۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۰ نمودارهای دو تابع $f(x) = ۳^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{۱}{۹}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند. اگر $f(۲) = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟

۱) -۳　　۲) -۲

۳) ۱　　۴) ۳

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۵۱ نمودارهای دو تابع $y = (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}$ و $y = ۳^x + \frac{۸}{۳}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $(-۱, ۱)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲　　۴) $\sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۲ از رابطهٔ $\log(۴x+۱) = \log(x+۲) + \log(۲x-۱)$، مقدار لگاریتم $(۲x+۵)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۰/۷۵
۳) ۱/۲۵
۴) ۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۳ یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می‌رسد؟ $(\log ۱۹ = ۱/۲۸۷ , \log ۲ = ۰/۳۰۱)$

۱) ۱۷
۲) ۱۸/۵
۳) ۲۱/۵
۴) ۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۴ از رابطهٔ $\log(۴x-۱) = \log(۲x-۵) + \log(x+۱)$، مقدار لگاریتم $(۲x+۱)$ در پایهٔ ۳، کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۵ جمعیت شهری با نرخ زوال یک درصد در سال، کم می‌شود. با این روند با گذشت چند سال جمعیت این شهر، نصف جمعیت فعلی آن می‌شود؟ $(\log ۹۹ = ۱/۹۹۵ \ , \ \log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۶۴
۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۶ اگر $\log ۵ = ۳k$، آنگاه $\log \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟

۱) $۱-۴k$
۲) $۲-۵k$
۳) $۱-۲k$
۴) $۱-k$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۵۷ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{۱-\log(x-۱)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(۱,۲]$
۲) $[۲,۱۰]$
۳) $[۱,۱۱)$
۴) $(۱,۱۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۵۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_{۲}^{(۳x+b)^{۲}}$، از دو نقطهٔ $(۵, ۱۱)$ و $(۲۱, ۱۵)$ می‌گذرد، a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱

گزینه ۲

در هر روز غلظت محلول $\frac{۱۰۰-۴}{۱۰۰}$ یعنی $\frac{۹۶}{۱۰۰}$ غلظت روز قبل می‌شود، داریم:

$$a_n = a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n$$

حال از معلومات سؤال نتیجه می‌گیریم که:

$$a(\frac{۹۶}{۱۰۰})^n = \frac{۱}{۳}a \Rightarrow n\log(\frac{۹۶}{۱۰۰}) = -\log ۳ \Rightarrow n(\log ۲^۵ \times ۳ - \log ۱۰^۲) = -\log ۳$$
$$\Rightarrow n(۵\log ۲ + \log ۳ - ۲) = -\log ۳ \Rightarrow n(۱/۵ + ۰/۴۸ - ۲) = -۰/۴۸ \Rightarrow n = \frac{-۰/۴۸}{-۰/۰۲} = ۲۴$$

بنابراین پس از گذشت ۲۴ روز، غلظت محلول $\frac{۱}{۳}$ غلظت اوّلیه می‌شود.

۲

گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و $(۰, -۶)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(۰, -۶) : f(۰) = -۶ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۰+b} = -۶ \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^b = ۳$$

$$\Rightarrow ۳^{-b} = ۳ \Rightarrow -b = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۹$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۳^۲ \Rightarrow ۳^{-\frac{۱}{۲}a+۱} = ۳^۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}a + ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲x-۱} \Rightarrow f(۲) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۴-۱} = -۹ + ۳^۵$$

$$= -۹ + ۲۴۳ = ۲۳۴$$

۳ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{۲^x-\left(\frac{۱}{۲}\right)^x}{۲}\xrightarrow{f^{-۱}(۲)=?}\frac{۲^x-\left(\frac{۱}{۲}\right)^x}{۲}=۲$$

$$\Rightarrow ۲^x-\frac{۱}{۲^x}=۴\xrightarrow{t=۲^x}t-\frac{۱}{t}=۴\Rightarrow t^۲-۱=۴t$$

$$\Rightarrow t^۲-۴t-۱=۰\Rightarrow \Delta=۲۰\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۲}=۲+\sqrt{۵} \\ t=\frac{۴-۲\sqrt{۵}}{۲}=۲-\sqrt{۵} \end{cases}$$

$$t=۲^x\Rightarrow x=\log_۲^t\Rightarrow \begin{cases} x=\log_۲^{(۲+\sqrt{۵})} \\ x=\log_۲^{(۲-\sqrt{۵})}<۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

جواب $x=\log_۲^{(۲-\sqrt{۵})}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا $۲-\sqrt{۵}<۰$ می‌باشد.

۴ گزینه ۲

نکته:

$$۱)\ \log_b^a=\frac{\log_x^a}{\log_x^b}(x>۰\,,x\neq۱)$$

$$۲)\ \log_a^{b^n}=n\log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_{۱۸}^{۸}=\frac{\log_۳^۸}{\log_۳^{۱۸}}=\frac{\log_۳^{۲^۳}}{\log_۳^۲+\log_۳^۹}=\frac{۳\log_۳^۲}{\log_۳^۲+\log_۳^{۳^۲}}$$

$$=\frac{۳\log_۳^۲}{\log_۳^۲+۲\underbrace{\log_۳^۳}_{۱}}=\frac{۳\left(\frac{۵}{۸}\right)}{\frac{۵}{۸}+۲}=\frac{\frac{۱۵}{\cancel{۸}}}{\frac{۲۱}{\cancel{۸}}}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

۵ گزینه ۱

مقدار اولیهٔ عنصر ۲۴ گرم است. همچنین پس از گذشت ۳۰ روز، $\frac{۱}{۱۰}$ باقی‌مانده را ازدست می‌دهد، پس هر ماه مقدار عنصر $\frac{۹}{۱۰}$ برابر می‌شود. پس از گذشت n ماه داریم:

$$f(n) = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n$$

طبق مفروضات مسئله داریم:

$$۸ = ۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n \Rightarrow (\frac{۹}{۱۰})^n = \frac{۱}{۳}$$

از طرفین $\log_{۱۰}$ می‌گیریم:

$$n(\log(\frac{۹}{۱۰})) = \log(\frac{۱}{۳}) \Rightarrow n(\log ۹ - \log ۱۰) = \log(\frac{۱}{۳})$$
$$\Rightarrow n(۲\log ۳ - \log ۱۰) = -\log ۳ \Rightarrow n(۲ \times ۰/۴۸ - ۱) = -۰/۴۸$$
$$\Rightarrow n(۰/۹۶ - ۱) = -۰/۴۸ \Rightarrow ۰/۰۴n = ۰/۴۸ \Rightarrow n = ۱۲$$

پس ۱۲ ماه یعنی $۱۲ \times ۳۰ = ۳۶۰$ روز زمان نیاز است. (یک ماه را برابر ۳۰ روز در نظر گرفتیم.)

۶ گزینه ۱

نکته:

$$۱)\ \log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$۲)\ \log_a^{b^n} = n\log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_۴^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۴} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲^۲} = ۰/۸$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\frac{\log ۳}{\log ۲} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲} = ۱/۶ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶\log ۲ \quad (*)$$

سپس باتوجه‌به $(*)$ مقدار $\log_{۱۲}^۶$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{۱۲}^۶ = \frac{\log ۶}{\log ۱۲} = \frac{\log ۲ \times ۳}{\log ۲^۲ \times ۳} = \frac{\log ۲ + \log ۳}{\log ۲^۲ + \log ۳} = \frac{\log ۲ + \log ۳}{۲\log ۲ + \log ۳}$$
$$= \frac{\log ۲ + ۱/۶\log ۲}{۲\log ۲ + ۱/۶\log ۲} = \frac{(۱ + ۱/۶)\log ۲}{(۲ + ۱/۶)\log ۲} = \frac{۲/۶}{۳/۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

توجه کنید که برای به دست آوردن رابطهٔ $(*)$، می‌توانستیم به صورت زیر عمل کنیم:

نکته: $\log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m}\log_a^b$

$$\log_۴^۳ = \log_{۲^۲}^۳ = \frac{۱}{۲}\log_۲^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶\log ۲$$

۷

گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۰)$ و $(۰, -۲)$ در تابع f صدق می‌کنند. بنابراین:

$$(۰, -۲) : f(۰) = -۲ \Rightarrow -۴ + ۲^b = -۲ \Rightarrow ۲^b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$(-\frac{۱}{۳}, ۰) : f(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \Rightarrow -۴ + ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۰ \Rightarrow ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۴ = ۲^۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}a + ۱ = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}a = ۱ \Rightarrow a = -۳$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -۴ + ۲^{-۳x+۱}$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = -۴ + ۲^{-۳\times(-\frac{۵}{۳})+۱} = -۴ + ۲^{۵+۱} = -۴ + ۲^۶ = ۶۰$$

۸

گزینه ۲

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \ , \ \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a \ , \ \log_a^a = ۱$$

ب) در تابع لگاریتمی $y = \log{}_b^a$، همواره باید $a > ۰$ و $b \neq ۱$ باشد.

گام دوم

ابتدا با حل معادلهٔ لگاریتمی داده‌شده، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\log(x^۲ - x - ۶) - \log(x - ۳) = \log(۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow \log(x - ۳)(x + ۲) - \log(x - ۳) = \log(۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow \log\frac{(x - ۳)(x + ۲)}{(x - ۳)} = \log(۲x - ۵) \Rightarrow \log(x + ۲) = \log(۲x - ۵)$$

$$\Rightarrow x + ۲ = ۲x - ۵ \Rightarrow x = ۷$$

به ازای $x = ۷$ تمام لگاریتم‌ها تعریف شده پس این مقدار قابل‌قبول است. حال مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایهٔ ۴ را به ازای $x = ۷$ حساب می‌کنیم:

$$\log_۴^{\sqrt[۳]{x+۱}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۷+۱}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۸}} = \log_۴^{\sqrt[۳]{۲^۳}} = \log_۴^۲ = \log_{۲^۲}^۲ = \frac{۱}{۲}\log_۲^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۹ گزینه ۴

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی باشند باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$1)\ D_f = D_g$$

$$2)\ \forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

حالا این دو شرط را برای هر زوج تابع $f(x)$ و $g(x)$ در گزینه های داده شده بررسی می کنیم.

بررسی گزینهٔ اول:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2\log x \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) = \log x^2 \Rightarrow D_g = R - \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|} \Rightarrow D_f = R - \{0\} \\ g(x) = 1 \Rightarrow D_g = R \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow D_f = (0, +\infty) \\ g(x) = x \Rightarrow D_g = R \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = R - \{0\} \\ g(x) = \dfrac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = R - \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

هر دو تابع به ازای مقادیر مثبت برابر ۱ و به ازای مقادیر منفی برابر ۱- می شوند، پس برابرند.

۱۰ گزینه ۴

برای محاسبهٔ A کافی است سمت چپ تساوی را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۲ بنویسیم. در این صورت در دو طرف تساوی پایه ها با هم مساوی بوده و درنتیجه توان ها نیز باید مساوی باشد.

$$\left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^{4\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(\frac{2^{8\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(2^{8\sqrt{2}-2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(2^{6\sqrt{2}}\right)^2 = 2^{12\sqrt{2}} = 2^A \Rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

۱۱ گزینه ۴

$$y = \sqrt{f(\frac{۱}{x}) - f(x)} = \sqrt{۲^{\frac{۱}{x}} - ۲^{x}}$$

برای یافتن دامنهٔ تعریف تابع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۲^{\frac{۱}{x}} - ۲^{x} \geq ۰ \Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x}} \geq ۲^{x}$$

اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، داریم:

$$\frac{۱}{x} \geq x \Rightarrow x - \frac{۱}{x} \leq ۰ \Rightarrow \frac{x^{۲} - ۱}{x} \leq ۰$$

x		-۱		۰		۱	
$\frac{x^{۲}-۱}{x}$	$-$	۰	$+$		$-$	۰	$+$

پس دامنهٔ تعریف تابع عبارت است از: $(-\infty, -۱] \cup (۰, ۱]$

۱۲ گزینه ۳

برای تعیین محدودهٔ x، از دو طرف نامعادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم. هم چنین در ساده کردن نامعادلهٔ داده‌شده از ویژگی $\log a^{n} = n \log a$ استفاده می کنیم.

$$۲^{-x} < ۰/۰۰۰۰۰۱ \Rightarrow ۲^{-x} < ۱۰^{-۶} \xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم}} \log ۲^{-x} < \log ۱۰^{-۶}$$
$$\xrightarrow{\log a^{n} = n \log a} -x \log ۲ < -۶ \log ۱۰ \xrightarrow{\log ۱۰ = ۱} -x \log ۲ < -۶ \xrightarrow{\times(-۱)} x \log ۲ > ۶$$

در صورت سؤال $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ فرض شده است. بنابراین داریم:

$$x(۰/۳۰۱) > ۶ \Rightarrow x(\frac{۳۰۱}{۱۰۰۰}) > ۶ \Rightarrow x > \frac{۶۰۰۰}{۳۰۱} \Rightarrow x > ۱۹/۹۳۳$$

پس کوچک ترین مقدار x با دو رقم اعشار برابر ۱۹/۹۴ است.

۱۳ گزینه ۴

ابتدا نقاط مشترک دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=x^2-x\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow A(1,0)\\ x=2\Rightarrow y=2\Rightarrow B(2,2)\end{cases}$$

$$A\in f\Rightarrow -2+\left(\frac{1}{2}\right)^{A+B}=0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{A+B}=2\Rightarrow A+B=-1\quad(1)$$

$$B\in f\Rightarrow -2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B}=2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B}=4\Rightarrow 2A+B=-2\quad(2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

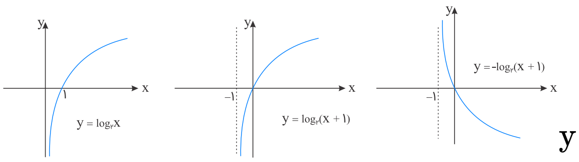
$$\begin{cases}A+B=-1\\ 2A+B=-2\end{cases}\xrightarrow{(-)}A=-1\ ,\ B=0$$

تابع به فرم $f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ خلاصه می‌شود.

$$f(3)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=-2+8=6$$

۱۴ گزینه ۲

به کمک انتقال و قرینهٔ نمودار تابع $\log_2^x$، به راحتی به جواب می‌رسیم.



$$y=-\log_2^{(x+1)}=\log_2^{(x+1)^{-1}}\Rightarrow U(x)=(x+1)^{-1}$$

۱۵ گزینه ۱

$$(0/4)^{2x-1}=(\frac{125}{8})^{x^2}$$

$$\Rightarrow (\frac{125}{8})^{x^2}=((\frac{5}{2})^3)^{x^2}=(\frac{5}{2})^{3x^2}=(\frac{2}{5})^{-3x^2}=(\frac{4}{10})^{-3x^2}$$

$$\Rightarrow (\frac{4}{10})^{2x-1}=(\frac{4}{10})^{-3x^2}\Rightarrow -3x^2=2x-1$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x-1=0\Rightarrow \begin{cases} x=-1 & \text{غ.ق.ق} \\ x=\frac{1}{3} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

به ازای $x=-1$ عبارت $\log_8^{(9x+1)}$ تعریف‌نشده است.

برای $x=\frac{1}{3}$ داریم:

$$\log_8^{(9x+1)}=\log_8^{(9\times\frac{1}{3}+1)}=\log_8^4=\log_{2^3}^{2^2}=\frac{2}{3}$$

۱۶ گزینه ۳

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(-2)=\frac{3}{32}$، مقادیر a و b را محاسبه می کنیم.

$$f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow a\times b^0=\frac{3}{2}\Rightarrow a\times 1=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$f(-2)=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2}b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{1}{2b^2}=\frac{1}{32}\Rightarrow 2b^2=32\Rightarrow b^2=16\xrightarrow{b>0} b=4$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=\frac{3}{2}\times 4^x$ در می آید. مقدار $f(\frac{3}{2})$ برابر است با:

$$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times (2^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times 2^3=\frac{3}{2}\times 8=3\times 4=12$$

۱۷

گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس $ax+b>0$ بوده و $x>-\frac{b}{a}$ می‌شود. از طریق مقایسه با مقادیر قابل‌قبول برای x، رابطهٔ بین a و b مشخص می‌شود.

ب) $f(4)=2$ است. با حل دو معادله و دو مجهول داده‌شده مقادیر a و b مشخص شده و درنهایت $f(-\frac{4}{9})$ حساب می‌شود.

گام دوم

$$x>-\frac{b}{a}, x\in(-\frac{1}{2},+\infty)\Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=2b\ \ (I)$$

$$f(4)=2\Rightarrow \log_3^{(4a+b)}=2\Rightarrow 4a+b=3^2=9\Rightarrow 4a+b=9$$

$$\xrightarrow{(I)} 4(2b)+b=9\Rightarrow 8b+b=9\Rightarrow 9b=9\Rightarrow b=1\xrightarrow{(I)} a=2$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=\log_3^{(2x+1)}$ به دست آمد. حالا $f(-\frac{4}{9})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-\frac{4}{9})=\log_3^{(-\frac{8}{9}+1)}=\log_3^{\frac{1}{9}}=\log_3^{3^{-2}}=-2\log_3^3=-2$$

۱۸

گزینه ۴

$$\begin{cases} y=2^x \\ y=(\sqrt{2})^{x+1}+4 \end{cases}\Rightarrow 2^x=\sqrt{2}\times 2^{\frac{x}{2}}+4\xrightarrow{2^{\frac{x}{2}}=t} t^2=\sqrt{2}t+4\Rightarrow t^2-\sqrt{2}t-4=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \begin{cases} t=2\sqrt{2} \\ t=-\sqrt{2}\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$2^{\frac{x}{2}}=t\xrightarrow{t=2\sqrt{2}} 2^{\frac{x}{2}}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow x=3\Rightarrow y=2^3=8$$

$$d=\sqrt{(3-0)^2+(8-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

۱۹

گزینه ۳

برای حل تست گام های زیر را برمی داریم:

الف) مختصات دو نقطهٔ A و B را در ضابطهٔ تابع $f(x)$ قرار داده و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.

ب) با مشخص شدن ضابطهٔ $f(x)$، حاصل $f(-۱)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=a(b)^x-۱ \xrightarrow{A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})} \frac{۱}{۲}=a(b)^{-\frac{۱}{۲}}-۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}\sqrt{b} \quad (I)$$

$$f(x)=a(b)^x-۱ \xrightarrow{B(۱,۱۱)} ۱۱=ab-۱ \Rightarrow ab=۱۲ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{۳}{۲}\sqrt{b}\times b=۱۲ \Rightarrow b^{\frac{۳}{۲}}=۸ \Rightarrow \sqrt{b^۳}=۸$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} b^۳=۶۴ \Rightarrow b=۴ \xrightarrow{(II)} ۴a=۱۲ \Rightarrow a=۳$$

پس ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=۳(۴)^x-۱$ در می آید. $f(-۱)$ برابر است با:

$$f(-۱)=۳(۴)^{-۱}-۱=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

۲۰

گزینه ۳

نقاط برخورد در ضابطهٔ توابع $f(x)=A(۲)^{Bx}$ و $۴y=۵x$ صدق می‌کند.

$$۴y=۵x \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow (۲,\frac{۵}{۲}) \\ x=۴ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow (۴,۵) \end{cases}$$

$$f(x)=A(۲)^{Bx} \Rightarrow \begin{cases} (۲,\frac{۵}{۲}):\frac{۵}{۲}=A(۲)^{B\times ۲} \Rightarrow ۵=۲A(۲)^{۲B} \\ (۴,۵):۵=A(۲)^{B\times ۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲A(۲)^{۲B}=A(۲)^{۴B} \Rightarrow ۲^{۲B+۱}=۲^{۴B} \Rightarrow ۲B+۱=۴B \Rightarrow B=\frac{۱}{۲}$$

$$۵=A(۲)^{۴B} \xrightarrow{B=\frac{۱}{۲}} ۵=A(۲)^۲ \Rightarrow A=\frac{۵}{۴} \Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}$$

$$\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}=۱۰ \Rightarrow (۲)^{\frac{x}{۲}}=۸=۲^۳ \Rightarrow \frac{x}{۲}=۳ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow f^{-۱}(۱۰)=۶$$

۲۱ گزینه ۳

گام اول

مختصات دو نقطهٔ $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند؛ بنابراین مختصات این دو نقطه را در ضابطهٔ تابع جایگذاری کرده و مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$f(۲)=۶ \Rightarrow a+\log_{۲}^{(۲b-۴)}=۶ \Rightarrow \log_{۲}^{(۲b-۴)}=۶-a$$

$$\Rightarrow ۲^{۶-a}=۲b-۴ \qquad (۱)$$

$$f(۱۲)=۱۰ \Rightarrow a+\log_{۲}^{(۱۲b-۴)}=۱۰ \Rightarrow \log_{۲}^{(۱۲b-۴)}=۱۰-a$$

$$\Rightarrow ۱۲b-۴=۲^{۱۰-a} \qquad (۲)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{۲^{۶-a}}{۲^{۱۰-a}}=\frac{۲b-۴}{۱۲b-۴} \Rightarrow ۲^{-۴}=\frac{۲b-۴}{۱۲b-۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۶}=\frac{۲(b-۲)}{۴(۳b-۱)} \Rightarrow ۳b-۱=۸(b-۲) \Rightarrow ۳b-۱=۸b-۱۶$$

$$\Rightarrow ۵b=۱۵ \Rightarrow b=۳ \xrightarrow{(۲)} ۲^{۱۰-a}=۳۲=۲^{۵} \Rightarrow ۱۰-a=۵ \Rightarrow a=۵$$

۲۲ گزینه ۴

با استفاده از دو ویژگی $\log ab=\log a+\log b$ و $\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$ ، عبارت لگاریتمی را ساده کرده و با توجه به فرض $\log_b^a=\frac{۳}{۲}$، مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^۲}=\log_{\sqrt{b}}^{a}+\log_{\sqrt{b}}^{b^۲}=\log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{a}+\log_{b^{\frac{۱}{۲}}}^{b^۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_b^a+\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\log_b^b$$

$$=۲\log_b^a+۴\log_b^b=۲(\frac{۳}{۲})+۴(۱)=۳+۴=۷$$

۲۳ گزینه ۴

$$۳^{۲x+y}=۹\times ۳^{x-y} \Rightarrow ۳^{۲x+y}=۳^{۲+x-y} \Rightarrow ۲x+y=۲+x-y \Rightarrow ۲y=۲-x \quad (۱)$$

$$\log(x+۲y)=۱+\log y \Rightarrow \log(x+۲y)-\log y=\log ۱۰$$

$$\log\frac{(x+۲y)}{y}=\log ۱۰ \Rightarrow \frac{x+۲y}{y}=۱۰ \Rightarrow x+۲y=۱۰y \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)} x+۲y=۵\times(۲y) \xrightarrow{(۱)} x+۲-x=۵(۲-x) \Rightarrow x=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

۲۴

گزینه ۳

نقاط مشترک دو تابع $C\,(۱,۱)$ و $D\,(۳,۹)$ است.

$$C \in f \Rightarrow ۳^{A+B} = ۱ \Rightarrow A + B = ۰$$
$$D \in f \Rightarrow ۳^{۳A+B} = ۹ \Rightarrow ۳A + B = ۲$$

$$\begin{cases} A + B = ۰ \\ ۳A + B = ۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲A = ۲ \Rightarrow A = ۱\,,\ \ B = -۱$$

$$f\,(x) = ۳^{x-۱} \Rightarrow f\,(۰) = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}$$

۲۵

گزینه ۱

با استفاده از ویژگی $\log a + \log b = \log ab$، معادلهٔ لگاریتمی را حل کرده و مقدار x را به دست می آوریم:

$$\log \frac{۲}{x} + \log(x+۱) = ۱ \Rightarrow \log \frac{۲}{x}(x+۱) = ۱ \Rightarrow \frac{۲(x+۱)}{x} = ۱۰$$
$$\Rightarrow ۲(x+۱) = ۱۰x \Rightarrow ۲x + ۲ = ۱۰x \Rightarrow ۸x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$$

برای محاسبهٔ $\log_{۸}^{x}$ از ویژگی $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_{b}^{a}$ استفاده می کنیم.

$$\log_{۸}^{x} = \log_{۸}^{\frac{۱}{۴}} = \log_{۲^۳}^{۲^{-۲}} = -\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = -\frac{۲}{۳}$$

۲۶

گزینه ۲

با استفاده از فرضیات بیان‌شده در صورت سؤال، مقدار $a^۳$ را به دست می‌آوریم.

$$\log_{\sqrt{۳}}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_{۳}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲\log_{۳}^{a} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_{۳}^{a} = \frac{۲}{۳}$$
$$\xrightarrow{\log_{b}^{a}=c \Rightarrow a=b^{c}} a = ۳^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow a^۳ = (۳^{\frac{۲}{۳}})^۳ = ۳^۲ = ۹$$

با استفاده از ویژگی $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_{b}^{a}$ حاصل لگاریتم $(a^۳ + ۷)$ را در مبنای ۸ حساب می کنیم:

$$\log_{۸}^{(a^۳+۷)} = \log_{۸}^{(۹+۷)} = \log_{۸}^{۱۶} = \log_{۲^۳}^{۲^۴} = \frac{۴}{۳}\log_{۲}^{۲} = \frac{۴}{۳}$$

۲۷ گزینه ۴

$$\log_x^{(x^2+4)} = 1+\log_x^5 \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^x + \log_x^5 \Rightarrow \log_x^{(x^2+4)} = \log_x^{5x}$$
$$\Rightarrow x^2+4 = 5x \Rightarrow x^2-5x+4 = 0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{غ.ق} \\ x=4 \end{cases}$$

حال مقدار لگاریتم ۴ در پایهٔ ۲ را حساب می کنیم:

$$\log_2^4 = \log_2^{2^2} = 2\log_2^2 = 2$$

۲۸ گزینه ۳

با استفاده از معادلهٔ $\log(y+2)=1$ به آسانی مقدار y را حساب می‌کنیم.

$$\log(y+2)=1 \Rightarrow \log_{10}^{(y+2)} = 1 \Rightarrow y+2=10 \Rightarrow y=8$$

y را در معادلهٔ دوم قرار داده و مقدار x را به دست می‌آوریم.

$$\log(y-x)+\log(4x+y)=2 \Rightarrow \log(8-x)+\log(4x+8)=2$$
$$\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab} \log_{10}^{(8-x)(4x+8)} = 2 \Rightarrow (8-x)(4x+8) = 10^2 = 100$$
$$\Rightarrow -4x^2+24x+64 = 100 \Rightarrow 4x^2-24x+36 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2-6x+9=0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

۲۹ گزینه ۳

معادلهٔ توانی را با استفاده از تغییر متغیر $2^x = t$ حل می کنیم. توجه داشته باشید که مقدار 2^x همیشه مثبت است.

$$4^x+2^x=72 \Rightarrow (2^2)^x+2^x=72 \Rightarrow (2^x)^2+2^x=72 \xrightarrow{2^x=t} t^2+t=72$$
$$\Rightarrow t^2+t-72=0 \Rightarrow (t+9)(t-8)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t=-9 & \text{غ.ق} \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow 2^x=2^3 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

حال که مقدار x را به دست آوردیم آن را در معادلهٔ لگاریتمی قرار داده و با استفاده از ویژگی های لگاریتم، مقدار y را به دست می آوریم.

$$\log(x+1)+\log(2y+x^2)=2 \xrightarrow{x=3} \log 4+\log(2y+9)=2$$
$$\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab} \log_{10}^{4(2y+9)} = 2 \xrightarrow{\log_b^a=c \Rightarrow a=b^c} 4(2y+9)=10^2=100$$
$$\Rightarrow 2y+9=25 \Rightarrow 2y=16 \Rightarrow y=8$$

۳۰ گزینه ۱

با استفاده از ویژگی $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$، معادلهٔ لگاریتمی را ساده کرده و مقدار xy را حساب می کنیم.

$$\log_۳^x+\log_۳^y=۲\Rightarrow \log_۳^{xy}=۲\xrightarrow{\log_b^a=c\Rightarrow a=b^c} xy=۳^۲=۹$$

مقادیر $x^۲+y^۲$ و xy را داریم. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای و با توجه به این که x و y هر دو مثبت هستند، حاصل $x+y$ را محاسبه می کنیم.

$$(x+y)^۲=x^۲+y^۲+۲xy\xrightarrow[x^۲+y^۲=۴۶]{xy=۹}(x+y)^۲=۴۶+۱۸=۶۴$$
$$\xrightarrow[\text{عدد جلوی لگاریتم}]{x,y>۰} x+y=۸\log_۴^{(x+y)}=\log_۴^۸=\log_{۲^۲}^{۲^۳}=\frac{۳}{۲}\log_۲^۲=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۳۱ گزینه ۳

گام اول

الف) در صورت سؤال دو معادله یکی به صورت نمایی و دیگری لگاریتمی داده‌شده است. در معادلهٔ نمایی تنها مجهول x و در معادلهٔ لگاریتمی x و y مجهول است. پس ابتدا معادلهٔ نمایی را حل کرده و x را محاسبه می کنیم. سپس با جایگذاری x در معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را هم به دست می آوریم.

ب) برای حل معادلهٔ نمایی دو طرف را به دو عدد توان دار با پایهٔ ۲ تبدیل کرده و با مساوی قرار دادن توان ها مقدار x را حساب می کنیم.

گام دوم

$$۴\sqrt{۲}=۴^x\Rightarrow ۲^۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=(۲^۲)^x\Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}}=۲^{۲x}\Rightarrow ۲x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

حال با داشتن مقدار x و حل معادلهٔ لگاریتمی مقدار y را محاسبه می کنیم:

$$۱+\log\sqrt{x+۱}=\log y\xrightarrow{x=\frac{۵}{۴}}۱+\log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱}=\log y\Rightarrow \log ۱۰+\log\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\log y$$
$$\Rightarrow \log ۱۰+\log\frac{۳}{۲}=\log y\Rightarrow \log ۱۰(\frac{۳}{۲})=\log ۱۵=\log y\Rightarrow y=۱۵$$

۳۲ گزینه ۴

دو معادلهٔ نمایی و لگاریتمی داده‌شده را ساده می‌کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم.

برای حل از دو ویژگی $\log a+\log b=\log ab$ و $a^n\times a^m=a^{m+n}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}۲^x\times ۸^y=۴\Rightarrow ۲^x\times(۲^۳)^y=۲^۲\Rightarrow ۲^x\times ۲^{۳y}=۲^۲\Rightarrow x+۳y=۲\\ \log x=\log ۲+\log y\Rightarrow \log x=\log ۲y\Rightarrow x=۲y\end{cases}$$
$$\Rightarrow ۲y+۳y=۲\Rightarrow ۵y=۲\Rightarrow y=\frac{۲}{۵}\xrightarrow{x=۲y}x=\frac{۴}{۵}$$

۳۳ گزینه ۴

با استفاده از ویژگی های $\log_b^a + \log_b^c = \log_b^{ac}$ و $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$ معادله را حل می کنیم:

$$\log_۲^{(۵x+۱)} + \log_۲^x = ۲ \Rightarrow \log_۲^{(۵x+۱)x} = ۲ \Rightarrow (۵x+۱)x = ۲^۲ = ۴ \Rightarrow ۵x^۲ + x = ۴$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ + x - ۴ = ۰ \Rightarrow (۵x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۵x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۵x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۵} \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$x = -۱$ به این دلیل قابل‌قبول نیست که عدد جلوی لگاریتم نباید منفی شود. اگر $x = \frac{۴}{۵}$ باشد، مقدار $\frac{۴}{x}$ برابر ۵ به دست می آید.

۳۴ گزینه ۳

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را ساده می کنیم تا بتوانیم به آسانی با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$f(x) = \log_۲^{\frac{۱}{x}} = \log_۲^{x^{-۱}} = -\log_۲^x \ , \ D_f = (۰, +\infty)$$
$$g(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}^x = \log_{۲^{-۱}}^x = -\log_۲^x \ , \ D_g = (۰, +\infty)$$

مشاهده می کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ضابطه های برابر و دامنه تعریف یکسان دارند. پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی هستند و نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق اند.

۳۵ گزینه ۳

با استفاده از ویژگی $\log A^n = n\log A$، ابتدا مقدار K را محاسبه می کنیم.

$$\log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳} = \log (۸۱)^K \Rightarrow \log ۳ + \log ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log (۳^۴)^K = \log ۳^{۴K}$$
$$\xrightarrow{\log A^n = n\log A} \log ۳ + \frac{۱}{۴}\log ۳ = ۴K \log ۳ \Rightarrow (۱ + \frac{۱}{۴})\log ۳ = ۴K\log ۳$$

$$\Rightarrow ۴K = ۱ + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow K = \frac{۵}{۱۶} \text{ یا } \frac{۵}{K} = ۱۶$$

اکنون حاصل لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در پایه ۲ را محاسبه می کنیم:

$$\log_۲^{\frac{۵}{K}} = \log_۲^{\frac{۵}{\frac{۵}{۱۶}}} = \log_۲^{۲^۴} = ۴\log_۲^۲ = ۴ \times ۱ = ۴$$

۳۶ گزینه ۲

با استفاده از ویژگی $\log_b^{a^n} = n\log_b^a$ تغییراتی در عبارت $۲\log(۱+\sqrt{۵})$ ایجاد می کنیم.

$$۲\log(۱+\sqrt{۵}) = \log(۱+\sqrt{۵})^۲ = \log(۱ + ۲\sqrt{۵} + ۵) = \log(۶ + ۲\sqrt{۵})$$

برای محاسبهٔ حاصل عبارت داده‌شده از ویژگی $\log a + \log b = \log ab$ استفاده می کنیم.

$$A = \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۶ + ۲\sqrt{۵}) = \log(۶ - ۲\sqrt{۵})(۶ + ۲\sqrt{۵})$$
$$= \log(۳۶ - ۲۰) = \log ۱۶ = \log ۲^۴ = ۴\log ۲ \xrightarrow{\log ۲ = k} A = ۴k$$

۳۷

گزینه ۱

در معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^{۲} + bx + c = ۰$، اگر α و β ریشه های معادله باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

هم چنین از ویژگی های لگاریتم داریم:

$$\log a + \log b = \log ab$$

پس حاصل $a + b$ و $a \times b$ را به دست می آوریم:

$$x^{۲} - ۱۰x + ۰/۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } a \text{ و } b} \begin{cases} S = a + b = -(\frac{-۱۰}{۱}) = ۱۰ \\ P \ = a \times b = \frac{۰/۱}{۱} = ۰/۱ \end{cases}$$

حاصل عبارت لگاریتمی را محاسبه می کنیم:

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log ab - \log(a+b)$$
$$= \log ۰/۱ - \log ۱۰ = \log ۱۰^{-۱} - \log ۱۰ = -\log ۱۰ - \log ۱۰ = -۱ - ۱ = -۲$$

۳۸

گزینه ۱

ابتدا از معادلهٔ نمایی داده‌شده مقدار a را حساب می کنیم.

$$۴^{a} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow (۲^{۲})^{a} = ۲^{۱} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲a} = ۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow ۲a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

با دانستن مقدار a محاسبهٔ لگاریتم داده‌شده کار چندان سختی نیست.

$$\log_{۴}^{(۴a+۱)} = \log_{۴}^{۴(\frac{۳}{۴})+۱} = \log_{۴}^{۳+۱} = \log_{۴}^{۴} = ۱$$

۳۹

گزینه ۴

$$A = \log_{۸}^{۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}} \xrightarrow{\sqrt[۳]{۰/۲۵} = (\frac{۱}{۴})^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{-\frac{۲}{۳}}} \log_{۲^{۳}}^{۲ \times ۲^{-\frac{۲}{۳}}} \Rightarrow \log_{۲^{۳}}^{۲^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

$$\log_{۴}^{\frac{۱}{A}-۱} \xrightarrow{A = \frac{۱}{۹}} \log_{۴}^{۹-۱} = \log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

۴۰ گزینه ۱

$$k = \log_{۳}^{۹A^{۲}} = \log_{۳}^{۹} + \log_{۳}^{A^{۲}} = \log_{۳}^{۳^{۲}} + \log_{۳}^{A^{۲}} \Rightarrow k = ۲\log_{۳}^{۳} + ۲\log_{۳}^{A}$$
$$\xrightarrow{\log_{۳}^{۳}=۱} k = ۲ + ۲\log_{۳}^{A}$$

ازآنجاکه $A = ۳^{a}$، مقدار k برابر است با:

$$\Rightarrow k = ۲ + ۲\log_{۳}^{۳^{a}} = ۲ + ۲a\log_{۳}^{۳} = ۲ + ۲a$$

۴۱ گزینه ۴

$$\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)} - \log_{۳}^{(x+۲)} = ۱ \Rightarrow \log_{۳}^{\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲} = ۳$$
$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۳x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹+۴۰}}{۴} = \frac{۳ \pm ۷}{۴} \Rightarrow x = -۱, \ \frac{۱۰}{۴}$$

چون باید $۲x - ۱ > ۰$ باشد، بنابراین جواب $x = \frac{۱۰}{۴}$ قابل‌قبول است.

$$\log_{۸}^{(۲x-۱)} = \log_{۸}^{(\frac{۱۰}{۲}-۱)} = \log_{۸}^{۴} = b \Rightarrow ۴ = ۸^{b} \Rightarrow ۲^{۲} = ۲^{۳b} \Rightarrow b = \frac{۲}{۳}$$

۴۲ گزینه ۱

نکته: هر نقطه روی نیمساز ربع دوم و چهارم به‌صورت $(\alpha, -\alpha)$ است.

$$\begin{cases} y(-۱) = ۰ \\ y(۱) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{۱}{۲}}^{(-a+b)} = ۰ \\ \log_{\frac{۱}{۲}}^{(a+b)} = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b = ۱ \\ a+b = ۲ \end{cases} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

۴۳ گزینه ۳

$$\log_{x}^{(۳x+۸)} + \log_{x}^{(x-۶)} = ۲ \Rightarrow \log_{x}^{(۳x+۸)(x-۶)} = ۲ \Rightarrow x^{۲} = ۳x^{۲} - ۱۰x - ۴۸ \Rightarrow x^{۲} - ۵x - ۲۴ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۸)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \Rightarrow \log_{۴}^{۸} = \log_{۲^{۲}}^{۲^{۳}} = \frac{۳}{۲} \\ x = -۳ \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۴۴ گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید نامنفی باشد.

گام دوم

باتوجه‌به دو قسمت گام اول، مجموعه جواب را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\mathrm{I})\ x^{۲}-۳x>۰\Rightarrow x(x-۳)>۰\Rightarrow x>۳ \text{ یا } x<۰$$

$$\mathrm{II})\ ۱-\log(x^{۲}-۳x)\geq ۰\Rightarrow ۱\geq\log(x^{۲}-۳x)\Rightarrow \log ۱۰\geq\log(x^{۲}-۳x)$$

$$\Rightarrow ۱۰\geq x^{۲}-۳x\Rightarrow x^{۲}-۳x-۱۰\leq ۰\Rightarrow (x-۵)(x+۲)\leq ۰\Rightarrow -۲\leq x\leq ۵$$

اشتراک دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده برابر $[-۲,۰)\cup(۳,۵]$ است.

۴۵ گزینه ۲

با مساوی قرار دادن ضابطه‌های دو تابع مختصات نقطهٔ تقاطع یعنی نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=۴^{x} \\ g(x)=(\frac{۱}{۲})^{۲x}+\frac{۳}{۲}=(\frac{۱}{۴})^{x}+\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴^{x}=(\frac{۱}{۴})^{x}+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴^{x}-(\frac{۱}{۴})^{x}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{(*)}x=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از توابع}} y=۲\Rightarrow A(\frac{۱}{۲},۲)$$

$$\Rightarrow \text{فاصله}=\sqrt{(\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲}))^{۲}+(۲-۱)^{۲}}=\sqrt{۲}$$

حل معادلهٔ $(*)$:

$$۴^{x}-(\frac{۱}{۴})^{x}=\frac{۳}{۲}\ ,\ a=۴^{x}$$

$$\Rightarrow a-\frac{۱}{a}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a^{۲}-\frac{۳}{۲}a-۱=۰\Rightarrow (a-۲)(a+\frac{۱}{۲})=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ a=-\frac{۱}{۲}\quad \text{غ.ق.} \end{cases}$$

۴۶ گزینه ۴

برای آنکه دو تابع برابر باشند، باید دامنه‌های یکسانی داشته باشند. در این تست کافی است دامنهٔ تابع $y = \log \frac{x-۲}{x}$ را پیدا کنیم و با دامنهٔ تک‌تک گزینه‌ها مقایسه کنیم.

$$y = \log \frac{x-۲}{x} \Rightarrow \text{دامنه}: \frac{x-۲}{x} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ \text{یا} \\ x < ۰ \end{cases}$$

$$\text{گزینهٔ ۱}: y = \log(x-۲) - \log x \Rightarrow \text{دامنه}: \begin{cases} x-۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \\ x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > ۲$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: y = \log \frac{x^۲ - ۴}{x(x+۲)} = \log \frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)} \Rightarrow \frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)} > ۰$$

در گزینهٔ ۲ باید $x \neq -۲$ باشد، پس دامنهٔ آن با دامنهٔ تابع اولیه مغایرت دارد.

$$\text{گزینهٔ ۳}: y = \frac{۱}{۲} \log \left(\frac{x-۲}{x}\right)^۲ \Rightarrow \left(\frac{x-۲}{x}\right)^۲ > ۰ \Rightarrow x \neq ۲, ۰$$

$$\text{گزینهٔ ۴}: y = ۲ \log \sqrt{\frac{x-۲}{x}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \sqrt{\frac{x-۲}{x}} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۲}{x} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ \text{یا} \\ x < ۰ \end{cases}$$

بنابراین فقط دامنهٔ گزینهٔ ۴ با دامنهٔ تابع اولیه برابر است.

۴۷ گزینه ۳

گام اول

معادلات نمایی و لگاریتمی را به‌صورت ساده‌شده می‌نویسیم (از معادلهٔ لگاریتمی y را بر حسب x به دست می‌آوریم) با حل دستگاه دومعادله و دومجهول حاصل x و y را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\log y = ۲\log ۳ + \log x \Rightarrow \log y = \log ۳^۲ + \log x$$

$$\Rightarrow \log y = \log ۹x \Rightarrow y = ۹x \quad (۱)$$

$$۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times (۲^۲)^{x+y} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times ۲^{۲x+۲y} = ۱$$

$$\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷} = ۱ = ۲^۰ \Rightarrow ۳x + ۲y - ۷ = ۰ \xrightarrow{(۱)} ۳x + ۱۸x - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲۱x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۲۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$y = ۹x \Rightarrow y = ۹ \times \frac{۱}{۳} = ۳$$

۴۸ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$y=-۱+\log_b^{(۲(x+\frac{a}{۲}))}$$

تابع به اندازهٔ $+\frac{۱}{۲}$ نسبت به نمودار $y=\log x$ انتقال افقی به سمت راست داشته است. پس:

$$\frac{a}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۱$$
$$y=-۱+\log_b^{(۲x-۱)}$$

به‌علاوه مقدار تابع در $x=۲$ صفر است:

$$y\,(۲)=-۱+\log_b^{۳}=۰\Rightarrow \log_b^{۳}=۱\Rightarrow b=۳$$
$$y=-۱+\log_۳^{(۲x-۱)}\xrightarrow{\text{برخورد با } y=۱}-۱+\log_۳^{(۲x-۱)}=۱$$
$$\Rightarrow \log_۳^{(۲x-۱)}=۲\Rightarrow ۲x-۱=۹\Rightarrow x=۵$$

راه‌حل دوم: (برای به دست آوردن a و b)

$$y=-۱+\log_b^{(۲x+a)}$$

$$\left.\begin{array}{l}۲x+a>۰\Rightarrow x>-\frac{a}{۲}\\ \text{طبق نمودار}: x>\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a=-۱$$

$$(۲,۰)\Rightarrow -۱+\log_b^{۳}=۰\Rightarrow b=۳$$

۴۹ گزینه ۳

$$۳^{x^۲-۲}=۸۱^x\Rightarrow ۳^{x^۲-۲}=۳^{۴x}\Rightarrow x^۲-۲=۴x$$
$$x^۲-۴x=۲\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۶\Rightarrow (x-۲)^۲=۶\Rightarrow x-۲=\sqrt{۶}$$

حاصل $\log_۶^{(x-۲)}$ را می‌خواهیم:

$$\log_۶^{(x-۲)}=\log_۶^{\sqrt{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

۵۰ گزینه ۲

نمودارهای دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند، پس:

$$f(-۱) = g(-۱) \Rightarrow ۳^{-a+b} = \left(\frac{۱}{۹}\right)^{-۱}$$
$$\Rightarrow ۳^{-a+b} = ۹ = ۳^{۲} \Rightarrow -a+b = ۲ \qquad (*)$$

ازطرفی $f(۲) = \frac{۱}{۳}$، بنابراین:

$$۳^{۲a+b} = \frac{۱}{۳} = ۳^{-۱} \Rightarrow ۲a+b = -۱ \qquad (**)$$

از حل دستگاه معادلات $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -a+b = ۲ \\ ۲a+b = -۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳a = -۳ \Rightarrow a = -۱ \xrightarrow{(*)} b = ۱ \Rightarrow f(x) = ۳^{-x+۱}$$

حال برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۲۷)$، کافی است معادلهٔ $f(x) = ۲۷$ را حل کنیم:

$$۳^{-x+۱} = ۲۷ = ۳^{۳} \Rightarrow -x+۱ = ۳ \Rightarrow -x = ۲ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲۷) = -۲$$

۵۱ گزینه ۳

گام اول

دو تابع در نقطهٔ A متقاطع هستند؛ بنابراین در این نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. با مساوی قرار دادن ضابطهٔ دو تابع نقطهٔ برخورد را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x} = ۳^x + \frac{۸}{۳} \Rightarrow (۳^{-\frac{۱}{۲}})^{۲x} = ۳^x + \frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳^{-x} = ۳^x + \frac{۸}{۳} \xrightarrow{۳^{-x}=t} t = \frac{۱}{t} + \frac{۸}{۳} \xrightarrow{\times t} t^۲ = ۱ + \frac{۸}{۳}t$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۳t^۲ = ۳ + ۸t \Rightarrow ۳t^۲ - ۸t - ۳ = ۰$$

$$\Delta = (-۸)^۲ - ۴(۳)(-۳) = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$$

$$\begin{cases} t_۱ = \frac{۸+۱۰}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳ \Rightarrow ۳^{-x} = ۳ \Rightarrow x = -۱ \\ t_۲ = \frac{۸-۱۰}{۶} = \frac{-۲}{۶} = -\frac{۱}{۳} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$x = -۱ \Rightarrow y = ۳^{-۱} + \frac{۸}{۳} = \frac{۱}{۳} + \frac{۸}{۳} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو تابع نقطهٔ $A(-۱, ۳)$ است.

فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱, ۳)$ از نقطهٔ $(-۱, ۱)$ برابر با $۳ - ۱ = ۲$ است.

۵۲ گزینه ۴

$$\log(x+۲) + \log(۲x-۱) = \log(۴x+۱) \Rightarrow \log(x+۲)(۲x-۱) = \log(۴x+۱)$$
$$\Rightarrow (x+۲)(۲x-۱) = (۴x+۱)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - x + ۴x - ۲ = ۴x + ۱ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = +\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$x = \frac{۳}{۲}$ قابل‌قبول است.

$$\log_۴^{(۲x+۵)} = \log_۴^{(۳+۵)} = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۵۳ گزینه ۳

اگر باد اولیهٔ قایق را x در نظر بگیریم آنگاه در روز nاُم باد قایق $x(۰/۹۵)^n$ خواهد بود.

$$x(۰/۹۵)^n = \frac{x}{۲} \Rightarrow (\frac{۹۵}{۱۰۰})^n = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (\frac{۲۰}{۱۹})^n = ۲ \Rightarrow n(\log ۲۰ - \log ۱۹) = \log ۲ \Rightarrow n = \frac{۰/۳۰۱}{۱/۳۰۱ - ۱/۲۷۸} = ۲۱/۵$$

۵۴ گزینه ۴

$$\log(۲x-۵)+\log(x+۱)=\log(۴x-۱)\Rightarrow \log(۲x-۵)(x+۱)=\log(۴x-۱)$$
$$\Rightarrow ۲x^۲+۲x-۵x-۵=۴x-۱\Rightarrow ۲x^۲-۷x-۴=۰$$
$$\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۴۹+۳۲}}{۴}=\frac{۷\pm۹}{۴}\Rightarrow \begin{cases} x=۴ & (\text{ق.ق}) \\ x=-\frac{۱}{۲} & (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$
$$\log_۳^{(۲x+۱)}=\log_۳^{(۲\times۴+۱)}=\log_۳^۹=۲$$

۵۵ گزینه ۲

اگر جمعیت اولیه x نفر باشد، سال اول $\frac{۹۹}{۱۰۰}x$ و سال دوم $\left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^۲x$ و سال nاُم $\left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^n x$ نفر خواهد بود.

$$\left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^n x=\frac{۱}{۲}x\Rightarrow\left(\frac{۱۰۰}{۹۹}\right)^n=۲$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{۱۰۰}{۹۹}\right)^n=\log ۲\Rightarrow n(\log ۱۰۰-\log ۹۹)=\log ۲$$
$$\Rightarrow n=\frac{۰/۳}{۲-۱/۹۹۵}=۶۰$$

۵۶ گزینه ۱

یک رابطهٔ فوق العاده مهم در مبحث لگاریتم وجود دارد که قبل از حل سؤال، ابتدا آن را بیان می کنیم:

$$\log ۱۰=۱\Rightarrow \log ۲\times۵=۱\Rightarrow \log ۲+\log ۵=۱$$

پس همواره به خاطر داشته باشید که مجموع $\log ۲$ و $\log ۵$ برابر یک است. یعنی اگر در سؤالی یکی از این دو مورد داده شد، دیگری را هم به صورت غیر مستقیم به ما داده اند.

$$\log\sqrt[۳]{۱/۶}=\log\sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۱۰}}=\log\sqrt[۳]{\frac{۸}{۵}}=\log\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}}=\log ۲-\log\sqrt[۳]{۵}=\log ۲-\log ۵^{\frac{۱}{۳}}$$
$$=\log ۲-\frac{۱}{۳}\log ۵\xrightarrow[\log ۲=۱-۳k]{\log ۵=۳k}\log\sqrt[۳]{۱/۶}=۱-۳k-\frac{۱}{۳}(۳k)=۱-۳k-k=۱-۴k$$

۵۷ گزینه ۴

در حل تست به دو نکته زیر توجه داشته باشید:

الف) دامنه تعریف تابع $y = \log g(x)$ به صورت $g(x) > ۰$ است.

ب) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

$$y = \log(x-۱) \Rightarrow x-۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \quad (I)$$
$$f(x) = \sqrt{۱-\log(x-۱)} \Rightarrow ۱-\log(x-۱) \geq ۰ \Rightarrow \log(x-۱) \leq ۱$$
$$\Rightarrow \log(x-۱) \leq \log ۱۰ \Rightarrow ۰ < x-۱ \leq ۱۰ \Rightarrow ۱ < x \leq ۱۱ \quad (II)$$

دامنه تعریف تابع اصلی اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است:

$$(I) \cap (II) : D_f = (۱, ۱۱]$$

۵۸ گزینه ۳

چون تابع از دو نقطهٔ $(۵, ۱۱)$ و $(۲۱, ۱۵)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این نقاط در تابع صدق می‌کند، داریم:

$$(۵, ۱۱) \in f \Rightarrow ۱۱ = a + \log_۲^{(۱۵+b)^۲}$$

$$(۲۱, ۱۵) \in f \Rightarrow ۱۵ = a + \log_۲^{(۶۳+b)^۲}$$

$$\begin{cases} ۱۱ = a + \log_۲^{(۱۵+b)^۲} \\ ۱۵ = a + \log_۲^{(۶۳+b)^۲} \end{cases} \Rightarrow \times(-۱) \begin{cases} -۱۱ + a = -\log_۲^{(۱۵+b)^۲} \\ ۱۵ - a = \log_۲^{(۶۳+b)^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴ = \log_۲^{(۶۳+b)^۲} - \log_۲^{(۱۵+b)^۲} \Rightarrow ۴ = ۲\log_۲^{(۶۳+b)} - ۲\log_۲^{(۱۵+b)}$$
$$\Rightarrow ۴ = ۲(\log_۲^{(۶۳+b)} - \log_۲^{(۱۵+b)}) \Rightarrow ۲ = \log_۲^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}} \Rightarrow \frac{۶۳+b}{۱۵+b} = ۴$$
$$\Rightarrow ۶۳ + b = ۶۰ + ۴b \Rightarrow ۳b = ۳ \Rightarrow b = ۱$$

$$۱۱ = a + \log_۲^{(۱۵+b)^۲} \xrightarrow{b=۱} ۱۱ = a + \log_۲^{(۱۶)^۲}$$
$$\Rightarrow ۱۱ - a = ۸ \Rightarrow a = ۳$$

۱ فرض کنید نقاط $(-۲\,,۵)$، $(۰\,,\,۵)$ و $(۱\,,\,۱۱)$، بر سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(-۱, ۳)$
۲) $(-۱, ۴)$
۳) $(۲, ۹)$
۴) $(۲, ۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲ اگر حاصل عبارت $\sqrt[۳]{\sqrt{۲}} \times (۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۳}{۲}}$، به صورت $\sqrt[۳]{A}$ باشد، A کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) $\sqrt{۳} + ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۳ طول یک مستطیل ۲ واحد کمتر از ۱/۵ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۵۲
۲) ۵۶
۳) ۶۰
۴) ۶۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳ > \frac{۲x-۱}{x+۱} > -۱$، کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$
۲) $(۴, +\infty)$
۳) $\mathbb{R} - [-۴, ۰]$
۴) $\mathbb{R} - [-۴, -۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ حاصل عبارت $(۲-\sqrt{۳})^{-۱} + \frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}$، کدام است؟

۱) $۱ + ۲\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۱ + \sqrt{۳}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ در بازهٔ (a, b)، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۲

۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ گذرا بر نقطهٔ $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

۱) $(5, -7)$

۲) $(5, -9)$

۳) $(2, 5)$

۴) $(1, 5)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ در بازهٔ (a, b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|2x^2-4|$ در زیر خط $y=2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $3 > \frac{x+1}{2x-1} > 1$، کدام است؟

۱) $(0/6, 1/5)$

۲) $(0/8, 1/2)$

۳) $(1, 2)$

۴) $(0/8, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} - 2\left(\sqrt[4]{9}-1\right)^{-1}$، کدام است؟

۱) $1+\sqrt{3}$

۲) $-1+\sqrt{2}$

۳) $1-\sqrt{2}$

۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$

۲) ۲

۳) $1+\sqrt{3}$

۴) $2\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۲ جواب نامعادلهٔ $-۱ \leq ۳x - ۲ \leq ۱$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳} \leq x \leq ۱$
۲) $-۱ \leq x \leq ۱$
۳) $-۱ \leq x \leq \frac{۱}{۳}$
۴) $-۲ \leq x \leq ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۳ نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ در بازهٔ $(a\,,\,b)$ بالاتر از خط به معادلهٔ $۲y + x = ۵$ قرار دارد. بزرگ ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۴ نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ در بازهٔ $(a\,,\,b)$ بالاتر از خط به معادلهٔ $۲y + x = ۵$ قرار دارد، بزرگ ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۵ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|x^۲ - ۲x| < x$ کدام است؟

۱) $(۰\,,\,۱)$
۲) $(۰\,,\,۳)$
۳) $(۱\,,\,۲)$
۴) $(۱\,,\,۳)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۶ اگر $۴ = (۵x - \frac{۳}{۲x})$ باشد، حاصل $(۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲})$، کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۹
۳) ۳۱
۴) ۳۲

قلمچی علوم انسانی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۵

۱۷ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}} \times \sqrt[۴]{۵۴} \times \sqrt[۶]{۱۲}$، کدام است؟

۱) $۶\sqrt[۶]{۲}$
۲) $۳\sqrt[۶]{۳۲}$
۳) $۲\sqrt[۳]{۹}$
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۸ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ + ۴}$، در بازهٔ (a, b) پایین تر از خط به معادلهٔ $y = ۲$ است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a - ۱)x^۲ + ۲\sqrt{۲}x + a$ بالای محور x هاست؟

۱) $a < -۱$
۲) $a > ۱$
۳) $a > ۲$
۴) $۱ < a < ۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۲۰ اگر عبارت $(a - ۱)x^۲ + (a - ۱)x + ۱$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\{a : ۱ < a < ۵\}$
۲) $\{a : a < ۱\}$
۳) $\varnothing$
۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۱ در کدام بازه از مقادیر x، نمودار تابع $f(x) = ۵ - |x - ۱|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |۲x|$ قرار دارد؟

۱) $(-\frac{۴}{۳}, ۱)$
۲) $(-\frac{۲}{۳}, ۱)$
۳) $(-\frac{۴}{۳}, ۲)$
۴) $(-\frac{۲}{۳}, ۲)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۲ مجموعهٔ جواب نامعادلات $x + |x| \leq \frac{۱}{۲}x + ۳$ به کدام صورت است؟

۱) $[-۴, ۲]$
۲) $[-۶, ۸]$
۳) $[-۶, ۲]$
۴) $[-۲, ۶]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۳ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\dfrac{x - ۱}{x + ۱} > ۲x$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x : x < -۱\}$
۲) $\{x : x > -۱\}$
۳) $\{x : -۱ < x < ۱\}$
۴) $\{x : -۲ < x < -۱\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳$ با دامنهٔ $\{x : |x - ۱| < ۲\}$، همواره چگونه است؟

۱) منفی
۲) مثبت
۳) صعودی
۴) نزولی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۵ مجموعه جواب نامعادلهٔ $۱ < \dfrac{۲x - ۳}{x + ۱} < ۳$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۶, ۴]$
۲) $\mathbb{R} - [-۴, ۶]$
۳) $x > ۴$
۴) $x < -۶$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(۲m - ۱)\, x^{۲} + ۶x + m - ۲ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $-۲ < m < ۲/۵$
۲) $-۲ < m < ۳/۵$
۳) $-۱ < m < ۳/۵$
۴) $-۱ < m < ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۷ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(x - ۴)\, |x| < ۲x - ۵$، به کدام صورت است؟

۱) $(۱,\, ۵)$
۲) $(۱ - \sqrt{۶}\,,\, ۱ + \sqrt{۶})$
۳) $(۱,\, ۵) \cup (۱ + \sqrt{۶}\,,\, +\infty)$
۴) $(-\infty\,,\, ۱ - \sqrt{۶}) \cup (۱,\, ۵)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۸ اگر $\alpha = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} - ۴}$ و $\beta = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} + ۴}$ باشند حاصل عبارت $(\alpha^{۲} + \beta^{۲} + \alpha\beta)(\alpha^{۲} + \beta^{۲} - \alpha\beta)$، کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۷\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۹ مجموعه جواب نامعادله $|x^{۲} + ۱| > ۲x + ۱ - |x - ۲|$، به‌صورت کدام بازه است؟

۱) $(-۲, ۱)$
۲) $(-۱, ۱)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(۱, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۰ به ازای کدام مقادیر m، عبارت $(m - ۱)\, x^{۲} + ۶x + ۲m + ۱$، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

۱) $m < -۲$
۲) $m > ۲/۵$
۳) $۱ < m < ۲$
۴) $۱ < m < ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۳۱ مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۱ < \frac{۳x+۱}{x-۳} < ۳$ به کدام صورت است؟

۱) $x < \frac{۱}{۲}$ ۲) $x < ۳$

۳) $-\frac{۱}{۲} < x < ۳$ ۴) $\frac{۱}{۲} < x < ۳$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y = (۱-m)\,x^{۲} + ۲\,(m-۳)\,x - ۱$، همواره پایین محور xها است؟

۱) $۱ < m < ۵$ ۲) $۲ < m < ۵$

۳) $۲ < m < ۷$ ۴) $۲ < m < ۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۲} > \frac{۷x-۸}{x^{۲}-x-۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟

۱) $(-۴,۲)\cup(۲,۳)$ ۲) $(۲,۴)$

۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۴ اگر $A = \sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}\,(۱۲)^{-۱/۵}$ باشد، حاصل $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴

۳) ۵   ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۵ اگر $A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\,(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵   ۲) ۰/۵

۳) ۰/۷۵   ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۶ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right| > ۱$، به‌صورت کدام بازه است؟

۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(۱,\frac{۵}{۳})$

۳) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$ ۴) $(\frac{۵}{۳},۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱

گزینه ۱

سه نقطهٔ داده‌شده را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}(0,5):\ c=5\\(-2,5):\ 4a-2b+5=5\Rightarrow 4a-2b=0\Rightarrow 2a-b=0\\(1,11):\ a+b+5=11\Rightarrow a+b=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a-b=0\\a+b=6\end{cases}\Rightarrow a=2,b=4$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=2x^2+4x+5$ است. هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند جواب مسئله است:

$$\text{گزینهٔ ۱}:(-1,3)\Rightarrow 2(-1)^2+4(-1)+5=3\quad\checkmark$$

$$\text{گزینهٔ ۲}:(-1,4)\Rightarrow 2(-1)^2+4(-1)+5\neq 4\quad\times$$

$$\text{گزینهٔ ۳}:(2,9)\Rightarrow 2(2)^2+4(2)+5\neq 9\quad\times$$

$$\text{گزینهٔ ۴}:(2,15)\Rightarrow 2(2)^2+4(2)+5\neq 15\quad\times$$

۲

گزینه ۱

باتوجه‌به اینکه حاصل عبارت داده‌شده برابر $\sqrt[3]{A}$ است، ابتدا طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم. دو عبارت $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ مزدوج یکدیگر هستند. دو عبارت هم‌توان از آن‌ها جدا کرده و با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم و درنهایت مقدار A را به دست می‌آوریم.

$$\sqrt[3]{A}=(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}A=(2-\sqrt{3})^{\frac{9}{2}}\times(2+\sqrt{3})^4\times\sqrt{2}$$

$$=(2-\sqrt{3})^4(2+\sqrt{3})^4(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=\left[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right]^4\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2}$$

$$=(4-3)^4\sqrt{2(2-\sqrt{3})}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1\Rightarrow A=\sqrt{3}-1$$

۳ گزینه ۲

عرض مستطیل را x فرض می‌کنیم؛ پس طول آن برابر $\frac{۳}{۲}\mathrm{x}-۲$ است. داریم:

$$\text{مساحت مستطیل}=۱۹۲\Rightarrow \mathrm{x}(\frac{۳}{۲}\mathrm{x}-۲)=۱۹۲\Rightarrow \frac{۳}{۲}\mathrm{x}^{۲}-۲\mathrm{x}=۱۹۲$$

$$\xrightarrow{\times ۲}۳\mathrm{x}^{۲}-۴\mathrm{x}-۳۸۴=۰\xrightarrow{\mathrm{x}>۰}\mathrm{x}=\frac{۲+\sqrt{۱۱۵۶}}{۳}=\frac{۲+۳۴}{۳}=۱۲\quad(*)$$

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل}=۲((\frac{۳}{۲}\mathrm{x}-۲)+\mathrm{x})\underset{(*)}{=}۲((۱۸-۲)+۱۲)=۵۶$$

۴ گزینه ۳

$$-۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ -۱ < \dfrac{۲x-۱}{x+۱} \\ ۲)\ \dfrac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \end{cases}$$

هر دو معادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱)\frac{۲x-۱}{x+۱} > -۱ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱}+۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱+x+۱}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{۳x}{x+۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	-∞		-۱		۰		+∞
p(x)		+ ج	ت ن	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow x < -۱ \ \text{یا}\ x > ۰ \ \ (\mathrm{I})$$

$$۲)\frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱-۳x-۳}{x+۱} < ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-۴}{x+۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	-∞		-۴		-۱		+∞
q(x)		− ج	۰	+	ت ن	− ج	

$$\Rightarrow x < -۴ \ \ \text{یا}\ \ x > -۱ \ \ (\mathrm{II})$$

حال اشتراک دو جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(\mathrm{I})\cap(\mathrm{II})} x < -۴ \ \text{یا}\ x > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-۴, ۰]$$

راه‌حل تستی: (عددگذاری)

حذف گزینهٔ "۴":

$$x = ۰ \Rightarrow -۱ < \frac{-۱}{۱} < ۳ \quad \times$$

حذف گزینه‌های "۱" و "۲":

$$x = -۵ \Rightarrow -۱ < \frac{-۱۱}{-۴} < ۳ \Rightarrow -۱ < \frac{۱۱}{۴} < ۳ \ \checkmark$$

۵ گزینه ۱

ابتدا هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}$$

$$=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱\quad(۱)$$

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}\quad(۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۱$$

۶ گزینه ۲

نمودار $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار $y=۴x^۴$ قرار دارد، پس:

$$(x-۱)^۲>۴x^۴\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}}|x-۱|>۲x^۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱)\ x-۱>۲x^۲\\ \quad\text{یا}\\ ۲)\ x-۱<-۲x^۲\end{cases}$$

دو نامعادلهٔ فوق را حل می‌کنیم:

$$۱)\ x-۱>۲x^۲\Rightarrow ۲x^۲-x+۱<۰\xrightarrow{a>۰,\Delta<۰}\text{غ ق ق}$$

$$۲)\ x-۱<-۲x^۲\Rightarrow\underbrace{۲x^۲+x-۱}_{p(x)}<۰\Rightarrow\Delta=۹\Rightarrow x=-۱\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
p(x)		+	۰	− ج	۰	+	

$$\Rightarrow x\in(-۱,\ \frac{۱}{۲})$$

برای اینکه $b-a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a,b)=\left(-۱,\ \frac{۱}{۲}\right)$، درنتیجه:

$$b-a=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

۷ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\text{رأس سهمی} : A(-۱,۹) \Rightarrow x_s = \frac{-b}{۲a} = -۱ \Rightarrow b = ۲a \quad (*)$$

حال نقاط $A(-۱,۹)$ و $(۳,۱)$ را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(-۱,۹) : a - b + c = ۹ \xrightarrow{(*)} a - ۲a + c = ۹ \Rightarrow -a + c = ۹ \\ (۳,۱) : ۹a + ۳b + c = ۱ \xrightarrow{(*)} ۹a + ۶a + c = ۱ \Rightarrow ۱۵a + c = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + c = ۹ \\ ۱۵a + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶a = -۸ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(*)} b = -۱$$

$$a - b + c = ۹ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} + ۱ + c = ۹ \Rightarrow c = \frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y = -\frac{۱}{۲}x^۲ - x + \frac{۱۷}{۲}$$

هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند، جواب مسئله است:

گزینه ۱:

$$(۵,-۷) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۲۵) - ۵ + \frac{۱۷}{۲} \neq -۷ \quad \times$$

گزینه ۲:

$$(۵,-۹) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۲۵) - ۵ + \frac{۱۷}{۲} = -۹ \quad \checkmark$$

گزینه ۳:

$$(۲,۵) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۴) - ۲ + \frac{۱۷}{۲} \neq ۵ \quad \times$$

گزینه ۴:

$$(۱,۵) \Rightarrow -\frac{۱}{۲} - ۱ + \frac{۱۷}{۲} \neq ۵ \quad \times$$

راه‌حل دوم: حالت کلی معادلهٔ سهمی به رأس (α,β) به‌صورت زیر است:

$$y = k(x-\alpha)^۲ + \beta$$

بنابراین داریم:

$$\text{رأس سهمی} : A(-۱,۹) \Rightarrow y = k(x+۱)^۲ + ۹$$

اکنون نقطهٔ $(۳,۱)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$k(۳+۱)^۲ + ۹ = ۱ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲ + ۹$$

با جایگذاری گزینه‌ها در معادلهٔ سهمی، فقط نقطهٔ گزینهٔ (۲) در معادله صدق می‌کند.

$$y(۵) = -۹$$

۸

گزینهٔ ۱

نمودار $y = \left|۲x^۲ - ۴\right|$ در زیر خط $y = ۲x$ قرار دارد، بنابراین:

$$\left|۲x^۲ - ۴\right| < ۲x$$

$$\Rightarrow -۲x < ۲x^۲ - ۴ < ۲x \xrightarrow{\div ۲} -x < x^۲ - ۲ < x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $-x < x^۲ - ۲$ و $x^۲ - ۲ < x$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲ > -x \Rightarrow \underbrace{x^۲ + x - ۲}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
p(x)		+ ج	∘	−	∘	+ ج	

$$\Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > ۱ \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۲ < x \Rightarrow \underbrace{x^۲ - x - ۲}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
q(x)		+	∘	− ج	∘	+	

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow (a, b) = (۱, ۲)$$

بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$۲ - ۱ = ۱$$

۹ گزینه ۴

$$۱ < \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \dfrac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \\ ۲)\ \dfrac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \end{cases}$$

ابتدا هردو نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱)\ \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-x+۲}{۲x-۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
p(x)		−	ت.ن	+ ج	۰	−	

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < x < ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۴}{۵}$		$+\infty$
q(x)		− ج	ت.ن	+	۰	− ج	

$$\Rightarrow x < \frac{۱}{۲} \text{ یا } x > \frac{۴}{۵} \quad (II)$$

حال اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} \frac{۴}{۵} < x < ۲ \Rightarrow x \in (۰/۸, ۲)$$

راه تستی (عددگذاری):

حذف گزینهٔ "۳":

$$x = ۱ \Rightarrow ۱ < \frac{۲}{۱} < ۳$$

حذف گزینهٔ "۱" و "۲":

$$x = ۱/۵ \Rightarrow ۱ < \frac{۲/۵}{۲} < ۳$$

۱۰ گزینه ۲

ابتدا هر عبارت را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}=\frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{۵-\sqrt{۶}}=\frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{۵-\sqrt{۶}}\times\frac{۵+\sqrt{۶}}{۵+\sqrt{۶}}$$

$$=\frac{۱۰\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}+۱۵\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}}{۲۵-۶}=\frac{۱۹\left(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\right)}{۱۹}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\quad(۱)$$

$$۲\left(\sqrt[۴]{۹}-۱\right)^{-۱}=\frac{۲}{\sqrt[۴]{۹}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}$$

$$=\frac{۲\left(\sqrt{۳}+۱\right)}{۲}=\sqrt{۳}+۱\quad(۲)$$

بنابراین طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}-۲\left(\sqrt[۴]{۹}-۱\right)^{-۱}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\left(\sqrt{۳}+۱\right)=\sqrt{۲}-۱$$

۱۱ گزینه ۴

برای اینکه حاصل عبارت را به دست آوریم ابتدا فرض می‌کنیم $A=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$ که عبارتی مثبت است، باشد. باتوجه‌به عبارت‌های زیر رادیکال‌ها اگر $A^{۲}$ را به دست آوریم، به راحتی عبارت‌ها ساده می‌شوند. پس ابتدا $A^{۲}$ سپس A را حساب می‌کنیم. پس از تعیین A، حاصل عبارت $A\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ را مشخص می‌کنیم.

$$A=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}A^{۲}=(۲-\sqrt{۳})+۲\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}+(۲+\sqrt{۳})$$
$$=۲-\sqrt{۳}+۲\sqrt{۴-۳}+۲+\sqrt{۳}=۲+۲+۲=۶\Rightarrow A^{۲}=۶\Rightarrow A=\sqrt{۶}$$

با معلوم شدن مقدار A، حاصل عبارت اصلی را به دست می‌آوریم:

$$\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right)\cdot\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۶}\times\sqrt[۳]{\left(\sqrt{۲}\right)^{۳}}=\sqrt{۶}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

۱۲ گزینه ۱

برای به دست آوردن محدودهٔ x، موانعی که در اطراف آن وجود دارد را مرحله‌به‌مرحله حذف می‌کنیم تا جواب نامعادله به دست آید:

$$-۱\leq ۳x-۲\leq ۱\xrightarrow{+۲}۱\leq ۳x\leq ۳\xrightarrow{\div ۳}\frac{۱}{۳}\leq x\leq ۱$$

۱۳

گزینه ۲

گام اول

الف) داریم:

$$۲y + x = ۵ \Rightarrow ۲y = ۵ - x \Rightarrow y = \frac{۵ - x}{۲}$$

ب) چون می خواهیم نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ بالای خط به معادلهٔ $۲y + x = ۵$ قرار بگیرد، ابتدا باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $۴ - |x| > \frac{۵ - x}{۲}$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۴ - |x| > \frac{۵ - x}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۸ - ۲|x| > ۵ - x \Rightarrow x - ۲|x| > -۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ : x - ۲x > -۳ \Rightarrow x < ۳ \Rightarrow ۰ \leq x < ۳ \\ x < ۰ : x + ۲x > -۳ \Rightarrow ۳x > -۳ \Rightarrow x > -۱ \Rightarrow -۱ < x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۱ < x < ۳ \Rightarrow x \in (-۱, ۳) \Rightarrow (a, b) = (-۱, ۳) \Rightarrow b - a = ۳ + ۱ = ۴$$

۱۴

گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ خط را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$۲y + x = ۵ \Rightarrow ۲y = -x + ۵ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$$

نمودار تابع $y = ۴ - |x|$ بالای خط $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$ قرار دارد پس باید نامعادلهٔ $۴ - |x| > -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$ برقرار باشد. جواب نامعادله را در دو حالت $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تعیین می کنیم.

$$x \geq ۰ : |x| = x \Rightarrow ۴ - x > -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}x < ۴ - \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow x < ۳ \xrightarrow{x \geq ۰} ۰ \leq x < ۳ \quad (I)$$

$$x < ۰ : |x| = -x \Rightarrow ۴ + x > -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}x > -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\div \frac{۳}{۲}} x > -۱ \xrightarrow{x < ۰} -۱ < x < ۰ \quad (II)$$

مجموعه جواب کل، اجتماع دو بازهٔ (I) و (II) بوده که برابر $(-۱, ۳)$ می شود. $b - a$ برابر است با:

$$b - a = ۳ - (-۱) = ۳ + ۱ = ۴$$

۱۵ گزینه ۴

برای حل تست گام‌های زیر را برمی‌داریم:

الف) باتوجه‌به کتاب درسی، داریم:

$$|a| < k \Rightarrow -k < a < k$$

ب) نامعادله را در دو مرحله ($-k < a$ و $a < k$) حل کرده و بین مجموعه‌جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم.

$$|x^۲ - ۲x| < x \Rightarrow -x < x^۲ - ۲x < x$$

$$۱)\ \ x^۲ - ۲x > -x \Rightarrow x^۲ - x > ۰ \Rightarrow x(x-۱) > ۰ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < ۰ \quad (I)$$

$$۲)\ \ x^۲ - ۲x < x \Rightarrow x^۲ - ۳x < ۰ \Rightarrow x(x-۳) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۳ \quad (II)$$

نامعادله‌های ۱ و ۲ باید هم‌زمان برقرار باشند، پس بین دو مجموعه‌جواب به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم.

$$(I) \cap (II)\ :\ ۱ < x < ۳ \Rightarrow x \in (۱, ۳)$$

۱۶ گزینه ۳

راه‌حل اول:

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای ابتدا طرفین تساوی $۵x - \frac{۳}{۲x} = ۴$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ = ۴^۲ \Rightarrow (۵x)^۲ - ۲ \times (۵x) \times (\frac{۳}{۲x}) + (\frac{۳}{۲x})^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow ۲۵x^۲ - ۱۵ + \frac{۹}{۴x^۲} = ۱۶ \Rightarrow ۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲} = ۱۶ + ۱۵$$
$$\Rightarrow ۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲} = ۳۱$$

راه‌حل دوم:

$$۲۵x^۲ + \frac{۹}{۴x^۲} = (۵x)^۲ + (\frac{۳}{۲x})^۲ = (۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ + ۲ \times (۵x) \times (\frac{۳}{۲x})$$
$$= (۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ + ۱۵ \xrightarrow{۵x - \frac{۳}{۲x} = ۴} (۵x - \frac{۳}{۲x})^۲ + ۱۵ = ۴^۲ + ۱۵ = ۱۶ + ۱۵ = ۳۱$$

۱۷ گزینه ۴

تمامی عبارت‌ها را بر اساس توان‌هایی از ۲ و ۳ می‌نویسیم:

$$\sqrt[۶]{۲^۲ \times ۳} \times \sqrt[۴]{۲ \times ۳^۳} \times \sqrt[۳]{۲ \times \sqrt[۴]{۲ \times ۳}}$$
$$= ((۲)^{\frac{۲}{۶}} \times (۳)^{\frac{۱}{۶}}) \times (۲^{\frac{۱}{۴}} \times ۳^{\frac{۳}{۴}}) \times (۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{\frac{۱}{۱۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۱۲}})$$
$$= ۲^{(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۲})} \times ۳^{(\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۱۲})} = ۲^۱ \times ۳^۱ = ۶$$

۱۸

گزینه ۲

گام اول

الف) نمودار تابع $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{x^2+4}$ در صورتی پایین خط $y=2$ قرار می گیرد که نامعادلهٔ $\dfrac{3x^2-2x}{x^2+4}<2$ برقرار باشد.
ب) با تعیین علامت، محدودهٔ جواب نامعادله را تعیین کرده، آن را با بازهٔ (a,b) مطابقت داده و مقدار $b-a$ را محاسبه می کنیم.

گام دوم

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2\Rightarrow\frac{3x^2-2x}{x^2+4}-2<0\Rightarrow\frac{3x^2-2x-2x^2-8}{x^2+4}<0\Rightarrow\frac{x^2-2x-8}{x^2+4}<0$$
$$\xrightarrow{x^2+4>0}x^2-2x-8<0\Rightarrow(x-4)(x+2)<0\Rightarrow-2<x<4\Rightarrow x\in(-2\,,\,4)$$

بنابراین بازهٔ $(a\,,\,b)$ به صورت $(-2\,,\,4)$ در آمده و حاصل $b-a$ برابر است با:

$$b-a=4-(-2)=4+2=6$$

۱۹

گزینه ۳

اگر قرار باشد عبارت درجه دو به فرم $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها قرار داشته باشد باید دو شرط زیر هم زمان برقرار باشد:

$1)\;\; a>0$

$2)\;\; \Delta<0$

مجموعه جواب هر دو نامعادله را تعیین کرده و بین آن ها اشتراک می گیریم:

$f(x)=(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$

$1)\;\; a-1>0\Rightarrow a>1 \quad (I)$

$2)\;\; \Delta<0\Rightarrow(2\sqrt{2})^2-4(a-1)(a)<0\Rightarrow 8-4a^2+4a<0$

$\Rightarrow 4a^2-4a-8>0\xrightarrow{\div 4}a^2-a-2>0$

$\Rightarrow (a-2)(a+1)>0\Rightarrow a<-1$ یا $a>2 \quad (II)$

اشتراک مجموعه جواب های (I) و (II) برابر است با:

$(I)\cap(II): a>2$

۲۰ گزینه ۳

عبارت درجهٔ دو در صورتی به ازای هر مقدار x منفی است که اولاً ضریب $x^۲$ منفی باشد، ثانیاً معادله ریشه نداشته و $\Delta < ۰$ باشد. مجموعه‌جواب نامعادله‌های گفته‌شده را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$f(x) = (a-۱)x^۲ + (a-۱)x + ۱$$

$$۱)\ \ a - ۱ < ۰ \Rightarrow a < ۱ \quad (I)$$

$$۲)\ \ \Delta < ۰ \Rightarrow (a-۱)^۲ - ۴(a-۱)(۱) < ۰$$

$$\Rightarrow (a-۱)(a-۱-۴) < ۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۵) < ۰ \Rightarrow ۱ < a < ۵ \quad (II)$$

بین دو مجموعه‌جواب (I) و (II) هیچ اشتراکی وجود ندارد، بنابراین مجموعه‌جواب قابل‌قبول برای a مجموعهٔ $\varnothing$ است.

۲۱ گزینه ۳

گام اول

الف) باتوجه‌به ریشه‌های قدر مطلق $|۲x|$ و $|x-۱|$، عبارت درون قدرمطلق‌ها را در سه محدودهٔ $x < ۰$، $۰ \leq x \leq ۱$ و $x > ۱$ تعیین علامت می‌کنیم.

ب) جواب سؤال بازه‌ای است که روی آن $f(x) > g(x)$ باشد که در هریک از سه محدودهٔ مشخص‌شده به‌صورت جداگانه تعیین می‌شود.

ج) اجتماع بازه‌های به‌دست‌آمده جواب سؤال خواهد بود.

گام دوم

$$۱)\ \ x < ۰ \Rightarrow |۲x| = -۲x \text{ و } |x-۱| = -(x-۱) = ۱-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x-۱| > |۲x| \Rightarrow ۵ - (۱-x) > -۲x \Rightarrow x + ۴ > -۲x \Rightarrow ۳x > -۴$$

$$\Rightarrow x > -\frac{۴}{۳} \xrightarrow{x<۰} x \in (-\frac{۴}{۳}, ۰)$$

$$۲)\ \ ۰ \leq x \leq ۱ \Rightarrow |۲x| = ۲x \text{ و } |x-۱| = -(x-۱) = ۱-x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x-۱| > |۲x| \Rightarrow ۵ - (۱-x) > ۲x \Rightarrow x + ۴ > ۲x \Rightarrow x < ۴ \xrightarrow{۰\leq x\leq ۱} x \in [۰, ۱]$$

$$۳)\ \ x > ۱ \Rightarrow |۲x| = ۲x \text{ و } |x-۱| = x-۱$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x-۱| > ۲x \Rightarrow ۵ - (x-۱) > ۲x \Rightarrow ۵ - x + ۱ > ۲x \Rightarrow ۳x < ۶$$

$$\Rightarrow x < ۲ \xrightarrow{x>۱} x \in (۱, ۲)$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $(-\frac{۴}{۳}, ۲)$ درمی‌آید.

۲۲ گزینه ۳

روش اول:

این نامعادله را در دو حالت حل می کنیم. یک بار $x \geq 0$ و بار دیگره $x < $ فرض می شود. مجموعه جواب نامعادله را در هر یک از حالت ها به دست آورده و چون هر دوی آن ها برای ما قابل‌قبول است بین آن ها اجتماع می گیریم.

$$1)\ \ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x : x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3 \xrightarrow{|x|=x} x + x \leq \frac{1}{2}x + 3$$
$$\Rightarrow 2x \leq \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x \leq 2$$

$$2)\ \ x < 0 \Rightarrow |x| = -x : x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3 \xrightarrow{|x|=-x} x - x \leq \frac{1}{2}x + 3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -6 \xrightarrow{x<0} -6 \leq x < 0$$

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = [-6\,,\,0) \cup [0\,,\,2] = [-6\,,\,2]$$

روش دوم:

اگر $|x| \leq a$، آنگاه $-a \leq x \leq a$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3$$
$$|x| \leq -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow -(-\frac{1}{2}x + 3) \leq x \leq -\frac{1}{2}x + 3$$
$$x \leq -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 2$$
$$x \geq -(-\frac{1}{2}x + 3) \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -6$$

بنابراین $-6 \leq x \leq 2$ بوده و مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-6\,,\,2]$ به دست می آید.

۲۳ گزینه ۱

با ایجاد تغییراتی در نامعادله سعی می کنیم به نامعادله ای به صورت $Q(x) > 0$ برسیم. $Q(x)$ را تعیین علامت کرده و محدوده ای که مثبت باشد را به عنوان جواب در نظر می گیریم.

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x(x+1)}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-(2x^2+x+1)}{x+1} > 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{2x^2+x+1}{x+1} < 0$$

عبارت $2x^2 + x + 1$ همواره مثبت است، چون در این عبارت درجه دو مقدار $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است پس مخرج باید منفی باشد. داریم:

$$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow \{x : x < -1\}$$

۲۴ گزینه ۱

روش اول:

ابتدا با استفاده از تعریف نامعادلهٔ قدرمطلقی $|u| < a$، دامنهٔ تعریف تابع را به طور دقیق مشخص می‌کنیم:

$$|u| < a \Rightarrow -a < u < a$$

سپس مشخص می‌کنیم در محدودهٔ به‌دست‌آمده، تابع $f(x)$ چه وضعیتی دارد.

$$|x-۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \xrightarrow{+۱} -۱ < x < ۳ \Rightarrow D_f = (-۱, ۳)$$

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = x^۲ - ۲x + ۱ - ۴ = (x-۱)^۲ - ۴$$

در محدودهٔ $(-۱, ۳)$، وضعیت $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

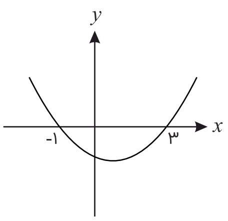
$$-۱ < x < ۳ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \Rightarrow (x-۱)^۲ < ۴ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۴ < ۰ \Rightarrow f(x) < ۰$$

پس در دامنهٔ مشخص‌شده تابع $f(x)$ همواره منفی است.

روش دوم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۳)(x+۱)$$

با رسم نمودار تابع $f(x)$ وضعیت آن را در بازهٔ داده‌شده بررسی می‌کنیم.



در بازهٔ $(-۱, ۳)$ نمودار $f(x)$ همواره زیر محور xها قرار دارد پس مقدار آن همواره منفی است.

روش سوم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۳)(x+۱)$$

$$|x-۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۱ < ۲ \xrightarrow{+۱} -۱ < x < ۳ \Rightarrow D_f = (-۱, ۳)$$

تابع $f(x)$ را تعیین علامت کرده و وضعیت آن را روی دامنهٔ تعریف‌شده یعنی بازهٔ $(-۱, ۳)$ مشخص می‌کنیم:
تابع $f(x)$ روی دامنهٔ تعریف‌شده در صورت تست همواره منفی است.

x		-۱		۳	
$f(x)$	+	۰	−	۰	+

۲۵ گزینه ۱

دو طرف نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-۶}{x+۱}}_{p(x)}<۰$$

x	$-\infty$	-۶		-۱		$+\infty$
p(x)	$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$	

$p(x)<۰ \Rightarrow x<-۶$ یا $x>-۱$ (۱)

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{x-۴}{x+۱}}_{q(x)}>۰$$

x	$-\infty$	-۱		۴		$+\infty$
q(x)	$+$	ت.ن	$-$	۰	$+$	

$q(x)>۰ \Rightarrow x<-۱$ یا $x>۴$ (۲)

اشتراک (۱) و (۲) جواب مسئله است که اجتماع دو بازهٔ $(-\infty,-۶)$ و $(۴,+\infty)$ می‌باشد که به‌صورت $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.

۲۶ گزینه ۳

مسئله را با این شرط که ضریب $x^{۲}$ مخالف صفر است، حل می‌کنیم. ($۲m-۱\neq ۰$)

شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد این است که $\Delta > ۰$.

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۶)^{۲} - ۴(۲m-۱)(m-۲) > ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۴} ۹ - \left(۲m^{۲} - ۴m - m + ۲\right) > ۰ \Rightarrow ۲m^{۲} - ۵m - ۷ < ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(۲m-۷)(m+۱)}_{P(m)} < ۰ \Rightarrow m = -۱,\ \frac{۷}{۲}$$

m		-۱		$\frac{۷}{۲}$	
P(m)	+	۰	−	۰	+

$$P(m) < ۰ \Rightarrow -۱ < m < \frac{۷}{۲}$$

۲۷ گزینه ۴

یک‌بار فرض می‌کنیم $x \geq ۰$ باشد و بار دیگر $x < ۰$. در هر دو حالت مجموعه‌جواب نامعادله را تعیین کرده و سپس بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x$$

$$(x - ۴)\,x < ۲x - ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x < ۲x - ۵ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۵ < ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۵)(x - ۱) < ۰ \Rightarrow ۱ < x < ۵ \quad (\mathrm{I})$$

باتوجه‌به محدودهٔ اولیه $(x \geq ۰)$ این جواب قابل‌قبول است.

$$x < ۰ \Rightarrow |x| = -x$$

$$(x - ۴)(-x) < ۲x - ۵ \Rightarrow -x^۲ + ۴x < ۲x - ۵ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۵ > ۰$$

x		$۱-\sqrt{۶}$		$۱+\sqrt{۶}$	
$x^۲-۲x-۵$	+	۰	−	۰	+

$$x < ۱ - \sqrt{۶} \ \text{یا}\ x > ۱ + \sqrt{۶} \xrightarrow{x<۰} x < ۱ - \sqrt{۶} \quad (\mathrm{II})$$

اجتماع دو مجموعه‌جواب (I) و (II) برابر است با:

$$(-\infty\,, ۱ - \sqrt{۶}) \cup (۱,\, ۵)$$

۲۸

گزینه ۴

گام اول

طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$(A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲}$$

گام دوم

با استفاده از اتحاد مزدوج و با در نظر گرفتن $A=\alpha^{۲}+\beta^{۲}$ و $B=\alpha\beta$ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}-\alpha\beta\right)\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\alpha\beta\right)=\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}\right)^{۲}-(\alpha\beta)^{۲}=\alpha^{۴}+\beta^{۴}+۲\alpha^{۲}\beta^{۲}-\alpha^{۲}\beta^{۲}=\alpha^{۴}+\beta^{۴}+\alpha^{۲}\beta^{۲}$$

مقادیر α و β را در عبارت به‌دست‌آمده جایگذاری می‌کنیم:

$$\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲}-۴\right)}\right)^{۲}\left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲}+۴\right)}\right)^{۲}$$

$$=\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}\right)^{۴}+\left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲}-۴\right)\left(۳\sqrt{۲}+۴\right)}\right)^{۲}$$

$$=۳\sqrt{۲}-۴+۳\sqrt{۲}+۴+\sqrt{۲}=۷\sqrt{۲}$$

۲۹ گزینه ۴

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

گام دوم

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq 2$ و $x < 2$ حل می‌کنیم:

$$\text{(I)} \quad x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x - 2| = x - 2$$
$$2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow \quad (x - 2)(x + 1) < 0$$
$$\Rightarrow \quad -1 < x < 2 \xrightarrow{x \geq 2} \text{x هیچ مقداری نمی تواند داشته باشد}$$

$$\text{(II)} \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad |x - 2| = -(x - 2)$$
$$2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 < 0$$
$$\Rightarrow \quad (x - 2)(x - 1) < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 2 \xrightarrow{x<2} 1 < x < 2$$

اجتماع دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده؛ یعنی بازهٔ $(1, 2)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x + 1 - |x - 2| > |x^2 + 1|$ می‌شود.

۳۰ گزینه ۲

عبارت درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه x مثبت است که دو شرط $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ همزمان برقرار باشد. مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$۱)\ \ a > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (I)$$

$$f(x) = (m-۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱$$

$$۲)\ \ \Delta < ۰ \Rightarrow ۶^۲ - ۴(m-۱)(۲m+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow ۳۶ - ۴(m-۱)(۲m+۱) < ۰ \xrightarrow{\div ۴} ۹ - (m-۱)(۲m+۱) < ۰$$

$$\Rightarrow ۹ - ۲m^۲ + m + ۱ < ۰ \Rightarrow -۲m^۲ + m + ۱۰ < ۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - m - ۱۰ > ۰ \Rightarrow (۲m - ۵)(m + ۲) > ۰$$

$$\Rightarrow m > \frac{۵}{۲} \text{ یا } m < -۲ \quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) : m > \frac{۵}{۲} \Rightarrow m > ۲/۵$$

۳۱ گزینه ۱

راه‌حل اول:

با عددگذاری داریم:

$$x = ۱ \xrightarrow[\text{در نامعادله}]{\text{با جایگذاری}} -۱ < \frac{۳(۱)+۱}{(۱)-۳} < ۳ \Rightarrow -۱ < -۲ < ۳ \quad \times$$

بنابراین گزینه‌های ۲،۳و۴ نادرست است.

راه‌حل دوم:

گام اول

نامعادله را به نامعادله‌ای به فرم $-a < u < a$ تبدیل می‌کنیم تا از ویژگی‌های نامعادلات قدر مطلقی استفاده کنیم.

گام دوم

$$-۱ < \frac{۳x+۱}{x-۳} < ۳ \xrightarrow{-۱} -۲ < \frac{۳x+۱-x+۳}{x-۳} < ۲ \Rightarrow -۲ < \frac{۲x+۴}{x-۳} < ۲$$

$$\Rightarrow \left|\frac{۲(x+۲)}{x-۳}\right| < ۲ \xrightarrow{\div ۲} \left|\frac{x+۲}{x-۳}\right| < ۱ \Rightarrow |x+۲| < |x-۳|$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^۲ + ۴x + ۴ < x^۲ - ۶x + ۹ \Rightarrow ۱۰x < ۵ \xrightarrow{\div ۱۰} x < \frac{۱}{۲}$$

۳۲ گزینه ۲

اگر سهمی پایین محور xها باشد، باید $\Delta < ۰$ و $a < ۰$ باشد. پس:

$$y = (۱-m)x^۲ + ۲(m-۳)x - ۱$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۴(m-۳)^۲ + ۴(۱-m) = ۴\left(m^۲ - ۶m + ۹\right) + ۴ - ۴m < ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} m^۲ - ۶m + ۹ + ۱ - m < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۷m + ۱۰ < ۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m-۵) < ۰ \Rightarrow ۲ < m < ۵ \quad (۱)$$

$$a = ۱ - m < ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر بازهٔ $(۲,۵)$ است.

۳۳ گزینه ۳

راه‌حل تستی:

$$x = ۳ \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} \frac{۱۳}{۴} > ۳ \quad \checkmark$$

$x = ۳$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند.

$$x = ۰ \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} ۴ > ۰ \quad \Rightarrow \text{گزینهٔ ۲ هم حذف می‌شود}$$

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{۷x - ۸}{(x-۲)(x+۱)} - \frac{x}{x-۲} > ۰ \Rightarrow \frac{(۷x-۸) - x(x+۱)}{(x-۲)(x+۱)} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x^۲ + ۶x - ۸}{(x-۲)(x+۱)} = \frac{-(x-۲)(x-۴)}{(x-۲)(x+۱)} = -\frac{x-۴}{x+۱} > ۰$$

x		-۱		۲		۴	
$-\frac{x-۴}{x+۱}$	$-$		$+$		$+$		$-$

$$\Rightarrow x \in (-۱,۲) \cup (۲,۴)$$

۳۴ گزینه ۳

$$A = \sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}\,(۱۲)^{-۱/۵} = \sqrt[۵]{۳^۲\sqrt{۳}}(۱۲)^{-\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۵]{\sqrt{۳^۵}} \times \frac{۱}{\sqrt{۱۲^۳}}$$

$$A = \sqrt[۱۰]{۳^۵} \times \frac{۱}{۱۲\sqrt{۱۲}} = \sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲۴\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲۴}$$

$$\Rightarrow A^{-۱} = ۲۴ \Rightarrow \left(۱ + A^{-۱}\right)^{\frac{۱}{۲}} = (۱+۲۴)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۳۵ گزینه ۲

$$A = \sqrt[۵]{۲^۲ \times (۲^۴)^{\frac{۱}{۳}}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^۲ \times ۲^{\frac{۴}{۳}}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}}$$
$$= (۲^{\frac{۱۰}{۳}})^{\frac{۱}{۵}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{۶}{۳}} = ۲^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow (۲A)^{-\frac{۱}{۳}} = (۲ \times ۴)^{-\frac{۱}{۳}} = ۸^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

۳۶ گزینه ۲

$$\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right| > ۱ \Rightarrow (\frac{۲-x}{۲x-۳})^۲ > ۱ \xrightarrow{x \neq \frac{۳}{۲}} x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ < ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۶۴ - ۴(۳)(۵) = ۴$$
$$\Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{۸ \pm \sqrt{۴}}{۶} \Rightarrow x_{۱,۲} = ۱,\ \frac{۵}{۳}$$

x		۱		$\frac{۵}{۳}$	
$۳x^۲-۸x+۵$	+	۰	−	۰	+

مقدار $x = \frac{۳}{۲}$ که در این بازه قرار دارد، غیرقابل‌قبول است (ریشهٔ مخرج است)، پس مجموعه جواب صحیح این نامعادله به صورت زیر است:

$$x = (۱, \frac{۵}{۳}) - \frac{۳}{۲}$$

نکته: گزینه‌های ۱ و ۳ را نیز می توان به عنوان جواب‌های درست در نظر گرفت ولی باتوجه به گزینه های موجود کامل‌ترین جواب گزینهٔ ۲ است. در غیر این‌صورت گزینه های ۱ و ۳ هم صحیح خواهند بود.

۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۳x^۲ - ۱۰x - ۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}} - ۱}$ کدام است؟

۱) ۱۱۲-   ۲) ۹۶-

۳) ۸۴-   ۴) ۷۲-

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲ تعداد نقاط ناپیوستهٔ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۳-\sqrt{x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x+۱}} + \frac{۱}{x+۵}$، کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱

۳) ۲   ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳ تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x - \frac{۱}{۳}] + [x + \frac{۲}{۳}]$، در بازهٔ $[-\frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳}]$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۴   ۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{۲^{۲n+۱} - ۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱} + ۳ \times ۲^{۱-۲n}}$ ، کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}}$ ، کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۰   ۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ اگر $f(x)=\begin{cases} ax-۱ & ;x<۱ \\ x^۲+۲a & ;x\geq ۱\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$، مقدار a کدام است؟

۱) -۴
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۷ حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} \dfrac{[x]+۳}{x+۲}$ ، کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۸ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]\sin \pi x \;;\; |x|\leq ۲$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. اگر $f(۳)=۶$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $y=-۱$
۲) $y=-\frac{۱}{۲}$
۳) $y=\frac{۱}{۲}$
۴) $y=\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}$، کدام است؟

۱) -۲
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x)=۲x^۴+ax^۳+۲x^۲-۳x$، بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+۲$، کدام است؟

۱) -۱۰
۲) -۸
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲\sin^۲ x-\sin x-۱}{\cos^۲ x} & ;\ x\neq\dfrac{\pi}{۲}\\ a & ;\ x=\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$، در $x=\dfrac{\pi}{۲}$، پیوسته است؟

۱) $۱/۵$ ۲) ۱

۳) -۱ ۴) $-۱/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۴x^n-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=۲$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$، کدام است؟

۱) $-\dfrac{۴}{۱۷}$ ۲) $-\dfrac{۶}{۱۷}$

۳) $-\dfrac{۵}{۱۲}$ ۴) $-\dfrac{۶}{۱۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴ فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱

۳) صفر ۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}$ دارای خط‌های مجانب $y=-۱$، $x=-۲$ و $x=۱$ است. $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵

۳) ۱/۷۵ ۴) -۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۶ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;\ |x-۱|<۱\\ x^۲+ax+b & ;\ |x-۱|\geq ۱\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۷ حاصل $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}$، کدام است؟

۱) -۱/۵ ۲) -۱/۲

۳) -۰/۸ ۴) -۰/۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۸ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$، کدام است؟

۱) $-x+4$

۲) $x+3$

۳) $2x+6$

۴) $2x-3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{24}$

۲) $\dfrac{1}{18}$

۳) $\dfrac{1}{12}$

۴) $\dfrac{5}{36}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۰ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-1)+p(1-x)$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) -1

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to -1$، کدام است؟

۱) $\dfrac{2}{3}$

۲) $\dfrac{5}{6}$

۳) $\dfrac{3}{2}$

۴) $\dfrac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۲ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin(x-[x])\pi$ روی بازهٔ $(2,6)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۳ دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x}}$ و $g(x)=\dfrac{1-x}{x-\sqrt{x}}$ مفروض اند، تعداد مجانب‌های نمودار تابع $(f+g)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $x^۴ - ax^۳ + x^۲ + ۲ax + ۱$ بر $x + ۱$ برابر ۴ است، a کدام است؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۲۵ اگر $f(x) = \dfrac{۲x + ۵}{x^۲ - ۴x + ۳}$ و $g(x) = ۲^x$، آنگاه $\lim\limits_{x \to ۱^+} g(f(x))$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $+\infty$
۴) $\dfrac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x - \sqrt{x^۲ + ۱}$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۰^-} f\left(\dfrac{۱}{x} - \dfrac{۱}{x^۳}\right)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) $-\infty$
۴) موجود نیست

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۲۷ دو تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x^۲ + x}{x + ۲}$ و $g(x) = \dfrac{x^۲}{x - ۱}$ مفروض اند. اگر A و B محل تلاقی مجانب های منحنی تابع $(g - f)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت OAB کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = (x - ۳)\left[\dfrac{۱}{۳}x - ۱\right]$ روی بازهٔ $(۰, ۹)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۹ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۲ - \sqrt{۳ - x}}{x + ۱} & ; x < -۱ \\ ax + ۱ & ; x \geq -۱ \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$
۲) $\dfrac{۳}{۴}$
۳) $\dfrac{۵}{۴}$
۴) $\dfrac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۰ حاصل $\left(\frac{x+19}{x^2+3x-4}+\frac{3}{x+4}\right)$ $\lim\limits_{x\to -4}$ کدام است؟

۱) $\frac{-4}{5}$

۲) $\frac{-2}{3}$

۳) $\frac{2}{5}$

۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۱ اگر $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 0^-}(gof)(x)$ کدام است؟

۱) -3

۲) -1

۳) $\frac{3}{2}$

۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$، خط مجانب افقی خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط مجانب قائم کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) 1

۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x^2-3]$ روی بازهٔ $[2,2+k)$ پیوسته است، بیشترین مقدار k کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$

۲) $\sqrt{5}-2$

۳) $\sqrt{3}-1$

۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۴ یک همسایگی به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن، زیر مجموعهٔ $\left\{x : \left|\frac{x-3}{2x-1}\right|>1\right\}$ است. a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$

۲) $-\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{11}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۳۵ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; \quad |x|\geq 1 \\ x\,[x] & ; \quad |x|<1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -2

۲) -1

۳) 1

۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۶ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x} & ; \quad x \neq ۰ \\ a & ; \quad x = ۰ \end{cases}$، در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۳۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{۱-x} & x > ۰ \\ -\sqrt{۱+x} & x \leq ۰ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x^۳ - x)$ کدام است؟

۱) -۱

۲) ۱

۳) صفر

۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۸ در همسایگی محذوف به صورت $(۳a - ۷\,,\, a + ۵) - \{۳\}$ شعاع همسایگی کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۹ حد عبارت $\dfrac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$ وقتی $x \to ۲^-$ کدام است؟

۱) -۳

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۴۰ حد عبارت $\left[\dfrac{۱}{x}\right]$ در کدام حالت x متناهی نیست؟

۱) $x \to ۰^-$

۲) $x \to ۰^+$

۳) $x \to -\infty$

۴) $x \to +\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴۱ اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{۲x - ۵}{x^۲ + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۴۲ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ;x>2\\ ax-1 & ;x\leq 2\end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۴۳ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{5}$
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴۴ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{|x+2|} & ;x\neq -2\\ a & ;x=-2\end{cases}$، در نقطهٔ $x=-2$ فقط از چپ پیوسته است؟

۱) -۱۲
۲) -۶
۳) ۶
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۵ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$
۲) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$
۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$
۴) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & ;0\leq x<\dfrac{\pi}{4}\\ a\cos 3x & ;\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۱) $-2\sqrt{2}$
۲) -1
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۷ منحنی به معادلهٔ $a \neq 0$ ،$y = \frac{x^۲ + ۳x}{ax^۲ + ۴x - ۱}$ فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطهٔ تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$
۲) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۴}\right)$
۳) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$
۴) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{-۱}{۴}\right)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۸ با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x + a} & ; x \geq -۱ \\ x^۲ + ax & ; x < -۱ \end{cases}$ در $x = -۱$ پیوسته است؟

۱) $\{۱, \sqrt{۲}\}$
۲) $\{۱ + \sqrt{۲}, ۱ - \sqrt{۲}\}$
۳) $\varnothing$
۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۹ حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱ - \tan x}{\sin(x - \frac{\pi}{۴})}$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} & ; x \neq ۲ \\ a & ; x = ۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x = ۲$ پیوسته است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵۱ اگر $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{[۴\cos^۲ \pi x] - ۱۲x}{ax + b} = \frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) -۲۰
۲) -۱۶
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۲ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} & ; \quad x\neq ۱\\ a & ; \quad x=۱\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؟

۱) $\dfrac{-۱}{۲}$

۲) $\dfrac{۱}{۶}$

۳) $\dfrac{۱}{۳}$

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۳ حد عبارت $\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]+۲\left[\dfrac{x}{\sin x}\right]$، وقتی $x\to ۰$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

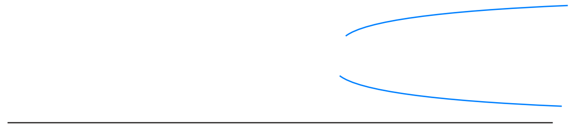
۳) ۳

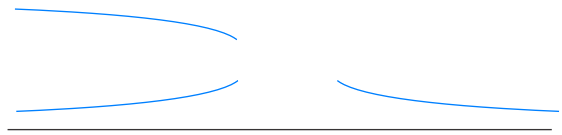
۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۴ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}$، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۵ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & ; |x|>۱\\ ۲x & ; |x|\leq ۱\end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- چگونه است؟

۱) در ۱- ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته

۲) در ۱- ناپیوسته، در ۱ پیوسته

۳) در ۱- پیوسته، در ۱ پیوسته

۴) در ۱- پیوسته، در ۱ ناپیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۶ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\dfrac{\tan^۲ x-۱}{\cos ۲x}$، کدام است؟

۱) ۲-

۲) $\dfrac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & ;x\neq ۱\\ a & ;x=۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در $x=۱$ پیوسته است؟

۱) هر مقدار a
۲) -۳
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۵۸ اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=\begin{cases}f(x) & ;x\notin \mathbb{Z}\\ f(x)-۱ & ;x\in \mathbb{Z}\end{cases}$، آنگاه تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع g روی بازهٔ $[-۴,۴]$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۵۹ اگر $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}=۲^a$ باشد، آنگاه a کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$
۲) $-\dfrac{۱}{۴}$
۳) $\dfrac{۱}{۴}$
۴) $\dfrac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۶۰ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax+b & ;x>۲\\ x^۲+bx-۱ & ;x<۲\end{cases}$ با شرط $f(۲)=۵$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۱ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\dfrac{\tan x-۱}{\cos ۲x}$، کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\dfrac{۱}{۲}$
۳) $\dfrac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۲ اگر $f(x)=\frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{x+2}$، آنگاه نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-1,1)$

۳) $(-2,2)$ ۴) $(0,1)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x$، در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱) فقط در اعداد زوج پیوسته ۲) فقط در اعداد فرد پیوسته

۳) همواره ناپیوسته ۴) همواره پیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۶۴ حد عبارت $\frac{2[x]}{2-x}+\frac{x+2}{x^2-2x}$، وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $-\infty$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۵ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ;\ x\neq 0\\ a & ;\ x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۶ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{2x-\pi} & ;x\neq\frac{\pi}{2}\\ a & ;x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است؟

۱) ۱- ۲) صفر

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۶۷ به ازای مقداری از a، چندجمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$

۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۶۸ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۳x-[x] & ;x<۲ \\ a & ;x=۲ \\ x+۲ & ;x>۲ \end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است؟

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶۹ حد عبارت $\cos x[\sin ۲x]-\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}]$، وقتی $x\to\pi$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) ۱-

۲) صفر

۳) ۱

۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۰ حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{۲x^۲+۵x+۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۱۲}$

۲) $-\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۵}{۱۲}$

۴) $\frac{۷}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۷۱ تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x^۲]$، در بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} & ;x\neq۲ \\ ۲ & ;x=۲ \end{cases}$، از نظر پیوستگی در $x=۲$ چگونه است؟

۱) از چپ پیوسته

۲) پیوسته

۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته

۴) از راست پیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۳ حد عبارت $[\tan^۲x]+\cos ۳x[\sin(x-\frac{\pi}{۳})]$، وقتی $x\to\frac{\pi}{۳}$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷۴ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۷۵ حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۱}{x-\sqrt{x^۲+۲x}}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) -۱

۳) ۲

۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۷۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & ;x\notin \mathbb{Z}\\ a & ;x\in \mathbb{Z}\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) -۱

۲) ۱

۳) ۰

۴) همواره ناپیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۷۷ حد عبارت $\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$ وقتی $x\to -۸$، کدام است؟

۱) -۲۴

۲) -۱۸

۳) -۱۲

۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۸ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۹ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$

۲) $-\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۱۲}$

۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۰ حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}\right)$، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{3}{2}$

۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۱ حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x}$، کدام است؟

۱) 1 ۲) 2

۳) π ۴) 2π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۲ به ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x[x] & ; |x|<1 \\ ax+b & ; |x|\geq 1\end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x\neq 0 \\ a & ; x=0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) 1 ۴) 2

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۸۴ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x}{1+2\cos x}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}^+} f(x)=-\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}^+} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}^-} f(x)=-\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to \frac{4\pi}{3}} f(x)=+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۵ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ ، کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۸۶ اگر $f(x) = ۲x + \sqrt{۴x^۲ + x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -۱

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۷ اگر $f(x) = x - \sqrt{۴x^۲ + x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۸ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{x} & ; ۱ \leq x \leq ۶ \\ a + \cos^۲\frac{\pi x}{۳۶} & ; x > ۶ \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۸۹ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ax - ۵ & ; x > ۲ \\ ax - ۱ & ; x \leq ۲ \end{cases}$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a

۲) هیچ مقدار a

۳) فقط $a = -۲$

۴) فقط $a = ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۹۰ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos ۳x}{\cos x} & ; ۰ \leq x < \frac{\pi}{۲} \\ \sin ۵x - a & ; \frac{\pi}{۲} \leq x \leq ۲\pi \end{cases}$، بر روی بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ پیوسته است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۹۱ اگر $-\infty = \lim\limits_{x\to ۳} \frac{x-۴}{۲x^۲+ax+b}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۹۲ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) صفر
۳) ۱
۴) $+\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۹۳ حد کسر $\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n > ۳$، وقتی $x \to \infty$ برابر -۲ است. $m+n$ کدام است؟

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۹۴ به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y = x + a$ از نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع $y = \frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲}$ می‌گذرد؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۹۵ حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹۶ حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} x(x+\sqrt{x^۲-۸})$ کدام است؟

۱) -۸
۲) صفر
۳) ۴
۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۹۷ حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۹۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$
۲) $-\frac{1}{8}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۹۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطهٔ $(2,1)$ می‌گذرد، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۰۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۰۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n-3x+1}{3x^2+x}$ اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{2}{3}$، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟

۱) -2
۲) $\frac{3}{2}$
۳) 2
۴) 3

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۰۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $\varnothing$
۲) $\{2\}$
۳) $2<x<2/5$
۴) $1/5<x<2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۰۳ خط به معادلهٔ $y=\frac{۳}{۲}$ مجانب افقی نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{Ax^۳+۱}{(A-۱)x^۳+۱۶}$ است. معادله مجانب قائم نمودار f کدام است؟

۱) $x=-۴$
۲) $x=-۲$
۳) $x=۲$
۴) $x=۴$

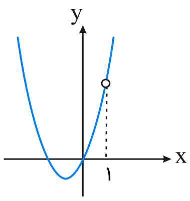
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۱۰۴ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+۳} & ; x<۱\\ x^۲+ax & ; x\geq ۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، $f(-\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۰۵ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x^۳+ax+b}{x-۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(۰,-۴)$
۲) $(-۴,۰)$
۳) $(-۴,۱)$
۴) $(۴,۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۰۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax+۲^{x-۳} & ;x<۳\\ a\log_۲^{(۱+x)} & ;x\geq ۳\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته است. $f(۲)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) $-۱/۵$
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۷ اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$، آنگاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۰۸ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۰۹ حاصل $\lim\limits_{x\to۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۱۰ حاصل $\lim\limits_{x\to-۱} \frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۱۱ اگر $f(x)=\frac{x+۱۱}{x^۲-۳x-۴}$ و $g(x)=\frac{۳}{x-۴}$، نقطهٔ تلاقی مجانب های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$
۲) $(-۱,۲)$
۳) $(۴,-۱)$
۴) $(۴,۰)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۱۲ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\cot x}{۱+\tan x}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۳ حاصل $\lim\limits_{x\to۰^-} \frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۱۱۴ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^۲}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) ۲

۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۱۱۵ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} a\sin ۲x & ; \frac{\pi}{۴} \leq x < \frac{۳\pi}{۴} \\ \cos(x+\frac{\pi}{۴}) & ; \frac{۳\pi}{۴} \leq x < ۲\pi \end{cases}$، در $x = \dfrac{۳\pi}{۴}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) $-\dfrac{۱}{۲}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۱۱۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-۱}{x-\sqrt{x}} & ; x > ۱ \\ ax-a+۲ & ; x \leq ۱ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) هر مقدار a

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} (x+a)^۲ & ; x \geq -۱ \\ ۲x+۱ & ; x < -۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = -۱$ حد دارد؟

۱) $\{۰\}$

۲) $\{۲\}$

۳) $\varnothing$

۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۱۸ به ازای کدام مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x} & ; ۰ < x < a \\ ۱-\dfrac{x}{۴} & ; \quad x \geq a \end{cases}$، همواره پیوسته است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۱۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]\cos ۴x & ; |x|\leq \dfrac{\pi}{۲}\\ a & ; x=۰\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در $x=۰$ پیوسته است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

۴) همواره ناپیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱

گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}\times\frac{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{(۲-\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{-(۳x+۲)\cancel{(۲-\sqrt{x})}(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{\cancel{(۲-\sqrt{x})}}=\lim_{x\to ۴}(-(۳x+۲)(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱))$$

$$=-۱۴\times ۴\times ۲=-۱۱۲$$

راه‌حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\frac{-\frac{۱}{۲\times ۲}}{۲}}=-۱۴\times ۸=-۱۱۲$$

۲

گزینه ۲

$$\xrightarrow{\text{دامنه}}\begin{cases}x+۴\geq ۰\Rightarrow x\geq -۴\\ ۱+\sqrt[۳]{x+۱}\neq ۰\Rightarrow x\neq -۲\\ x+۵\neq ۰\Rightarrow x\neq -۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}\text{دامنه}=[-۴,+\infty)-\{-۲\}$$

بنابراین تنها در $x=-۲$ ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش ۱ نقطه است.

۳ گزینه ۲

$$f(x)=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x+\frac{۲}{۳}\right]=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}+۱\right]$$
$$=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱=۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱$$

عبارت خطی $x-\frac{۱}{۳}$ در نقاط صحیح کنندهٔ $\left\{\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{-۲}{۳}\right\}$ از بازهٔ $\left(-\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۳}\right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to(-\frac{۵}{۳})^+}\left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right)=۲\left[(-۲)^+\right]+۱=۲(-۲)+۱=-۳$$
$$f\left(-\frac{۵}{۳}\right)=-۳$$
$$\lim_{x\to(\frac{۵}{۳})^-}\left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right)=۲\left[(\frac{۴}{۳})^-\right]+۱=۲\times۱+۱=۳\quad,\quad f\left(\frac{۵}{۳}\right)=۳$$

پس f در $-\frac{۵}{۳}$ پیوستگی راست و در $\frac{۵}{۳}$ پیوستگی چپ دارد. درنهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطهٔ ناپیوستگی داریم.
کلید سنجش ۳ نقطه است.

۴ گزینه ۱

$$n\to+\infty\Rightarrow\begin{cases}۲^{۱-۲n}=\dfrac{۱}{۲^{-۱+۲n}}\to ۰\\ ۲^{۲n+۱}\to+\infty\end{cases}$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\frac{\infty}{\infty}$$

راه‌حل اول:

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}}{۲^{۲n+۱}}=۱$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{۲^{۱-۲n}}(۲^{۴n}-۱)}{\cancel{۲^{۱-۲n}}(۲^{۴n}+۳)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۴n}-۱}{۲^{۴n}+۳}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(۲^{۴n}+۳)-۴}{(۲^{۴n}+۳)}=\lim_{n\to+\infty}۱-\underbrace{\frac{۴}{۲^{۴n}+۳}}_{۰}=۱$$

۵ گزینه ۲

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} 3^{-2n+1} = \dfrac{1}{3^{2n-1}} \to 0 \\ 3^{2n} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-2n+1}(3^{4n-1} - 1)}{3^{-2n+1}(2 \times 3^{4n-1} + 1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{4n-1} - 1}{2 \times 3^{4n-1} + 1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{3^{4n-1}}(1 - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3^{4n-1}}}})}{\cancel{3^{4n-1}}(2 + \underset{0}{\cancel{\frac{1}{3^{4n-1}}}})} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{3^{4n-1}} \to 0$$

۶ گزینه ۲

گام اول

الف) برای به دست آوردن $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ از ضابطهٔ پایین که در آن $x \geq 1$ است، استفاده می‌کنیم.

ب) برای به دست آوردن $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ از ضابطهٔ بالا که $x > 1$ است، بهره می‌بریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + 2a = (1)^2 + 2a = 2a + 1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax - 1 = a(1) - 1 = a - 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2a + 1 - (a - 1) = -1$$
$$\Rightarrow 2a + 1 - a + 1 = -1 \Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$$

۷ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{\overbrace{[(-2)^-]}^{-3} + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{0}{0^-} = 0$$

۸ گزینه ۴

$$f(x) = [x]\sin \pi x \;\; ; \;\; x \in [-۲\,,\,۲]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما ازآنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش صفر نقطه است.

۹ گزینه ۲

ازآنجاکه تابع فقط یک مجانب قائم دارد، پس $x = ۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج است؛ بنابراین:

$$۲x^۲ + bx + c = ۲(x-۲)^۲ \Rightarrow ۲x^۲ + bx + c = ۲x^۲ - ۸x + ۸ \Rightarrow b = -۸\;,\;c = ۸$$

پس $f(x) = \dfrac{ax^۲ + ۷x}{۲x^۲ - ۸x + ۸}$ است، همچنین $f(۳) = ۶$، بنابراین:

$$f(۳) = \frac{۹a + ۲۱}{۱۸ - ۲۴ + ۸} = \frac{۹a + ۲۱}{۲} = ۶ \Rightarrow ۹a + ۲۱ = ۱۲ \Rightarrow a = -۱$$

مجانب افقی : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^۲ + ۷x}{۲x^۲ - ۸x + ۸} = -\dfrac{۱}{۲}$

۱۰ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$

پس باید رفع ابهام انجام دهیم. می‌دانیم $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$. ازطرفی می‌دانیم اگر x به‌سمت صفر میل کند، $\sin x$ هم‌ارز با x می‌شود،
پس نتیجه می‌گیریم که $x\to 0\Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.
به‌علاوه هم‌ارزی زیر را داریم:

$$u\to 0\Rightarrow\sqrt[n]{1\pm u}\sim 1\pm\frac{u}{n}$$

پس:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{1+\frac{3}{2}x}-\sqrt{1-\frac{1}{2}x})}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}((1+\frac{\frac{3}{2}x}{2})-(1-\frac{\frac{1}{2}x}{2}))}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}}=-2$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$

حال کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4\cancel{x}\sqrt{1+\cos x}}{(-\cancel{x})\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\frac{4\sqrt{2}}{-1(2\sqrt{2})}=-2$$

۱۱ گزینه ۱

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(\frac{1}{2})=0$، بنابراین:

$$2(\frac{1}{2})^4+a(\frac{1}{2})^3+2(\frac{1}{2})^2-3(\frac{1}{2})=0\Rightarrow 2(\frac{1}{16})+a(\frac{1}{8})+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$$
$$\Rightarrow\frac{1}{8}+\frac{a}{8}-1=0\Rightarrow a=7$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر با $P(-2)$ است، پس داریم:

$$P(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x$$
$$\Rightarrow P(-2)=2(-2)^4+7(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)=32-56+8+6=-10$$

۱۲

گزینه ۴

تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{\pm}} f(x)=f(\frac{\pi}{۲})=a$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin^{۲}x-\sin x-۱}{\cos^{۲}x}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin^{۲}x-\sin x-۱}{\cos^{۲}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۲\sin x+۱)(\sin x-۱)}{(۱-\sin^{۲}x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(۲\sin x+۱)\cancel{(\sin x-۱)}}{-\cancel{(\sin x-۱)}(\sin x+۱)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(-\frac{۲\sin x+۱}{\sin x+۱})=-\frac{۳}{۲}$$

گزینه ۲ **۱۳**

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^n-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}=۲$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجهٔ صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n=۳$ است. همچنین طبق قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^n}{ax^۳}=\frac{۴}{a}=۲\Rightarrow a=۲$$

حال $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{۲x^۳+۷x^۲-۲}=\frac{۰}{۰}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{۲x^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{\cancel{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)}(۴x^۲-۴x-۲)}{\cancel{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)}(۲x^۲+۸x+۴)}=\frac{-۳}{\frac{۱۷}{۲}}=-\frac{۶}{۱۷}$$

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۳-۶x^۲+۱ & x-\frac{۱}{۲} \\ \underline{-۴x^۳+۲x^۲} & \overline{۴x^۲-۴x-۲} \\ -۴x^۲+۱ & \\ \underline{۴x^۲-۲x} & \\ -۲x+۱ & \\ \underline{۲x-۱} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+۷x^۲-۲ & x-\frac{۱}{۲} \\ \underline{-۲x^۳+x^۲} & \overline{۲x^۲+۸x+۴} \\ ۸x^۲-۲ & \\ \underline{-۸x^۲+۴x} & \\ ۴x-۲ & \\ \underline{-۴x+۲} & \\ ۰ & \end{array}$$

روش دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{۲x^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۱۲x^۲-۱۲x}{۶x^۲+۱۴x}=\frac{۳-۶}{\frac{۱۷}{۲}}=\frac{-۶}{۱۷}$$

۱۴ گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴)=۳$.
باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲)=۱$.
حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x=۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^۲)+۴p(-x)=p(۲^۲)+۴p(-۲)$$
$$=p(۴)+۴p(-۲)=۳+۴\times۱=۷$$

۱۵ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}$$

$y=-۱$ مجانب افقی تابع است، بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{-۲}{a}=-۱\Rightarrow a=۲\Rightarrow f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+bx+c}$$

همچنین $x=-۲$ و $x=۱$ مجانب‌های قائم تابع و درنتیجه ریشهٔ مخرج هستند، پس مخرج به‌صورت $۲(x-۱)(x+۲)$ است. بنابراین تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲(x-۱)(x+۲)}=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+۲x-۴}\Rightarrow f(-۱)=\frac{-۲-۳}{۲-۲-۴}=\frac{-۵}{-۴}=۱/۲۵$$

۱۶ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;|x-۱|<۱\\ x^۲+ax+b & ;|x-۱|\geq۱\end{cases}=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;-۱<x-۱<۱\\ x^۲+ax+b & ;x-۱\geq۱ \text{ یا } x-۱\leq-۱\end{cases}$$
$$=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;۰<x<۲\\ x^۲+ax+b & ;x\geq۲ \text{ یا } x\leq۰\end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x=۰$ و $x=۲$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)=۴+۲a+b\\ \lim\limits_{x\to۲^-}f(x)=(۲-۱)[۲^-]=۱\end{cases}\Rightarrow ۴+۲a+b=۱\quad(I)$$
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=(۰-۱)[۰^+]=۰\\ \lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=b\end{cases}\Rightarrow b=۰\quad(II)$$
$$\xrightarrow{(I),(II)}a=-\frac{۳}{۲}$$

۱۷ گزینه ۲

راه‌حل اول: با استفاده از هوپیتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x - ۷\sqrt{x} + ۵}{۲x - \sqrt{۳x+۱}} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۱} \frac{۲ - \frac{۷}{۲\sqrt{x}}}{۲ - \frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}} = \frac{۲ - \frac{۷}{۲}}{۲ - \frac{۳}{۴}} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}} = -\frac{۶}{۵} = -۱/۲$$

راه‌حل دوم: ابهام $\frac{۰}{۰}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x - ۷\sqrt{x} + ۵}{۲x - \sqrt{۳x+۱}} \times \frac{۲x + \sqrt{۳x+۱}}{۲x + \sqrt{۳x+۱}} = \lim_{x\to ۱} \frac{(۲x - ۷\sqrt{x} + ۵)(۲x + \sqrt{۳x+۱})}{۴x^۲ - ۳x - ۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(\sqrt{x} - ۱)(۲\sqrt{x} - ۵)(۲x + \sqrt{۳x+۱})}{(x-۱)(۴x+۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{\cancel{(\sqrt{x} - ۱)}(۲\sqrt{x} - ۵)(۲x + \sqrt{۳x+۱})}{\cancel{(\sqrt{x} - ۱)}(\sqrt{x}+۱)(۴x+۱)}$$

$$= \frac{-۳ \times ۴}{۲ \times ۵} = \frac{-۱۲}{۱۰} = -۱/۲$$

۱۸ گزینه ۳

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(۱) = ۸$ و $P(-\frac{۱}{۲}) = ۵$ است. همچنین داریم:

$$P(x) = (۲x^۲ - x - ۱)Q(x) + R(x) = ((x-۱)(۲x+۱))Q(x) + R(x) \quad ; R(x) = ax + b$$

بنابراین:

$$P(۱) = R(۱) = a + b = ۸$$

$$P(-\frac{۱}{۲}) = R(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۲}a + b = ۵$$

$$\begin{cases} a + b = ۸ \\ -\frac{۱}{۲}a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۳ \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = ۸ - ۲ = ۶$$

پس: $R(x) = ۲x + ۶$

۱۹ گزینه ۱

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x^n}=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow n=۱\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{۴x}=\frac{a}{۴}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\frac{۰}{۰}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}\times\frac{\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+\left(\sqrt[۳]{x^۲-۱}\right)^۲}{\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+\left(\sqrt[۳]{x^۲-۱}\right)^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۸}{۲۷}x^۳-x^۲+۱}{(۴x-۱۲)\left(\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+\left(\sqrt[۳]{x^۲-۱}\right)^۲\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}\left(\frac{۸}{۲۷}x^۲-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳}\right)}{۴\cancel{(x-۳)}\left(\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۲}{۳}x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+\left(\sqrt[۳]{x^۲-۱}\right)^۲\right)}$$

$$=\frac{\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۴\times(۴+۲\times۲+۴)}=\frac{۲}{۴۸}=\frac{۱}{۲۴}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{۸}{۲۷}x^۳-x^۲+۱ & \frac{x-۳}{\frac{۸}{۲۷}x^۲-\frac{x}{۹}-\frac{۱}{۳}} \\
\underline{-\frac{۸}{۲۷}x^۳+\frac{۸}{۹}x^۲} & \\
-\frac{۱}{۹}x^۲+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۹}x^۲-\frac{۱}{۳}x} & \\
-\frac{۱}{۳}x+۱ & \\
\underline{+\frac{۱}{۳}x-۱} & \\
۰ &
\end{array}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۲}{۳}}}{۴}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-۲\times\frac{۱}{۴}}{۴}=\frac{\frac{۴-۳}{۶}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

۲۰ گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^۲-۱$ برابر صفر است.

$$x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=۱\,,-۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱)=۰\,,p(-۱)=۰ \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$$
$$\xrightarrow{x=۲} Q(۲)=p(۲-۱)+p(۱-۲)=p(۱)+p(-۱)$$
$$\xrightarrow{(*)} Q(۲)=۰+۰=۰$$

۲۱ گزینه ۲

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a+۲)}{۲x}$$
$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۵}{۲}} \frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱} f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}}\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\times\frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}$$
$$=\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^۲-۴x^۲-۵}{۲(x+۱)(-۳-\sqrt{۴+۵})}=\lim_{x\to-۱}\frac{-۵(x-۱)(x+۱)}{۱۲(x+۱)}=\frac{۵}{۶}$$

گزینه ۱

اگر قرار باشد تابع $f(x)$ در نقاطی ناپیوسته باشد، باید دنبال نقاطی باشیم که در آن $[x]$ ناپیوسته است. در تابع $y=[x]$ نقاط $x\in\mathbb{Z}$ نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ هستند. (در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ خود تابع $y=[x]$ همواره ناپیوسته است، اما ممکن است تابع $f(x)$ در این نقاط پیوسته باشد. پس باید نقاط $x\in\mathbb{Z}$ در بازهٔ $(۲,۶)$ را مورد بررسی قرار دهیم.) پس برای تعیین تعداد نقاط ناپیوستگی، نقاط $x=۳$، $x=۴$ و $x=۵$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x=۳$:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}\sin(x-[x])\pi=\lim_{x\to ۳^-}\sin(x-۲)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}\sin(x-[x])\pi=\sin(۳-۳)\pi=\sin ۰=۰$$

$$f(۳)=\sin(۳-۳)\pi=\sin ۰=۰$$

بنابراین تابع در $x=۳$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۴$:

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-}\sin(x-[x])\pi=\sin(۴-۳)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+}\sin(x-[x])\pi=\sin(۴-۴)\pi=\sin ۰=۰$$

$$f(۴)=\sin(۴-۴)\pi=\sin ۰=۰$$

تابع در $x=۴$ هم پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۵$:

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x)=\lim_{x\to ۵^-}\sin(x-[x])\pi=\sin(۵-۴)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۵^+} f(x)=\lim_{x\to ۵^+}\sin(x-[x])\pi=\sin(۵-۵)\pi=\sin ۰=۰$$
$$f(۵)=\sin(۵-۵)\pi=\sin ۰=۰$$

تابع در $x=۵$ هم پیوسته است. ثابت شد تابع در کلیهٔ نقاط مشکوک به ناپیوستگی پیوسته است بنابراین تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ برابر صفر می شود.

۲۳ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ $f+g$ را به ساده‌ترین شکل می‌نویسیم (بین دو عبارت کسری مخرج مشترک گیری کرده و آن را ساده می‌کنیم).
برای یافتن مجانب افقی حد تابع را وقتی $x \to +\infty$ به دست می‌آوریم. باتوجه‌به وجود $\sqrt{x}$ در دو ضابطه دامنه تعریف به‌صورت $(0, +\infty)$ بوده و $x \to -\infty$ مفهومی ندارد. مجانب قائم هم ریشهٔ مخرج کسر است (البته در صورت وجود و داشتن شرایط لازم).

$$f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x+\sqrt{x}}+\frac{1-x}{x-\sqrt{x}}=\frac{(x+1)(x-\sqrt{x})+(1-x)(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{x^2-x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}-x^2}{x^2-x}=\frac{-2x\sqrt{x}+2x}{x^2-x}$$
$$=\frac{-2x(\sqrt{x}-1)}{x(x-1)}=\frac{-2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{-2}{\sqrt{x}+1}$$

مجانب افقی تابع را تعیین می‌کنیم:

$$y=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{x}}=0\Rightarrow y=0$$

$\sqrt{x}+1$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود پس مخرج کسر فاقد ریشه و درنتیجه تابع فاقد مجانب قائم است. بنابراین تابع $f+g$ در مجموع ۱ مجانب دارد.

۲۴ گزینه ۲

گام اول

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x)=x^4-ax^3+x^2+2ax+1$ بر $x+1$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-1)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow P(-1)=4$$
$$P(-1)=(-1)^4-a(-1)^3+(-1)^2+2a(-1)+1=4\Rightarrow 1+a+1-2a+1=4\Rightarrow -a+3=4$$
$$\Rightarrow a=3-4=-1\Rightarrow a=-1$$

۲۵ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. برای این کار کافی است در ضابطهٔ تابع $g(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $f(x)$ را جایگزین کنیم. در ادامه حاصل حد $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ (حد توان تابع $g(f(x))$) را وقتی $x\to1^+$ تعیین کرده، سپس حاصل حد تابع $g(f(x))$ را به دست می آوریم.

$$g(f(x))=2^{\frac{2x+5}{x^2-4x+3}}$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+5}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+5}{(x-3)(x-1)}=\frac{7}{(-2)(0^+)}=-\infty$$

و حالا محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to1^+}g(f(x))$:

$$\lim_{x\to1^+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to-\infty}g(f(x))=\lim_{x\to-\infty}2^{f(x)}=2^{-\infty}=0$$

۲۶

گزینه ۲

ابتدا حد تابع $\frac{۱}{x^۳} - \frac{۱}{x}$ را وقتی $x \to ۰^-$ به دست می آوریم. اگر حاصل حد تابع محاسبه شده در قسمت قبل را L در نظر بگیریم، باید $\lim\limits_{x\to L} f(x)$ را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - ۱}{x^۳} = \frac{۰ - ۱}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

پس باید حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳}) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^۲ + ۱})$$
$$= \lim_{x\to +\infty} (x - |x|) = \lim_{x\to +\infty} (x - x) = ۰$$

۲۷

گزینه ۱

ضابطهٔ $g - f$ را بعد از مخرج مشترک گیری و ساده کردن صورت و مخرج تشکیل می دهیم. مجانب قائم تابع ریشهٔ مخرج کسر و مجانب افقی حاصل حد تابع وقتی $x \to \infty$ است. محل برخورد مجانب ها (همان نقاط A و B) را در دستگاه مختصات مشخص کرده و مساحت مثلث OAB را محاسبه می کنیم.

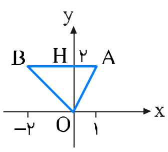
$$g(x) - f(x) = \frac{x^۲}{x - ۱} - \frac{x^۲ + x}{x + ۲} = \frac{x^۲(x + ۲) - x(x + ۱)(x - ۱)}{(x - ۱)(x + ۲)}$$
$$= \frac{x^۳ + ۲x^۲ - x^۳ + x}{(x - ۱)(x + ۲)} = \frac{۲x^۲ + x}{(x - ۱)(x + ۲)}$$

مجانب افقی : $y = \lim\limits_{x\to\infty} (g(x) - f(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{۲x^۲ + x}{(x - ۱)(x + ۲)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۲ + x}{x^۲ + x - ۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲ \Rightarrow y = ۲$$

مجانب قائم : $(x - ۱)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases}$

بنابراین محل برخورد مجانب ها نقاط $A(۱, ۲)$ و $B(-۲, ۲)$ است. این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کرده و مساحت مثلث OAB را محاسبه می کنیم:



$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} OH \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳ = ۳$$

۲۸ گزینه ۱

گام اول

الف) نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ نقاطی هستند که در آن عبارت $\frac{۱}{۳}x-۱$ برابر یک عدد صحیح شود. (اصولاً نقاطی که در آن عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد صحیح شود، نقاط ناپیوستگی تابع جزء صحیح محسوب می شوند.)

ب) $\frac{۱}{۳}x-۱$ را برابر عدد صحیح K فرض کرده و مشخص می کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(۰,۹)$ برابر عدد صحیح می شود. سپس در آن نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

گام دوم

$$\frac{۱}{۳}x-۱=K \Rightarrow \frac{۱}{۳}x=K+۱ \Rightarrow x=۳k+۳\ ,\ \ x\in(۰,۹)$$

x یک عدد مضرب ۳ به دست می آید. در بازهٔ $(۰,۹)$ دو عدد مضرب ۳ وجود دارد، $x=۳$ و $x=۶$. پیوستگی تابع را در این نقاط بررسی می کنیم:

بررسی پیوستگی تابع در $x=۳$:

تابع $f(x)$ قطعاً در $x=۳$ پیوسته است. زیرا در ضابطهٔ تابع عامل صفر کننده $(x-۳)$ وجود دارد که باعث می شود بدون توجه به مقادیری که تابع جزء صحیح به خود می گیرد، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر صفر شود. در نتیجه تابع در این نقطه پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۶$:

$$\lim_{x\to ۶^-} f(x)=\lim_{x\to ۶^-}(x-۳)[\frac{۱}{۳}x-۱]=(۶-۳)[۱^-]=۳\times ۰=۰$$
$$\lim_{x\to ۶^+} f(x)=\lim_{x\to ۶^+}(x-۳)[\frac{۱}{۳}x-۱]=(۶-۳)[۱^+]=۳\times ۱=۳$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۶^-} f(x)\neq \lim_{x\to ۶^+} f(x)$$

تابع در $x=۶$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $(۰,۹)$ تنها در ۱ نقطه ناپیوسته است.

۲۹ گزینه ۲

برای این که تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در $x=-۱$ که مرز ضابطه های تابع است نیز پیوسته باشد. پس پیوستگی تابع را در نقطه ای به طول $x=-۱$ بررسی می کنیم. حد چپ تابع در نقطه ای به طول $x=-۱$ برابر $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. بنابراین برای به دست آوردن حد چپ صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کرده و با ساده کردن آن حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{۲-\sqrt{۳-x}}{x+۱}\times\frac{۲+\sqrt{۳-x}}{۲+\sqrt{۳-x}}$$
$$=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{(۴-۳+x)}{(x+۱)(۲+\sqrt{۳-x})}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{(x+۱)}{(x+۱)(۲+\sqrt{۳-x})}$$
$$=\frac{۱}{۲+\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} ax+۱=-a+۱\ ,\ \ f(-۱)=-a+۱$$

طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=f(-۱)\Rightarrow -a+۱=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow -a=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۳۰

گزینه ۱

گام اول

وقتی $x \to -۴$، حاصل حد $\infty - \infty$ بوده و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام ابتدا با مخرج مشترک گیری میان دو کسر، عبارت را به ساده ترین شکل ممکن در آورده سپس حد آن را وقتی $x \to -۴$ محاسبه می کنیم.

$$\frac{x+۱۹}{x^۲+۳x-۴}+\frac{۳}{x+۴}=\frac{x+۱۹}{(x+۴)(x-۱)}+\frac{۳}{x+۴}$$
$$=\frac{x+۱۹+۳(x-۱)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{x+۱۹+۳x-۳}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴x+۱۶}{(x+۴)(x-۱)}$$
$$=\frac{۴(x+۴)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴}{x-۱}$$

حالا حاصل عبارت ساده شده را وقتی $x \to -۴$ حساب می کنیم:

$$\lim_{x\to -۴}\frac{۴}{x-۱}=\frac{۴}{-۴-۱}=\frac{۴}{-۵}=-\frac{۴}{۵}$$

۳۱

گزینه ۱

ضابطهٔ $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. حد تابع $g(f(x))$ را وقتی $x \to ۰^-$، به دست می آوریم. دقت کنید اگر در محاسبهٔ حد به عدد $a^{-\infty}$ که در آن $a > ۱$ است برخوردیم حاصل برابر صفر می شود.

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{۲(۲^{\frac{۱}{x}})-۳}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$$
$$\lim_{x\to ۰^-}gof(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲(۲^{\frac{۱}{x}})-۳}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$$
$$\xrightarrow{x\to ۰^- \Rightarrow \frac{۱}{x}\to -\infty}\lim_{x\to ۰^-}gof(x)=\frac{۲(۲^{-\infty})-۳}{(۲^{-\infty})+۱}=\frac{(۲\times ۰)-۳}{۰+۱}=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

۳۲ گزینه ۳

ابتدا با به دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$، معادلهٔ مجانب افقی تابع را تعیین می‌کنیم. در ادامه محل برخورد مجانب افقی و نمودار تابع یا همان نقطهٔ A را تعیین کرده و درنهایت فاصلهٔ آن را از مجانب قائم (ریشهٔ مخرج کسر) محاسبه می‌کنیم.

$$\text{مجانب افقی}: y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۲ - ۳x}{(x-۱)^۲}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۲ - ۳x}{x^۲ - ۲x + ۱} = \lim_{x\to\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲ \Rightarrow y = ۲$$

معادلهٔ $f(x) = ۲$ را حل کرده و مختصات نقطهٔ A را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = ۲ \Rightarrow \frac{۲x^۲ - ۳x}{(x-۱)^۲} = ۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x = ۲(x^۲ - ۲x + ۱)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۳x = ۲x^۲ - ۴x + ۲ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow f(۲) = \frac{۸-۶}{۱} = ۲$$

پس مختصات نقطهٔ برخورد برابر $A(۲,۲)$ شد. اکنون مجانب قائم را تعیین کرده و فاصلهٔ نقطهٔ A از آن را به دست می‌آوریم:

$$(x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۲)$ از خط $x = ۱$ برابر است با:

$$d = |۲ - ۱| = ۱$$

۳۳ گزینه ۲

در تابع به فرم $y = [f(x)]$ هر جا حاصل $f(x)$ برابر عدد صحیح شود، تابع در آن نقاط ناپیوسته است. بنابراین در بازهٔ $[۲, ۲+k)$ حاصل عبارت جبری $x^۲ - ۳$ نباید برابر یک عدد صحیح شود. (البته در نقطهٔ شروع بازه درصورتی‌که تابع از راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی‌شود.)

ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = [x^۲ - ۳] = [x^۲] - ۳$$

سپس بررسی می‌کنیم عبارت $[x^۲]$ در اولین نقطه‌ای که بعد از $x = ۲$ برابر یک عدد صحیح می‌شود کدام نقطه است. آن نقطه را برابر $۲ + k$ قرار داده و درنهایت مقدار k را محاسبه می‌کنیم.

$$x = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{اولین عدد صحیح بعد از ۴}} x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{۵}$$

پس تابع $f(x)$ به ازای $x = \sqrt{۵}$ ناپیوسته می‌شود. $۲ + k$ را برابر $\sqrt{۵}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$۲ + k = \sqrt{۵} \Rightarrow k = \sqrt{۵} - ۲$$

۳۴

گزینه ۱

گام اول

الف) همسایگی مورد نظر زیر مجموعه ای از نامعادلهٔ داده شده است. پس ابتدا باید محدودهٔ قابل قبول که از حل نامعادله به دست می آید را تعیین کنیم.

ب) توجه کنید که $x = \frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مخرج کسر بوده و به ازای آن کسر "تعریف نشده" می شود. پس در نهایت باید از محدودهٔ جواب خارج کنیم.

گام دوم

$$\left|\frac{x-۳}{۲x-۱}\right| > ۱ \Rightarrow \frac{|x-۳|}{|۲x-۱|} > ۱ \xrightarrow{x \neq \frac{۱}{۲}} |x-۳| > |۲x-۱|$$

دو طرف نامعادله دارای مقادیر نامنفی هستند. پس با خیال راحت آن ها را به توان دو می رسانیم:

$$|x-۳|^۲ > |۲x-۱|^۲ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۹ > ۴x^۲ - ۴x + ۱$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۸ < ۰ \Rightarrow (۳x-۴)(x+۲) < ۰ \Rightarrow -۲ < x < \frac{۴}{۳}$$

با خارج کردن $x = \frac{۱}{۲}$ از محدوهٔ جواب، مقادیری که x می تواند بپذیرد به صورت زیر خواهد بود:

$$x \in (-۲, \frac{۴}{۳}) - \left\{\frac{۱}{۲}\right\} \Rightarrow x \in (-۲, \frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۱}{۲}, \frac{۴}{۳})$$

همسایگی با بیشترین شعاع ممکن خواسته شده است. پس بازهٔ $(-۲, \frac{۱}{۲})$ را که بزرگ تر است، انتخاب کرده و مرکز همسایگی را به دست می آوریم:

$$a = \frac{-۲ + \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۲} = -\frac{۳}{۴}$$

۳۵ گزینه ۲

مرز ضابطه ها خیلی شفاف مشخص نشده است. باتوجه‌به نامعادلات قدر مطلقی، ضابطه ها را با مرز شفاف آن یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & , \quad x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \\ x[x] & , \quad -۱<x<۱ \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد.

می‌دانیم خط $x=۳$ بالای خط $x=۱$ قرار دارد، بنابراین باید برای به دست آوردن نقطهٔ برخورد آن با محور عرض ها از ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ استفاده کرد.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to ۱^+} ax+b=\lim_{x\to ۱^-} x[x]\Rightarrow a+b=۱\times ۰=۰\Rightarrow a+b=۰ \quad (\mathrm{I})$$

بررسی پیوستگی تابع در $x=-۱$:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} ax+b=-a+b \;,\; f(-۱)=-a+b$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} x[x]=(-۱)[-۱^+]=(-۱)(-۱)=۱$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=f(-۱)\Rightarrow -a+b=۱ \quad (\mathrm{II})$$

از دو رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱ \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} a=-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ax+b=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=۳} f(۳)=-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=-۱$$

۳۶ گزینه ۴

گام اول

الف) شرط پیوستگی در نقطه ای به طول $x=۰$ عبارت است از:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)$$

ب) در این تست $f(۰)=a$ است پس برای این که تابع پیوسته باشد باید $\lim\limits_{x\to ۰} \sin\frac{\pi}{x}=a$ باشد.

گام دوم

با به دست آوردن حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to ۰$، شرط پیوستگی را بررسی می کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰} \sin\frac{\pi}{x}\to \text{وجود ندارد}$$

بنابراین به ازای هیچ مقدار a تابع $f(x)$ در $x=۰$ پیوسته نیست.

۳۷

گزینه ۲

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x \to 0^-$ عبارت $x^3 - x$ به سمت 0^+ میل می کند یا 0^-. برای این کار از تغییر متغیر $x^3 - x = t$ استفاده می کنیم. با تعیین محدودهٔ t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه های داده شده به دست می آوریم.

$$x \to 0^- \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow x^3 > x \Rightarrow x^3 - x > 0 \xrightarrow{x^3 - x = t} t > 0 \Rightarrow t \to 0^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^3 - x)$ یا همان $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$ باید از ضابطهٔ بالا که مربوط به xهای مثبت است، استفاده کنیم:

$$t \to 0^+ \Rightarrow t > 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{1 - t}$$
$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^+} \sqrt{1 - t} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

۳۸

گزینه ۴

گام اول

در همسایگی محذوف داده شده عدد ۳ حذف شده است پس عدد ۳ مرکز همسایگی است.

گام دوم

عدد ۳ مرکز همسایگی است.

$$3 = \frac{3a - 7 + a + 5}{2} \Rightarrow 6 = 4a - 2 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس همسایگی محذوف به صورت $(-1, 7) - \{3\}$ در می آید. بنابراین، شعاع همسایگی برابر است با:

$$\text{شعاع همسایگی} = \frac{7 - (-1)}{2} = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

۳۹

گزینه ۲

گام اول

الف) $x \to ۲^-$ یعنی $x < ۲$ است، باتوجه‌به این نکته تعیین می‌کنیم علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است یا منفی سپس آن را از قدر مطلق خارج می‌کنیم.

ب) وقتی $x \to ۲^-$ حاصل صورت و مخرج کسر برابر صفر حدی می‌شود. پس برای رفع ابهام می‌توانیم هم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و هم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

گام دوم

$$\left.\begin{array}{l} x^۲ - x - ۲ = (x-۲)(x+۱) \\ x \to ۲^- \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow |x^۲ - x - ۲| = -(x-۲)(x+۱)$$

روش اول:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} \times \frac{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{(-x^۲ + x + ۲)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{(۴x^۲ - x^۲ - ۱۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x-۲)(x+۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x+۲)}$$

$$= \frac{-(۲+۱)(۴+۴)}{۳(۲+۲)} = \frac{-۳ \times ۸}{۳ \times ۴} = -۲$$

روش دوم: (فراتر از کتاب درسی)

در این روش حاصل حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۲x + ۱}{۲ - \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱۲}}} = \frac{-۴ + ۱}{۲ - \frac{۲}{\sqrt{۴ + ۱۲}}} = \frac{-۳}{۲ - \frac{۱}{۲}} = \frac{-۳}{\frac{۳}{۲}} = -۲$$

۴۰ گزینه ۳

نکته: اگر عبارت داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می‌توان نتیجه گرفت جزء صحیح با عبارت داخل آن هم‌ارز است.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^-} x(\frac{1}{x}) = 1$$

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+} x(\frac{1}{x}) = 1$$

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

پس حاصل حد تابع وقتی $x \to -\infty$ متناهی نیست.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^+ \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = (+\infty)(0) = 0$$

۴۱ گزینه ۲

چون $\lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{x^2+ax+b} = -\infty$ است، پس باید مخرج کسر در همسایگی $x = 2$ مثبت و به ازای $x = 2$ صفر شود. یعنی معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ باید ریشهٔ مضاعف $x = 2$ داشته باشد و درنتیجه:

$$x^2+ax+b = (x-2)^2 = x^2-4x+4$$

با مقایسهٔ دو عبارت x^2+ax+b و x^2-4x+4 نتیجه می‌شود که $a=-4$ و $b=4$، پس $a+b=0$.

۴۲ گزینه ۳

برای پیوستگی این تابع در $\mathbb{R}$، بایستی در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (ax - ۱) = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x + ۲}} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳(x - ۲)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}{\left(x - \sqrt{x + ۲}\right)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳(x - ۲)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}{x^۲ - x - ۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳(x - ۲)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}{(x - ۲)(x + ۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}{x + ۱} = \frac{۳(۲ + ۲)}{۲ + ۱} = ۴$$

ضمناً برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توانید استفاده کنید:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x + ۲}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳}{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x + ۲}}} = \frac{۳}{۱ - \frac{۱}{۴}} = ۴$$

حال برای پیوستگی f در $x = ۲$، مقدار تابع را برابر حد آن قرار می‌دهیم:

$$۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۴۳ گزینه ۲

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و دارای حد نامتناهی باشد.

ج) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ از نقطهٔ $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$BA = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$$

گام دوم

$$y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ - ۳x + ۲} \quad \Rightarrow \quad D = [۰, ۱) \cup (۱, ۲) \cup (۲, +\infty)$$

درجهٔ مخرج بزرگ‌تر از درجهٔ صورت است، پس تابع مجانب افقی دارد. داریم:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ - ۳x + ۲} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^۲} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱}{x} = ۰ \Rightarrow y = ۰ \quad \text{مجانب افقی}$$

برای به دست آوردن ریشه‌های مخرج کسر، آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$x = ۱$ و $x = ۲$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع در این نقاط نیز بررسی شود.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ - ۳x + ۲} = \frac{۱ - ۱}{۱ - ۳ + ۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ - ۳x + ۲} = \lim_{x \to ۱} \frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲x - ۳}$$

$$= \frac{۱ - \frac{۱}{۲}}{۲ - ۳} = -\frac{۱}{۲} \neq \infty$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ - ۳x + ۲} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴ - ۶ + ۲} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۰} = +\infty$$

بنابراین فقط خط $x = ۲$ مجانب قائم تابع است.

محل تلاقی مجانب قائم و افقی، نقطهٔ $A(۲, ۰)$ است، فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات $(O(۰, ۰))$ برابر است با:

$$OA = \sqrt{(۲ - ۰)^۲ + (۰ - ۰)^۲} = \sqrt{۴} = ۲$$

۴۴ گزینه ۱

$$\text{مقدار تابع}: f(-۲) = a$$

$$\lim_{x \to (-۲)^-} f(x) = \lim_{x \to (-۲)^-} \frac{۸ + x^۳}{|x + ۲|} = \lim_{x \to (-۲)^-} \frac{(x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴)}{-(x + ۲)}$$

$$= -\lim_{x \to (-۲)^-} (x^۲ - ۲x + ۴) = -(۴ + ۴ + ۴) = -۱۲$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -۱۲$ باشد.

۴۵ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x+|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x+x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x+|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف‌نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

۴۶ گزینه ۱

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}{\cos^2x-\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1}{\cos^2x}=\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}a\cos 3x=a\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$f(\frac{\pi}{4})=a\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x=\frac{\pi}{4}$، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=f(\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}a=2\Rightarrow \sqrt{2}a=-4\Rightarrow a=-\frac{4}{\sqrt{2}}\Rightarrow a=-2\sqrt{2}$$

۴۷ گزینه ۲

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن‌ها تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.

ب) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

گام دوم

چون $a \neq 0$ است؛ پس منحنی حتماً یک مجانب افقی دارد، پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x}{ax^2+4x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{ax^2}=\frac{1}{a}\quad,\quad a\neq 0$$

پس $y=\frac{1}{a}$ مجانب افقی تابع است. بنا بر صورت سؤال تابع باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد. مخرج تابع، چندجمله‌ای درجه دوم است، برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه دارد، معادلهٔ $\Delta=0$ را حل می‌کنیم.

$$ax^2+4x-1=0\xrightarrow{\Delta=0}16-4(a)(-1)=0\ \Rightarrow\ 16+4a=0$$

$$\Rightarrow\ 4a=-16\ \Rightarrow\ a=-4$$

$$\xrightarrow{a=-4}-4x^2+4x-1=0\xrightarrow{\times(-1)}4x^2-4x+1=0\ \Rightarrow\ (2x-1)^2=0$$

$$\Rightarrow\ 2x-1=0\ \Rightarrow\ 2x=1\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}$$

بنابراین خط $y=-\frac{1}{4}$ مجانب افقی تابع و خط $x=\frac{1}{2}$ مجانب قائم تابع می‌باشد. محل برخورد این دو مجانب نقطهٔ $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ است.

۴۸ گزینه ۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -1$، ابتدا لازم است حد چپ و راست تابع را در این نقطه به دست آوریم.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 + ax = 1 - a$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+a}$$

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{1}{-1+a} = 1 - a$$

$$\Rightarrow -(1-a)(1-a) = 1 \Rightarrow -(1-a)^2 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \quad (*)$$

معادلهٔ $(*)$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۴۹ گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. با استفاده از روابط مثلثاتی و قاعدهٔ هوپیتال می‌توان رفع ابهام کرد.

روش اول:

با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{۴}) = \sin x \cos\frac{\pi}{۴} - \cos x \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-\sqrt{۲}}{\cos x} = -\frac{\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -۲$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

طبق قاعدهٔ هوپیتال، اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰}$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدهٔ هوپیتال را تا جایی که ابهام برطرف شود، به کار می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-(۱+\tan^۲ x)}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})} = \frac{-(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})}{\cos(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})} = \frac{-(۱+۱)}{۱} = -۲$$

۵۰ گزینه ۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_۰} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = \lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} \times \frac{x + \sqrt{۲x}}{x + \sqrt{۲x}} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۲x}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})} = \lim_{x \to ۲} \frac{x(x - ۲)}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{-x}{x + \sqrt{۲x}} = \frac{-۲}{۲ + ۲} = \frac{-۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۲$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = f(۲) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۵۱ گزینه ۱

ابتدا تعیین می کنیم حاصل $[۴\cos^۲\pi x]$ وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، برابر چه عددی می شود. با توجه به این که حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ است، مقادیر a و b و در نهایت مقدار $a+b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \to \frac{۱}{۶}^+ \Rightarrow x > \frac{۱}{۶} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos \pi x < \cos \frac{\pi}{۶}$$

دقت کنید که در ناحیهٔ اول مثلثاتی با افزایش مقدار x، مقدار $\cos x$ کاهش پیدا می کند. چون πx از $\frac{\pi}{۶}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $\cos \pi x$ از مقدار $\cos \frac{\pi}{۶}$ کمتر خواهد بود.

$$\xrightarrow{\cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \cos \pi x < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cos^۲ \pi x < \frac{۳}{۴} \overset{\times ۴}{\Rightarrow}$$
$$۴\cos^۲\pi x < ۳ \Rightarrow ۴\cos^۲\pi x \to ۳^- \Rightarrow [۴\cos^۲\pi x] = ۲$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ برابر صفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{۱}{۲}$ است، اگر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسر عددی غیر از صفر باشد حاصل حد برابر صفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ داده شده پس باید وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} ax + b = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۶} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۶} \Rightarrow a = -۶b \quad (\mathrm{I})$$

با فرض $a = -۶b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{ax + b} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{-۶bx + b}$$
$$= \lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲(۱ - ۶x)}{b(-۶x + ۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۴$$

$$\overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} a = -۶b = -۶ \times ۴ = -۲۴$$

بنابراین $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -۲۴ + ۴ = -۲۰$$

۵۲ گزینه ۴

حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۱$ محاسبه می کنیم. برای این که تابع در $x = ۱$ پیوسته باشد، باید رابطهٔ $\lim\limits_{x \to ۱} f(x) = a$ برقرار باشد. این رابطه را بررسی کرده و مقداری از a را تعیین می کنیم که به ازای آن تابع پیوسته باشد.

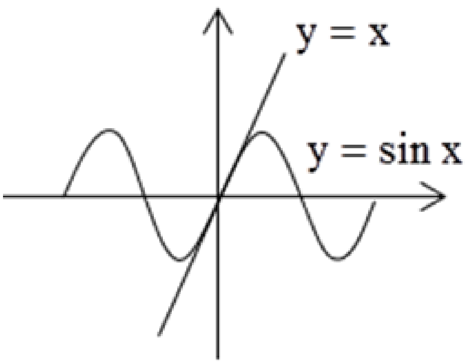
$$\lim_{x \to ۱} f(x) = \lim_{x \to ۱} \frac{\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}}}{x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$
$$\lim_{x \to ۱} \frac{\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}}}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{x}}}{-(۱ - \sqrt{x})(۱ + \sqrt{x})} =$$
$$\lim_{x \to ۱} \frac{-۱}{\sqrt[۳]{(۱ - \sqrt{x})^۲}(۱ + \sqrt{x})} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = ۱$ فاقد حد است بنابراین به ازای هیچ مقدار a در $x = ۱$ پیوسته نیست.

گزینه ۲

در مورد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to 0$، رابطهٔ زیر برقرار است:
$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. با استفاده از تساوی داده شده می توان گفت $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to 0$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود و تابع $\frac{x}{\sin x}$ وقتی $x \to 0$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود.
با استفاده از نمودار دو تابع نیز می توان دریافت که

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\right] = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = 0$$



همان طور که مشاهده می کنید اگر $x > 0$ باشد نمودار $y = x$ بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد و اگر $x < 0$ باشد نمودار $y = x$ پایین تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد.

$$x \to 0 \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \to 1^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\right] = [1^+] = 1$$
$$x \to 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \to 1^- \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = [1^-] = 0$$

بنابراین حد عبارت داده شده وقتی $x \to 0$ برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] + 2\left[\frac{x}{\sin x}\right] = 0 + 2(1) = 0 + 2 = 2$$

۵۴ گزینه ۱

تابع دارای مجانب افقی $y = ۲$ است. تابع $g\left(x\right) = f\left(x\right) - ۲$ را تشکیل می‌دهیم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$g\left(x\right) = \frac{۲x^{۲} - x - ۲}{x^{۲} + ۲x} - ۲ = \frac{-۵x - ۲}{x^{۲} + ۲x}$$

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۲}{۵}$		۰		$+\infty$
g(x)		+	ت.ن	−	۰	+	ت.ن	−	

باتوجه‌به جدول تعیین علامت داریم:

$$x \to +\infty \Rightarrow g\left(x\right) < ۰ \Rightarrow f\left(x\right) - ۲ < ۰ \Rightarrow f\left(x\right) < ۲$$
$$x \to -\infty \Rightarrow g\left(x\right) > ۰ \Rightarrow f\left(x\right) - ۲ > ۰ \Rightarrow f\left(x\right) > ۲$$

پس در شاخهٔ $+\infty$ تابع $f\left(x\right)$ زیر خط $y = ۲$ و در شاخهٔ $-\infty$ تابع $f\left(x\right)$ بالای خط $y = ۲$ قرار دارد.

۵۵

گزینه ۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

گام دوم

ابتدا باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، محدودهٔ دو ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & ; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

اکنون حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در دو نقطهٔ $x = 1$ و $x = -1$ محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2(1) = 2$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

باتوجه‌به اینکه $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$ است، تابع در $x = 1$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2x = 2(-1) = -2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

$$f(-1) = 2(-1) = -2$$

داریم:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -1$ پیوسته است.

۵۶ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \dfrac{۳\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\cos^۲ x}}{-(\sin^۲ x - \cos^۲ x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} -\frac{۱}{\cos^۲ x} = -\frac{۱}{\cos^۲ \frac{۳\pi}{۴}} = -\frac{۱}{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = -\frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = -۲$$

۵۷

گزینه ۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_۰^+} f(x) = \lim_{x \to x_۰^-} f(x) = f(x_۰)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq ۰ \\ -u & ; u < ۰ \end{cases}$$

گام دوم

ضابطهٔ تابع شامل یک عبارت قدر مطلقی است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^۲ + x - ۲ = (x + ۲)(x - ۱)$$

		-۲		۱	
$x^۲+x-۲$	+	۰	-	۰	+

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & ; x \leq -۲ \\ \dfrac{-x^۲ - x + ۲}{x - ۱} & ; -۲ < x < ۱ \\ a & ; x = ۱ \\ \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & ; x > ۱ \end{cases}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x + ۲)(x - ۱)}{(x - ۱)} = \lim_{x \to ۱^+} (x + ۲) = ۱ + ۲ = ۳$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{-x^۲ - x + ۲}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{-(x + ۲)(x - ۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^-} (-x - ۲) = -۱ - ۲ = -۳$$

باتوجه‌به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a، در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته نخواهد بود.

۵۸ گزینه ۴

ابتدا تعیین می‌کنیم مقادیر $f(x)$ به ازای $x \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ چند است:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

ضابطهٔ $g(x)$ را باتوجه‌به مقادیر $f(x)$ تشکیل داده و بررسی می‌کنیم در بازهٔ $[-۴, ۴]$ تابع در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \\ ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - ۱ & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow g(x) = -۱ \quad ; x \in \mathbb{R}$$

در تمام نقاط بازهٔ $[-۴, ۴]$ تابع $g(x) = -۱$ (چون یک تابع ثابت است) پیوسته است. پس تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه برابر صفر است.

۵۹ گزینه ۲

با استفاده از نسبت های مثلثاتی کمان $\alpha + \beta$، حاصل $\cos(x + \frac{\pi}{۴})$ را به دست می آوریم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم تا عبارت مثلثاتی فرم ساده تری به خود بگیرد. سپس با از بین رفتن عامل صفرکننده در صورت و مخرج، حاصل حد را محاسبه می کنیم و در نهایت مقدار a را به دست می آوریم.

$$\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \cos x \cos\frac{\pi}{۴} - \sin x \sin\frac{\pi}{۴}$$
$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)$$

بنابراین :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{۴})} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{(\cos x - \sin x)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}$$
$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{۴}} + \sqrt{\sin\frac{\pi}{۴}}}$$
$$= \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} + \sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲ \times \sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}} = \frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲ \times \sqrt{۲^{-\frac{۱}{۲}}}} = \frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲ \times ۲^{-\frac{۱}{۴}}}$$
$$= \frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۳}{۴}}} = ۲^{-\frac{۱}{۴}} = ۲^{a} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۶۰

گزینه ۳

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} ax + b = ۲a + b$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} x^۲ + bx - ۱ = ۴ + ۲b - ۱ = ۳ + ۲b$$

$$f(۲) = ۵ \Rightarrow ۲a + b = ۳ + ۲b = ۵$$

داریم:

$$۳ + ۲b = ۵ \Rightarrow ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$۲a + b = ۵ \Rightarrow ۲a + ۱ = ۵ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

۶۱

گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \dfrac{\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\dfrac{\circ}{\circ}$ می‌شود. باتوجه‌به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\cos x(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})} = -۱$$

۶۲ گزینه ۴

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.
ب) در توابع کسری ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع fog را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+۳}{۲x+۱} \\ g(x) &= \frac{۲x-۱}{x+۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+۳}{۲g(x)+۱}$$

$$= \frac{\frac{۲x-۱}{x+۲}+۳}{۲\frac{۲x-۱}{x+۲}+۱} = \frac{\frac{۲x-۱+۳x+۶}{x+۲}}{\frac{۴x-۲+x+۲}{x+۲}} = \frac{۵x+۵}{۵x}$$

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول، تابع دارای یک مجانب افقی است:

$$\lim_{x\to\pm\infty} fog(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۵x+۵}{۵x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۵x}{۵x} = ۱ \Rightarrow y = ۱ \quad \text{مجانب افقی}$$

همچنین خط $x = ۰$ مجانب قائم تابع است زیرا:

$$\lim_{x\to۰} fog(x) = \lim_{x\to۰} \frac{۵x+۵}{۵x} = \frac{۵}{۰} = +\infty$$

نقطهٔ $(۰,۱)$ محل تلاقی این دو مجانب است.

۶۳ گزینه ۱

اگر $x = ۲k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin\frac{\pi}{۲}x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k \in \mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و درنتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است.
حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x = ۲k+۱$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطهٔ فردی مانند $x = ۱$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱^+} f(x) = \lim_{x\to۱^+} (-۱)^{[x]}\sin\frac{\pi}{۲}x = (-۱)^۱\sin\frac{\pi}{۲} = (-۱)(۱) = -۱$$
$$\lim_{x\to۱^-} f(x) = \lim_{x\to۱^-} (-۱)^{[x]}\sin\frac{\pi}{۲}x = (-۱)^۰\sin\frac{\pi}{۲} = (۱)(۱) = ۱$$
$$f(۱) = (-۱)^۱\sin\frac{\pi}{۲} = (-۱)(۱) = -۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱^+} f(x) \neq \lim_{x\to۱^-} f(x) \Rightarrow \text{در اعداد فرد ناپیوسته است}$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

۶۴ گزینه ۲

می‌دانیم: $[۲^-] = ۱$

$$\lim_{x\to ۲^-} \left(\frac{x+۲}{x^۲-۲x} + \frac{۲(۱)}{۲-x}\right) = \lim_{x\to ۲^-} \left(\frac{x+۲}{x(x-۲)} + \frac{۲}{۲-x}\right) = \lim_{x\to ۲^-} \left(\frac{x+۲}{x(x-۲)} - \frac{۲}{x-۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۱}{x} = -\frac{۱}{۲}$$

۶۵ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & ; x \neq ۰ \\ a & ; x = ۰ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - ۱)}{۱ - \cos^۲ x}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - ۱)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - ۱)}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)} = -\frac{۱}{۴}$$

۶۶

گزینه ۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ کافی است شرط پیوستگی را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} = \frac{0}{0}$$

با تغییر متغیر $t = x - \frac{\pi}{2}$ و با استفاده از هم‌ارزی $u \underset{u \to 0}{\sim} \sin u$، رفع ابهام می‌کنیم.

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow 2x - \pi = 2t$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi + 2t)}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin(2t)}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{-2t}{2t} = -1$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow a = -1$$

۶۷ **گزینه ۴**

چون $f(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-۲)=۰$ است.

$$f(x)=x^۴+ax^۳-۸x \Rightarrow f(-۲)=۱۶-۸a+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow ۸a=۳۲ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow f(x)=x^۴+۴x^۳-۸x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+۲$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l|l}
x^۴+۴x^۳-۸x & x+۲ \\ \cline{2-2}
-(x^۴+۲x^۳) & x^۳+۲x^۲-۴x \\ \cline{1-1}
۲x^۳-۸x & \\
-(۲x^۳+۴x^۲) & \\ \cline{1-1}
-۴x^۲-۸x & \\
-(-۴x^۲-۸x) & \\ \cline{1-1}
۰ &
\end{array}$$

$$f(x)=(x+۲)(x^۳+۲x^۲-۴x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x(x^۲+۲x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=-۱\pm\sqrt{۵} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ برابر با $x=-۱-\sqrt{۵}$ است.

۶۸ **گزینه ۴**

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع f، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(۳x-[x])=۶-[۲^-]=۶-۱=۵ \\ f(۲)=a \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴ \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$، پس باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده در بالا، ازآنجاکه $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$، بنابراین تابع f در $x=۲$، به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.

تذکر:

$$a\in\mathbb{Z}\Rightarrow \begin{cases} [a^-]=a-۱ \\ [a^+]=a \end{cases}$$

۶۹ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^+] - \cos\pi[\sin(۲\pi)^+]$$
$$= ۱\times[۰^-] - (-۱)[۰^+] = ۱\times(-۱) - ۰ = -۱$$
$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^-] - \cos\pi[\sin(۲\pi)^-]$$
$$= ۱\times[۰^+] - (-۱)[۰^-] = ۰ + (-۱) = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to\pi} f(x) = -۱$$

۷۰ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{(۲x+۱)(x+۲)} - \frac{۴}{(x+۲)(x-۲)}\right) = \lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳(x-۲)-۴(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)$$
$$= \lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵(x+۲)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right) = \lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵}{(۲x+۱)(x-۲)}\right) = -\frac{۵}{۱۲}$$

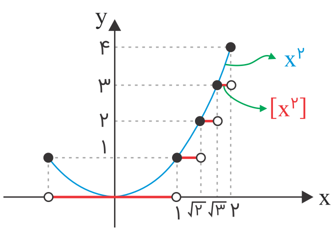
۷۱ گزینه ۳

گام اول

تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ مقداری صحیح باشد، ناپیوسته است.

گام دوم

بهترین راه برای تشخیص نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x^۲]$ در بازهٔ $[-۱, ۲]$، رسم نمودار این تابع در بازهٔ موردنظر است:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در نقاط $x = ۱$، $x = \sqrt{۲}$، $x = \sqrt{۳}$، $x = ۲$ و $x = -۱$ ناپیوسته است؛ بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱, ۲]$ دارای پنج نقطهٔ ناپیوستگی است.

۷۲ گزینه ۴

حد راست : $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{۲\,|x-۲|} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)} = \frac{۴}{۲} = ۲$

حد چپ $= \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲-۴}{-۲(x-۲)} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۲}{-۲} = -۲$

$f(۲) = ۲$

$\Rightarrow f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f(x)$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

۷۳ گزینه ۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ حد دارد، درصورتی‌که $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

حد عبارت داده‌شده را در دو حالت $x \to \frac{\pi}{۳}^+$ و $x \to \frac{\pi}{۳}^-$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^+} \left[\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)\right]\cos ۳x + \left[\tan^۲ x\right] = \left[\sin(۰^+)\right]\cos\pi + \left[\left(\sqrt{۳}^+\right)^۲\right] = \left[۰^+\right]\cos\pi + \left[۳^+\right] = (۰)\,(-۱) + ۳ = ۳ \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^-} \left[\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)\right]\cos ۳x + \left[\tan^۲ x\right] = \left[\sin(۰^-)\right]\cos\pi + \left[\left(\sqrt{۳}^-\right)^۲\right] = \left[۰^-\right]\cos\pi + \left[۳^-\right] = (-۱)\,(-۱) + ۲ = ۳ \end{cases}$$

حد راست و چپ تابع در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۳}$ موجود و برابر است، بنابراین حد تابع برابر ۳ است.

۷۴ گزینه ۱

گام اول

حاصل حد مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x - ۲$، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x^۲-۲x} - \frac{x+۱}{x-۲}\right) = \lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶}{x(x-۲)} - \frac{x+۱}{x-۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۲}\left(\frac{۶-x^۲-x}{x(x-۲)}\right) = \lim_{x\to ۲}\left(\frac{-(x-۲)(x+۳)}{x(x-۲)}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۳)}{x} = \frac{-۵}{۲}$$

۷۵ گزینه ۲

در مرحلهٔ اول صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج کسر ضرب می کنیم تا عبارت را به ساده ترین شکل ممکن به دست آوریم.

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+2x}} \times \frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x^2-x^2-2x} = \frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{-2x}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+|x|}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

برای به دست آوردن حاصل حد وقتی $x \to +\infty$ از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$$

با استفاده از هم‌ارزی حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{1}|x+\frac{2}{2}|}{-2x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x+1}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

۷۶ گزینه ۱

گام اول

اگر $x \notin \mathbb{Z}$، در این صورت حاصل $[x]+[-x]=-1$ است.

گام دوم

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to t^-} f(x) = \lim_{x\to t^+} f(x) = f(t) \Rightarrow a = -1$$

۷۷ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+8)(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6(x+8)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{6}=\frac{-6\times 12}{6}=-12$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}:\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{6\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{-16+10}{6\times\frac{1}{3\times 4}}=-6\times 2=-12$$

۷۸ گزینه ۳

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\frac{0}{0}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}\times\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+3)(2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}})}{4-(2+\sqrt{3-x})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+3)(2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}})}{2-\sqrt{3-x}}\times\frac{2+\sqrt{3-x}}{2+\sqrt{3-x}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+3)(2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}})(2+\sqrt{3-x})}{4-3+x}$$

$$=\lim_{x\to -1}(2x+3)(2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}})(2+\sqrt{3-x})=1(2+2)(2+2)=16$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

استفاده از قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to -1}\frac{4x+5}{-\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}\times\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}}=\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=16$$

۷۹ گزینه ۲

با استفاده از اتحاد $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$ داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲ - \sqrt[۳]{x+۶})(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}{\sqrt{(x-۲)^۲}(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲-x)}{(x-۲)(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲}} = -\frac{۱}{۴+۴+۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

روش دوم: (هوپیتال ـ فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{(x-۲)^۲}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|} \xrightarrow[x\to ۲^+]{x-۲>۰} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{-\frac{۱}{۳}(x+۶)^{\frac{-۲}{۳}}}{۱}$$

$$= \frac{-\frac{۱}{۳}(۲+۶)^{\frac{-۲}{۳}}}{۱} = -\frac{۱}{۳\times ۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

۸۰ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -۱} \left(\frac{۲}{x^۲-۱} - \frac{x}{x+۱}\right) = \lim_{x\to -۱} \frac{۲}{(x-۱)(x+۱)} - \frac{x}{x+۱}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{۲ - x(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to -۱} \frac{-x^۲ + x + ۲}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{-\cancel{(x+۱)}(x-۲)}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{-(x-۲)}{(x-۱)} = \frac{-(-۱-۲)}{-۱-۱} = \frac{۳}{-۲} = \frac{-۳}{۲}$$

۸۱ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sin^۲ \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sin^۲ \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱ - \cos^۲ \pi x}{۱ + \cos \pi x} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(۱+\cos \pi x)(۱ - \cos \pi x)}{۱ + \cos \pi x}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} (۱ - \cos \pi x) = ۱ - \cos \pi = ۱ - (-۱) = ۲$$

۸۲ گزینه ۳

تابع f به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} x[x] & ; -۱<x<۱ \\ ax+b & ; (x\geq ۱)\vee(x\leq -۱)\end{cases}$$

تابع $x[x]$ در فاصلهٔ $(-۱,۱)$ و تابع $ax+b$ در هر فاصله‌ای پیوسته است، پس فقط کافی است که تابع f در ۱ و ۱- پیوسته باشد.

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(x[x])=۰$$

f در $x=۱$ پیوسته است، پس $a+b=۰$ یا $a=-b$ است. ازطرفی f در ۱- پیوسته است؛ پس:

$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(ax+b)=-a+b$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(x[x])=(-۱)\left[(-۱)^+\right]=(-۱)(-۱)=۱$$

$$\Rightarrow -a+b=۱\xrightarrow{b=-a}-a-a=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۸۳ گزینه ۴

گام اول

تابع در $x=۰$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$ است.

گام دوم

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x}}{۱+\sqrt{۱-x}}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{(۱-\sqrt{۱-x})(۱+\sqrt{۱-x})}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{۱-۱+x}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{x}\Rightarrow a=۱+\sqrt{۱-۰}=۱+۱=۲\Rightarrow a=۲$$

۸۴ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ و $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ و $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^{+}}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^{-}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^{-}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^{-}}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^{+}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^{+}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{4\pi}{3}^{\pm}}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^{\pm}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^{\pm}}=\pm\infty$$

۸۵ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^{-}}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^{-}}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^{-}}\frac{1-\tan^2 x}{|\sin x+\cos x|}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^{-}}\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{(\sin x+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^{-}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^{-}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

۸۶ گزینه ۳

راه‌حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x})=\lim_{x\to-\infty}(2x+2\left|x+\frac{1}{8}\right|)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-2(x+\frac{1}{8}))=-\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+\sqrt{4x^2+x})(2x-\sqrt{4x^2+x})}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2+x)}{2x-\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-|2x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}$$

۸۷ گزینه ۴

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|۲x|}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲x}{x}=۳$$

۸۸ گزینه ۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.
ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+}f(x)=\lim_{x\to x_\circ^-}f(x)=f(x_\circ)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطهٔ داده‌شده روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطهٔ $x=۶$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x\to۶^-}f(x)=\lim_{x\to۶^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$f(۶)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to۶^+}f(x)=\lim_{x\to۶^+}a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶}=a+\cos^۲\frac{\pi}{۶}=a+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲=a+\frac{۳}{۴}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۶$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

۸۹

گزینه ۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_۰^-} f(x) = \lim_{x \to x_۰^+} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است؛ بنابراین کافی است پیوستگی تابع را فقط در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} x^۲ + ax - ۵ = ۲^۲ + ۲a - ۵ = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} ax - ۱ = ۲a - ۱$$

$$f(۲) = ۲a - ۱$$

به ازای هر مقدار حقیقی a، تساوی $۲a - ۱ = ۲a - ۱$ برقرار است.

۹۰ گزینه ۴

گام اول

الف) برای اینکه تابع $f(x)$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، باید بر روی تمام نقاط این بازه پیوسته باشد. نقطهٔ مرز ضابطه‌ها، یعنی $x = \frac{\pi}{2}$ نقطه‌ای است که پیوستگی در مورد آن باید بررسی شود.

ب) شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{2}$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$$

گام دوم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\sin(\frac{3\pi}{2} - 3x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}$$

$$\xrightarrow{x-\frac{\pi}{2}=t} \lim_{t\to 0^+} \frac{-\sin(3t)}{\sin t} = -3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \sin 5x - a = \sin\frac{5\pi}{2} - a = 1 - a$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1 - a$$

شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow 1 - a = -3 \Rightarrow a = 4$$

۹۱ گزینه ۳

گام اول

الف) وقتی $x \to 3$ حد عبارت صورت برابر -1 است. پس حد عبارت مخرج باید برابر 0^+ شود تا حاصل حد برابر $-\infty$ شود. حد عبارت مخرج وقتی $x \to 3$ در صورتی 0^+ می شود که $x = 3$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد (حاصل حد مخرج کسر وقتی $x \to 3^+$ و $x \to 3^-$ باید برابر 0^+ شود).

ب) مخرج باید به صورت $2(x-3)^2$ باشد تا بتوان گفت $x = 3$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

گام دوم

$$2(x-3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 18 \end{cases} \Rightarrow a + b = -12 + 18 = 6$$

۹۲

گزینه ۴

$\cot x$ را برابر $\dfrac{۱}{\tan x}$ فرض کرده و عبارت را بر حسب $\tan x$ به دست می آوریم و حاصل حد را وقتی $x \to \dfrac{\pi}{۲}^+$ محاسبه می کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\tan x}{\frac{۱}{\tan x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \tan^۲ x = (-\infty)^۲ = +\infty$$

۹۳

گزینه ۲

داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳} + nx + m}{mx^{n-۲} - mx + n - ۱} = -۲$$

باتوجه‌به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳} + nx + m}{mx^{n-۲} - mx + n - ۱} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}} = -۲$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m + ۳ = n - ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}} = \frac{۱}{m} = -۲ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۲}$$

و همچنین:

$$m + ۳ = n - ۲ \xrightarrow{m=-\frac{۱}{۲}} -\frac{۱}{۲} + ۳ = n - ۲ \Rightarrow n = -\frac{۱}{۲} + ۵ = \frac{۹}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$m + n = -\frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۹۴

گزینه ۴

گام اول

الف) یک تابع گویا زمانی مجانب افقی دارد که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد.

ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

$$y = \frac{۲x^۲ - ۲x}{x^۲ + x - ۲} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{۱, -۲\}$$

معادلهٔ مجانب‌های قائم و افقی تابع را نوشته و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را به دست می‌آوریم. درجهٔ صورت و مخرج باهم مساوی‌اند پس تابع دارای مجانب افقی است. داریم:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^۲ - ۲x}{x^۲ + x - ۲} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲ \Rightarrow y = ۲ \quad \text{مجانب افقی}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت "ب" از گام اول، ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$x = -۲$ و $x = ۱$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع نیز در آن‌ها برقرار باشد.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{۲x^۲ - ۲x}{x^۲ + x - ۲} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to ۱} \frac{۲x^۲ - ۲x}{x^۲ + x - ۲} = \lim_{x \to ۱} \frac{۲x(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)}$$

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{۲x}{x+۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x \to -۲} \frac{۲x^۲ - ۲x}{x^۲ + x - ۲} = \frac{۲(-۲)^۲ - ۲(-۲)}{(-۲)^۲ + (-۲) - ۲} = \frac{۸ + ۴}{۴ - ۴} = +\infty$$

بنابراین تابع فقط دارای یک مجانب قائم به معادلهٔ $x = -۲$ است.

(توجه کنید که می‌توانستیم ابتدا تابع را ساده کنیم سپس ریشه‌های مخرج را به دست آوریم)

محل تلاقی دو مجانب $x = -۲$ و $y = ۲$ نقطهٔ $(-۲, ۲)$ است. با جایگذاری مختصات این نقطه در معادلهٔ خط داده‌شده، مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$y = x + a \xrightarrow{(-۲,۲)} ۲ = -۲ + a \Rightarrow a = ۴$$

۹۵

گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\sqrt{۴x^۲+۹x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{۴}|x+\frac{۹}{۸}| = ۲(x+\frac{۹}{۸}) = ۲x+\frac{۹}{۴}$$

چون $x\to+\infty$، می‌توان در مخرج کسر از عبارت $\sqrt{x}$ در برابر $۳x$ صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-(۲x+\frac{۹}{۴})}{۳x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-۲x-\frac{۹}{۴}}{۳x} = -\frac{۱}{۳}$$

۹۶

گزینه ۳

گام اول

الف) برای به دست آوردن حاصل حد ابتدا عبارت $x(x+\sqrt{x^۲-۸})$ را در مزدوج عبارت $x+\sqrt{x^۲-۸}$ ضرب و تقسیم می کنیم.

ب) چون $x\to-\infty$، در عبارت کسری به دست آمده، برای محاسبهٔ حد حاصل تقسیم جملات پرتوان را در نظر می گیریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to-\infty} x(x+\sqrt{x^۲-۸})\times\frac{x-\sqrt{x^۲-۸}}{x-\sqrt{x^۲-۸}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^۲-x^۲+۸)}{x-\sqrt{x^۲-۸}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{۸x}{x-\sqrt{x^۲-۸}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۸x}{x-|x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{۸x}{x-(-x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{۸x}{۲x} = ۴$$

۹۷

گزینه ۴

گام اول

حاصل حد $\infty - \infty$ و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام و به دست آوردن حاصل حد، از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$n = ۳ \Rightarrow \text{عدد فرد} \Rightarrow \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}(x + \frac{b}{na})$$

$$\sqrt[۳]{۸x^۳ + ۲x^۲} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt[۳]{۸}(x + \frac{۲}{۲۴}) = ۲(x + \frac{۱}{۱۲}) = ۲x + \frac{۱}{۶}$$

حالا حاصل حد را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt[۳]{۸x^۳ + ۲x^۲} - ۲x) = \lim_{x\to\infty} (۲x + \frac{۱}{۶} - ۲x) = \frac{۱}{۶}$$

۹۸

گزینه ۲

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \to +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت کسر با بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجهٔ x در صورت کسر ۱ است، پس $n = ۱$ است.

ب) حاصل حد را وقتی‌که $x \to +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^۲ + bx + c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{۲a}|$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = ۱ \Rightarrow f(x) = \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{ax - ۶}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{ax - ۶} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x + \sqrt{۱}|x + (\frac{-۳}{۲})|}{ax - ۶}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x + x - \frac{۳}{۲}}{ax - ۶} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x - \frac{۳}{۲}}{ax - ۶} = \frac{۳}{a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۶$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{-۶x - ۶}$$

$$\lim_{x\to-۱} f(x) = \lim_{x\to-۱} \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{-۶x - ۶} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۱} \frac{۲x + \sqrt{x^۲ - ۳x}}{-۶x - ۶} \times \frac{۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x}}{۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x}} = \lim_{x\to-۱} \frac{۴x^۲ - x^۲ + ۳x}{-۶(x + ۱)(۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x})}$$

$$= \lim_{x\to-۱} \frac{۳x(x + ۱)}{-۶(x + ۱)(۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x})} = \lim_{x\to-۱} \frac{۳x}{-۶(۲x - \sqrt{x^۲ - ۳x})}$$

$$= \frac{-۳}{-۶(-۲ - ۲)} = \frac{-۳}{(-۶)(-۴)} = \frac{-۳}{۲۴} = \frac{-۱}{۸}$$

۹۹

گزینه ۲

گام اول

الف) نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

ب) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f(x)=\frac{ax+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲} \xrightarrow{f(۲)=۱} ۱=\frac{۲a+۱+۵}{۴} \Rightarrow ۲a+۶=۴$$

$$\Rightarrow ۲a=-۲ \Rightarrow a=-۱$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۴x^۲+۹} \underset{x\to+\infty}{\sim} ۲x$$

پس:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+۲x}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{۳x-۲}=\frac{۱}{۳}$$

۱۰۰ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $\sqrt{x^۲+۵} \underset{x\to\infty}{\sim} x$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجهٔ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج باهم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرائب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax^n+۴}$$

$$\xrightarrow{n=۱} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax+۴} = \frac{-۱}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow f(x) = \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴}$$

اکنون حاصل $\lim_{x\to۲} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲} f(x) = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to۲} \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴} \times \frac{۳+\sqrt{x^۲+۵}}{۳+\sqrt{x^۲+۵}} = \lim_{x\to۲} \frac{۹-x^۲-۵}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^۲+۵})}$$

$$= \lim_{x\to۲} \frac{(۲-x)(۲+x)}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^۲+۵})} = \lim_{x\to۲} \frac{۲+x}{۲(۳+\sqrt{x^۲+۵})} = \frac{۲+۲}{۲(۳+\sqrt{۴+۵})} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

۱۰۱ گزینه ۴

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید.

ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n=۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲}{۳x^۲} = \frac{a}{۳}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a=۲$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a، حاصل $f(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۲x^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x} \Rightarrow f(-۱) = \frac{۲(-۱)^۲-۳(-۱)+۱}{۳(-۱)^۲-۱} = \frac{۲+۳+۱}{۳-۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

۱۰۲ گزینه ۱

$$x+۱<۳<۲x-۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱<۳ \Rightarrow x<۲ \\ ۲x-۱>۳ \Rightarrow ۲x>۴ \Rightarrow x>۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

۱۰۳ گزینه ۲

برای یافتن مجانب افقی تابع، حاصل حد تابع را وقتی $x \to \infty$ میل می کند، به دست می آوریم. برای این کار نسبت ضرایب پرتوان‌ترین جملات در صورت و مخرج کسر را تعیین می کنیم.

$$\text{مجانب افقی}: y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^۳+۱}{(A-۱)x^۳+۱۶}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^۳}{(A-۱)x^۳}=\frac{A}{A-۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow A=۳$$

پس معادلهٔ مجانب قائم برابر است با:

$$۲x^۳+۱۶=۰\Rightarrow ۲x^۳=-۱۶\Rightarrow x^۳=-۸\Rightarrow x=-۲$$

۱۰۴ گزینه ۳

تابع در $x=۱$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x=۱$ برابرند.

$$\lim_{x\to۱^-} f(x)=\sqrt{a+۳} \quad , \quad \lim_{x\to۱^+} f(x)=۱+a$$

$$\Rightarrow ۱+a=\sqrt{a+۳}\Rightarrow a^۲+۲a+۱=a+۳\Rightarrow a^۲+a-۲=۰$$

$$\Rightarrow (a+۲)(a-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۱ & \checkmark \\ a=-۲ & \times \end{cases}$$

به ازای $a=-۲$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{۳}{۴})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{ax+۳}=\sqrt{x+۳}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴})=\sqrt{-\frac{۳}{۴}+۳}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۱۰۵ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار $f(۰)=۰$ است، پس داریم:

$$f(۰)=۰\Rightarrow \frac{۰+b}{۰-۱}=۰\Rightarrow -b=۰\Rightarrow b=۰$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x=۱$ تعریف‌نشده است، چون $x=۱$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x\to۱$ باید برابر صفر باشد که تابع به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ دربیاید.

$$\lim_{x\to۱} ۴x^۳+ax+b=۰\Rightarrow ۴+a=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین داریم: $(a,b)=(-۴,۰)$

۱۰۶ گزینه ۲

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = a\log_2^4 = 2a \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3a+1 \end{cases} \Rightarrow 3a+1 = 2a \Rightarrow a = -1$$

$$x < 3 : f(x) = ax + 2^{x-3} = -x + 2^{x-3}$$

$$f(2) = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -1/5$$

۱۰۷ گزینه ۴

ابتدا حاصل حد تابع $f(x) = \frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}$ را وقتی $x \to +\infty$ برابر -1 قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم. وقتی $x \to +\infty$ عبارت x^2-4 مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشی کرد. برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{ax^2-x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{|x^2-4|}{-x^2-x+2}$$

برای به دست آوردن $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$ ، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x \to (-2)^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow |x^2-4| = -(x^2-4)$$

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{-(x^2-4)}{-x^2-x+2} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to (-2)^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-2-2}{-2-1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۱۰۸ گزینه ۳

ابتدا وقتی $x \to -\infty$، حاصل $\left[\frac{1}{x}\right]$ را به دست می آوریم. با داشتن مقدار $\left[\frac{1}{x}\right]$ حاصل حد را محاسبه می کنیم.

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = [0^-] = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

۱۰۹ گزینه ۲

حاصل حد، وقتی $x \to ۱$، مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}} \times \frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} \times \frac{۲+\sqrt{۵-x}}{۲+\sqrt{۵-x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(۴-۵+x)(۱+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(x-۱)(۱+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{-(۲+\sqrt{۵-x})}{۱+\sqrt{x}} = \frac{-(۲+۲)}{۱+۱} = -\frac{۴}{۲} = -۲$$

۱۱۰ گزینه ۱

حاصل حد، وقتی $x \to -۱$، مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x} \times \frac{۲x-\sqrt{۳-x}}{۲x-\sqrt{۳-x}} = \lim_{x\to -۱} \frac{(۲x)^۲-(\sqrt{۳-x})^۲}{(x^۲+x)(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{۴x^۲-۳+x}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(۴x-۳)}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to -۱} \frac{۴x-۳}{x(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$= \frac{-۴-۳}{(-۱)(-۲-۲)} = \frac{-۷}{(-۱)(-۴)} = -\frac{۷}{۴}$$

۱۱۱ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ تابع $f-g$ را به ساده ترین شکل ممکن به دست می آوریم (مخرج مشترک گیری کرده و عبارت را تا حد امکان ساده می کنیم). مجانب افقی حاصل حد تابع است وقتی $x \to \infty$میل می کند. مجانب قائم هم ریشه های مخرج کسر است. با تعیین مجانب ها، محل برخورد آن ها نیز مشخص می شود.

$$f(x)-g(x) = \frac{x+۱۱}{x^۲-۳x-۴} - \frac{۳}{x-۴}$$
$$= \frac{x+۱۱}{(x-۴)(x+۱)} - \frac{۳}{x-۴} = \frac{x+۱۱-۳(x+۱)}{(x-۴)(x+۱)} = \frac{x+۱۱-۳x-۳}{(x-۴)(x+۱)}$$
$$= \frac{-۲x+۸}{(x-۴)(x+۱)} = \frac{-۲(x-۴)}{(x-۴)(x+۱)} = \frac{-۲}{x+۱}$$

تعیین مجانب های افقی و قائم:

مجانب افقی : $y = \lim_{x\to\infty} \frac{-۲}{x+۱} = ۰ \Rightarrow y = ۰$

مجانب قائم : $x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

پس محل برخورد مجانب های تابع نقطهٔ $(-۱, ۰)$ است.

۱۱۲

گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{3\pi}{4}^-$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. برای رفع ابهام می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را ساده کرد و یا اینکه از روش‌های دیگری مانند هوپیتال استفاده کرد.

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1+\cot x}{1+\tan x} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\cot x = \frac{1}{\tan x}} \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1+\cot x}{1+\tan x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1+\frac{1}{\tan x}}{1+\tan x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\frac{\tan x+1}{\tan x}}{1+\tan x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-1} = -1$$

۱۱۳

گزینه ۱

گام اول

الف) وقتی $x \to 0^-$ یعنی $x < 0$ است و درنتیجه x در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار می گیرد پس علامت $\sin x$ منفی می شود.

ب) می دانیم وقتی $x \to 0$ هم ارزی $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ برقرار است.

گام دوم

$$x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \xrightarrow{\text{x در ناحیهٔ چهارم قرار دارد}} \sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$$

بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

۱۱۴ گزینه ۱

گام اول

وقتی $x \to \frac{\pi}{4}$، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر حدی شده و در نتیجه حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده شده را ساده کرده و حد آن را به دست می آوریم:

$$1)\quad \sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow 1-\sin 2x = \sin^2 x+\cos^2 x - 2\sin x\cos x$$
$$= (\sin x-\cos x)^2 \Rightarrow 1-\sin 2x = (\sin x-\cos x)^2 = (\cos x-\sin x)^2$$
$$2)\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{(1-\tan x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x-\cos x)^2}{(1-\frac{\sin x}{\cos x})^2}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\frac{(\cos x-\sin x)^2}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x-\cos x)^2\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos^2 x = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

۱۱۵ گزینه ۴

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\frac{3\pi}{4}$ پیوسته است؛ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f(\frac{3\pi}{4})$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x=\frac{3\pi}{4}$ به دست آورده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} a\sin 2x = a\sin 2(\frac{3\pi}{4}) = a\sin\frac{3\pi}{2} = -a$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} \cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \cos\pi = -1$$

$$f(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \cos\pi = -1$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$$

۱۱۶ گزینه ۳

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x = ۱$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = a - a + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (ax - a + ۲) = a - a + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{x-\sqrt{x}} = \frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x})\cancel{(\sqrt{x}-۱)}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

پس به ازای هر مقدار a، تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

۱۱۷ گزینه ۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ دارای حد است درصورتی‌که:

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} f(x)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = -۱$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} (x+a)^۲ = (-۱+a)^۲$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^-} (۲x+۱) = -۲+۱ = -۱$$

باتوجه‌به گام اول در صورتی حد تابع در نقطهٔ $x = -۱$ موجود است که تساوی $(-۱+a)^۲ = -۱$ برقرار باشد اما این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست؛ بنابراین مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۱۱۸ گزینه ۲

شرط پیوستگی در نقطهٔ a:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \dfrac{۱}{a} \\ f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = ۱ - \dfrac{a}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{a} = ۱ - \frac{a}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۴-a}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴ = ۴a - a^۲ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow (a-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

۱۱۹ گزینه ۲

برای اینکه تابع در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته باشد باید حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos ۴x = [۱^-] \times ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

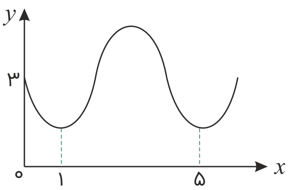
۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin\pi x-۱}$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ کدام است؟

۱) -۱ ‏‏ ۲) ۱

۳) صفر ‏‏ ۴) تعریف نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۲ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ می‌باشد. مقدار y در نقطهٔ $x=\frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟



۱) ۲

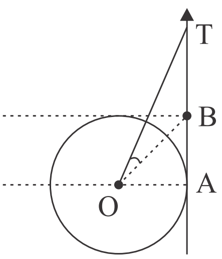
۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳ باتوجه‌به دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر $BT=۲$ باشد، مقدار $\tan(T\hat{O}B)$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

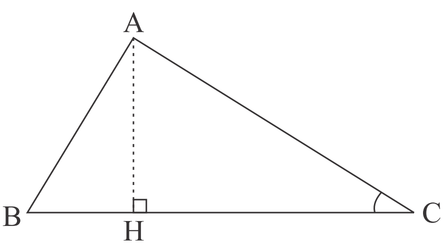
۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ در شکل زیر، $\cot C=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و $AC=۹۶$. اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟



۱) ۴۸

۲) ۵۶

۳) ۶۴

۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$، کدام است؟

۱) $x=\frac{۲k\pi}{۳}\,,\,k\in\mathbb{Z}$

۲) $x=\frac{k\pi}{۳}\,,\,k\in\mathbb{Z}$

۳) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\,,\,k\in\mathbb{Z}$

۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\,,\,k\in\mathbb{Z}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ اگر انتهای کمان α در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$

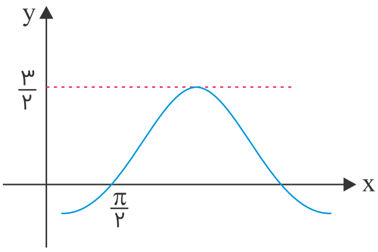
۲) $-\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ است. مقدار a، کدام است؟



۱) -۱

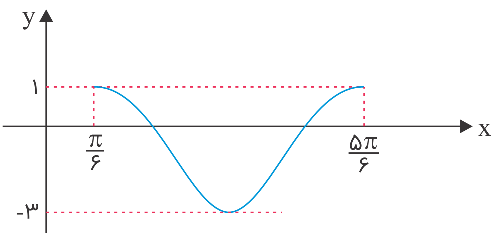
۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ شکل زیر، نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$، در یک بازهٔ تناوب است. مقادیر b و c، کدام‌اند؟



۱) $b=۳, c=-۱$

۲) $b=۳, c=-۲$

۳) $b=\frac{۳}{۲}, c=-۲$

۴) $b=\frac{۳}{۲}, c=-۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱$، در بازهٔ $\left[۰\,,\,\frac{\pi}{۲}\right]$، کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

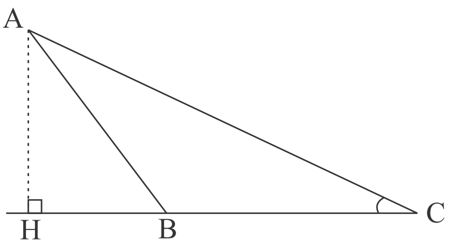
۱۰ حاصل عبارت $\sin(۱۰۹۵)\cos(۲۵۵) - \tan(۲۸۵)\tan(-۱۶۵)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند.)

۱) $\sin^۲(۱۵)$ ۲) $\cos^۲(۱۵)$

۳) $-\sin^۲(۱۵)$ ۴) $-\cos^۲(۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{۵}{۱۳}$ و $CH = ۹$. اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟



۱) ۳/۲۵

۲) ۳/۵

۳) ۳/۶

۴) ۳/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲ اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ برابر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ باشند، $\tan(\alpha+\beta)$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) -۳ ۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(۳x)\tan(x) = ۱$، در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$، کدام است؟

۱) ۵π ۲) ۶π

۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

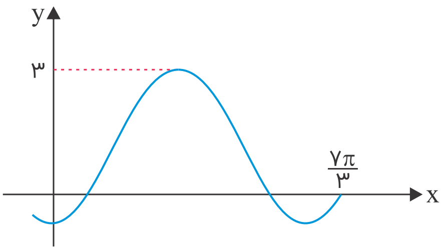
۱۴ اگر انتهای کمان α در ربع دوّم دایرهٔ مثلثاتی و $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۱۱\pi}{۴} + \alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۵ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟



۱) ۲

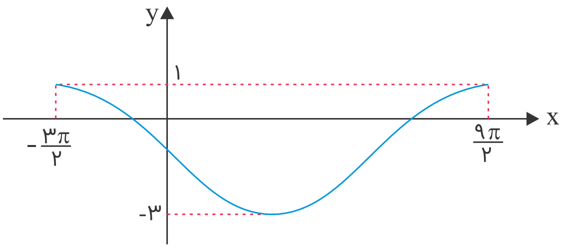
۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۶ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) -۲

۲) -۳

۳) -۴

۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۷ حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند.)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۸ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$، با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$

۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۹ اگر $\frac{۱}{۲} = \frac{\sin\alpha}{۱ + \cos\alpha}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲})$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۰ نمودار تابع $y = ۳\sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x)$، روی بازهٔ $[-\pi\ ,\ \frac{۳\pi}{۲}]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۱ ساده‌شدهٔ عبارت $\cos ۵۰^\circ\ (\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ$
۲) $\cos ۲۰^\circ$
۳) $۲\sin ۲۰^\circ$
۴) $۲\cos ۲۰^\circ$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۲ اگر $\tan(\frac{\pi}{۴} - \alpha) = \frac{۱}{۵}$ باشد، $\tan ۲\alpha$ چقدر است؟

۱) ۱/۵
۲) ۱/۸
۳) ۲/۴
۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۳ اگر $\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{۲}{۳}$ باشد، آنگاه $\tan(\frac{\pi}{۴} - \alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۳}$
۲) $\frac{-۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲ x + ۳\sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) + ۲ = ۰$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi$
۲) $۲k\pi$
۳) $\frac{k\pi}{۲}$
۴) $(۲k+۱)\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۵ با کدام ضابطهٔ $f(x)$، همواره تساوی $(-۱)^{[x]} f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟

۱) $\sin \pi x$
۲) $\cos \pi x$
۳) $\sin ۲\pi x$
۴) $\cos ۲\pi x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۶ اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\dfrac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۱/۲
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۷ جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$، با شرط $\cos x \neq ۰$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۸ در داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، بزرگ‌ترین مربع ممکن را می‌سازیم، اندازهٔ ضلع مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳} - ۳$
۲) $\sqrt{۳} - ۱$
۳) $\sqrt{۳} - \frac{۱}{۲}$
۴) $۲(\sqrt{۳} - ۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۹ اگر α زاویهٔ منفرجه و $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)$ کدام است؟

۱) -۷
۲) $\frac{-۱}{۷}$
۳) $\frac{۱}{۷}$
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۰ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) $\frac{۷\pi}{۲}$
۳) ۲π
۴) ۳π

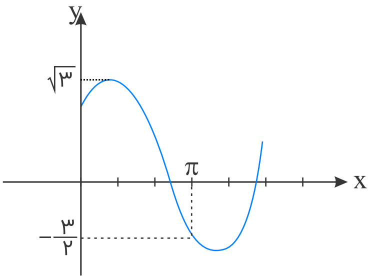
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۱ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) ۴π
۴) ۵π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}-x\right) = ۱+\sin\left(\frac{۵\pi}{۲}+x\right)$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۲) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$

۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۴ اگر مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $۹\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۳

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۵ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x - ۱}{\cos ۲x}$، کدام است؟

۱) -۲   ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱   ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۶ اگر $۱ = \sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)\tan\frac{۲\pi}{۳}$ باشد، مقدار $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$

۳) $k\pi+\frac{\pi}{6}$

۴) $k\pi+\frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۳۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos 2x=\cot x(4\sin x+\tan x)$، کدام است؟

۱) $k\pi-\frac{\pi}{3}$

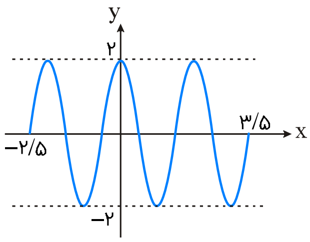
۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۳) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۹ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{1}{2}+bx)$ است. $a.b$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

۳) $k\pi-\frac{\pi}{8}$

۴) $k\pi+\frac{\pi}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۱ حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}$، کدام است؟

۱) -۱

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۲ نمودار تابع $y = -۴\cos(\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x)$، روی بازهٔ $[-۱, ۱]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) $\frac{۷\pi}{۲}$
۴) ۴π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۴ جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x \sin ۴x + \sin^۲ x = ۱$، کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$
۲) $(۲k + ۱)\frac{\pi}{۶}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$
۴) $\frac{k\pi}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۵ معادلهٔ $x \sin x - ۱ = ۰$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ \frac{۵\pi}{۴}$، به کدام صورت است؟

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۷ اگر $\tan \alpha = ۲$ و $\tan \beta = \frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan(۲\alpha - \beta)$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$، با شرط $\cos x \neq ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$

۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

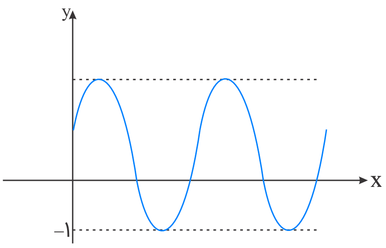
۴۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)} = ۱$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۳) $۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۰ شکل زیر نمودار تابع $y = ۱ + a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $(۰, \frac{۴}{۳})$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

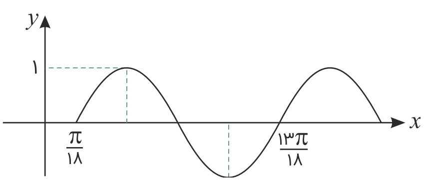
۵۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + ۲\cos^۲ x = ۰$ کدام است؟

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۵۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲})$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

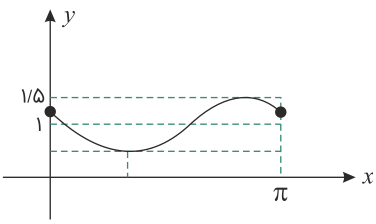
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۵۳ در معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x(\sin x + \cos x) = \cos ۲x(\cos x - \sin x)$ مجموع تمام جواب ها در بازهٔ $[۰ , \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۵\pi}{۴}$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵۴ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + a\sin(bx - \frac{\pi}{۶})$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{۸}) + \cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = ۱$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۵\pi}{۴}$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۶ حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$، با فرض $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۵۷ حاصل $\frac{۱}{\cos ۱۵^\circ} - \frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۸ سادهشدهٔ کسر $\frac{(۱ + \tan^۲\theta)(۱ + \cot^۲\theta)}{۱ - \sin^۴\theta - \cos^۴\theta}$ کدام است؟

۱) $۸\cos^{-۲}۲\theta$
۲) $۸\sin^{-۲}۲\theta$
۳) $۱۶\cos^{-۴}۲\theta$
۴) $۱۶\sin^{-۴}۲\theta$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۵۹ حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$، کدام است؟

۱) $-\frac{16}{9}$

۲) $-\frac{9}{16}$

۳) $\frac{9}{16}$

۴) $\frac{16}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

۶۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$، کدام است؟

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3 \cos x = 0$، کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۲ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با زاویهٔ ۶۰ درجه، قاعدهٔ کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $24\sqrt{3}$

۲) $27\sqrt{3}$

۳) ۴۸

۴) ۵۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{14\pi}{3}$

۲) 4π

۳) $\frac{9\pi}{2}$

۴) 5π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۴ اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۸

۲) ۵۴

۳) ۶۴

۴) ۷۲

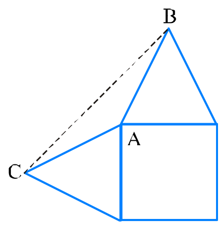
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۵ اگر $\cos\alpha = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۶ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC، چند واحد مربع است؟



۱) $\sqrt{۳}-۱$
۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۷ دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۸ حاصل عبارت $\cos\frac{۱۰\pi}{۳}+\sin\frac{۱۱\pi}{۳}\tan\frac{۱۷\pi}{۶}$، کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۹ اگر $\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۱$ باشد، مقدار $\tan ۲x$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۰ از رابطهٔ $\sin ۵x\cos ۳x-\cos ۵x\sin ۳x=\frac{۲}{۳}$، مقدار $\cos ۴x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۲}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۱ اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

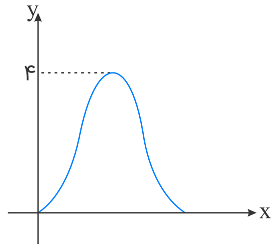
۷۲ خلاصه شدهٔ $\sin\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right)\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\sin ۲\alpha$ ۲) $\sin ۲\alpha$

۳) $\cos ۲\alpha$ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۷۳ شکل زیر نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$، در بازهٔ $(۰, ۴)$ است. b کدام است؟



۱) -۲

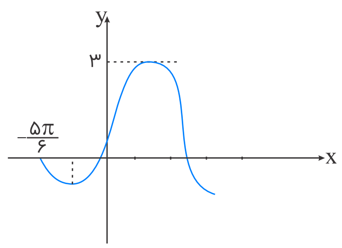
۲) -۱

۳) ۱

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۴ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟



۱) $۱/۵$

۲) ۲

۳) $۲/۵$

۴) $۱ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۵ اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{۳\pi}{۲})$$

۱) -۱/۲۳ ۲) -۰/۵۲

۳) ۰/۲۷ ۴) ۰/۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۶ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $(\frac{۱}{\sin x} - \sin x)\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}$، کدام است؟

۱) $-\cos^۲ x$ ۲) $-\cos x$

۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۷ اگر $a + b = \frac{\pi}{۲} - a$، حاصل $(\tan a + \tan b)$ کدام است؟

۱) $\sin b$ ۲) $\cos a$

۳) $\frac{۱}{\sin a}$ ۴) $\frac{۱}{\cos b}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۷۸ حاصل $\sin ۱۱۰^\circ(\tan ۲۰^\circ + \tan ۳۵^\circ)$ برابر کدام است؟

۱) $\cos ۱۵^\circ$ ۲) $\sin ۵۵^\circ$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

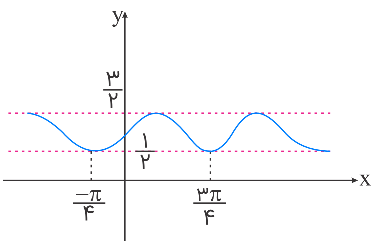
۷۹ حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۱ اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴} - \sin^۲ x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$

۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۲ حاصل عبارت $\cos\frac{۱۳\pi}{۴}\sin\frac{۱۵\pi}{۴}+\tan\frac{۱۱\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۳x+\sin ۲x}{۱+\cos x}=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۵}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$
۳) $k\pi+\frac{\pi}{۵}$
۴) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}$

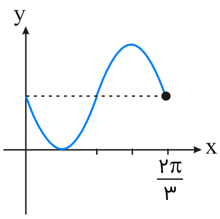
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x\cdot\cos^۲ x=۱$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$
۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$
۳) $۲k\pi-\frac{\pi}{۴}$
۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۸۵ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=۱-\sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۷\pi}{۶}$، کدام است؟



۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

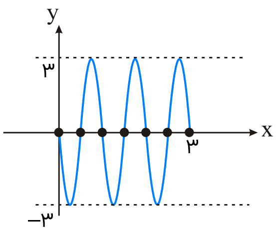
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۶ نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x\ \cos x}{۱-\cos x}=۱+\cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

۱) مربع
۲) مستطیل
۳) مثلث قائم‌الزاویه
۴) مثلث متساوی‌الساقین

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۸۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. ab کدام است؟



۱) -۶

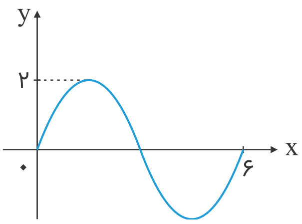
۲) -۳

۳) ۴/۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۸۸ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$، کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

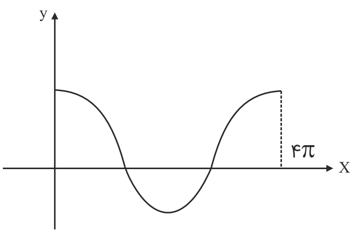
۴) $\frac{۸}{۳}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۸۹ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x = \frac{۱۶\pi}{۳}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۹۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right)$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$

۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$

۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۹۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right) + ۳\cot x \sin(\pi + x) = ۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۹۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x = ۳\cos x$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۹۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\pi)\cos(\frac{\pi}{۲} + x) - ۲\sin(\pi - x) + ۱ = ۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ۲) $۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$

۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۹۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$، کدام است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۹۵ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x = \sin x$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ بیان شده است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟

۱) $\{۷, ۹\}$ ۲) $\{۱, ۳, ۵\}$

۳) $\{۱, ۴, ۷\}$ ۴) $\{۱, ۵, ۹\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۹۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\frac{۵\pi}{۶} + \sin(\frac{\pi}{۲} + x)\sin(\pi + x) = ۰$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$

۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۹۷ در معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x + \cos x = ۱$، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع
۲) مثلث قائم‌الزاویه
۳) ذوزنقه
۴) مستطیل

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۹۸ مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲\sin^۲ x - \cos x - ۱ = ۰$ در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۸\pi}{۳}$
۲) $\frac{۱۰\pi}{۳}$
۳) ۳π
۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۹۹ مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۴x = \sin^۴ x - \cos^۴ x$، در بازهٔ $[۰, \pi]$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$
۲) $\frac{۹\pi}{۴}$
۳) $\frac{۵\pi}{۲}$
۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۰۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan ۳x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۴}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$
۳) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}$
۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۱ اگر $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{۴})}{\sin(x + \frac{\pi}{۴})} = ۲$ باشد، $\tan x$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰۲ اگر $\tan\beta = \frac{۱}{۲}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{۴}$ باشند، مقدار $\sin ۲\alpha$، کدام است؟

۱) $۰/۴۵$
۲) $۰/۶$
۳) $۰/۷۵$
۴) $۰/۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۰۳ اگر $a+b=\frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $۸\cos a\ \cos b\ \cos(\frac{\pi}{۲}-a)\ \cos(\frac{\pi}{۲}-b)$ کدام است؟

۱) $\sin ۴a$
۲) $\cos ۴a$
۳) $\sin^۲ ۲a$
۴) $\cos^۲ ۲a$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۰۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x \sin(۳\pi - x) - \sin ۳x \cos(\pi + x) = \cos \frac{۳\pi}{۲}$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۴}$
۲) $\frac{k\pi}{۲}$
۳) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۰۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan ۳x = \frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۶}$
۲) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$
۳) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۸}$
۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۰۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۳} = \frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}$ به کدام صورت است؟

۱) $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$
۲) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$
۳) $k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۰۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x = ۲\sqrt{۲} \sin x \cos x$، کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۰۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos x(\cos x - \sin x) = ۱$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۰۹ مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۵x + \sin ۴x = ۱ + \cos \pi$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۸π

۲) ۹π

۳) ۱۰π

۴) ۱۱π

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۱۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۳} = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x}$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$

۳) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$

۴) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱۱ اگر $\alpha + \beta = ۱۳۵^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار کسر $\frac{\cos^۲\alpha\cos^۲\beta - \sin^۲\alpha\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha\cos^۲\beta - \cos^۲\alpha\sin^۲\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{-۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{-۴}{۳}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۱۲ اگر $\frac{۲}{۳} = \cos(x - \frac{\pi}{۳}) + \cos(x + \frac{\pi}{۳})$ باشد، مقدار $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۹}$

۲) $-\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۹}$

۴) $\frac{۲}{۹}$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

۱

گزینه ۱

گام اول

تابع $\sqrt{\sin \pi x - ۱}$ در صورتی تعریف شده است که $\sin \pi x - ۱ \geq ۰$ باشد و چون همواره $\sin \pi x \leq ۱$ برقرار است پس باید $\sin \pi x = ۱$ باشد. در این حالت $x = ۲k + \frac{۱}{۲}$ می شود که یک عدد غیر صحیح است، بنابراین حاصل $[x] + [-x]$ برابر عدد ۱- می شود.

گام دوم

حالا سراغ محاسبهٔ مقدار $f(x)$ و هم چنین مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ می رویم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$
$$f(-\frac{۱}{۲}f(x)) = f(-\frac{۱}{۲}(-۱)) = f(\frac{۱}{۲}) = [\frac{۱}{۲}] + [-\frac{۱}{۲}] + \sqrt{\sin\frac{\pi}{۲} - ۱}$$
$$= ۰ - ۱ + \sqrt{۱ - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

۲

گزینه ۲

در $x = ۰$، مقدار تابع برابر است با $y = ۳$؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a = ۳$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x = \frac{۲۵}{۳}$، مقدار تابع برابر است با $y = ۲/۵$.

$$T = \frac{۲\pi}{|\pi b|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲} \checkmark \ , \ b = \frac{۱}{۲} \times \ , \ y = ۳ + \sin(\frac{-\pi}{۲}x)$$
$$\xrightarrow{x=\frac{۲۵}{۳}} y = ۳ + \sin(\frac{-۲۵}{۶}\pi) \Rightarrow y = ۳ + \sin(-۴\pi - \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow y = ۳ - \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۳

گزینه ۳

به دست آوردن $\tan(T\hat{O}B) = \tan\alpha$ از روی شکل کار آسانی نیست؛ بنابراین از تساوی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tan\alpha = \tan((\alpha + ۴۵) - ۴۵) = \frac{\tan(\alpha + ۴۵) - \tan ۴۵}{۱ + \tan(\alpha + ۴۵)\tan ۴۵} = \frac{\tan(\alpha + ۴۵) - ۱}{۱ + \tan(\alpha + ۴۵)} = \frac{۳ - ۱}{۱ + ۳} = \frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که $\tan(\alpha + ۴۵) = \frac{AT}{OA} = \frac{۳}{۱} = ۳$ است.

نکته:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha\tan\beta}$$

۴ گزینه ۳

داریم:

$$۱+\cot^۲ C=۱+\frac{\cos^۲ C}{\sin^۲ C}=\frac{\sin^۲ C+\cos^۲ C}{\sin^۲ C}=\frac{۱}{\sin^۲ C}\Rightarrow ۱+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲=\frac{۱}{\sin^۲ C}$$

$$\Rightarrow \sin^۲ C=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{C<۹۰^\circ}\sin C=\frac{۲}{۳}$$

$$\sin C=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۹۶}\Rightarrow AH=\frac{۹۶\times ۲}{۳}=۶۴$$

۵ گزینه ۱

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$$

$$\Rightarrow(\sin x\cos\frac{\pi}{۶}+\cos x\sin\frac{\pi}{۶})+(\cos x\cos\frac{\pi}{۳}-\sin x\sin\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x=\cos ۲x$$

$$\Rightarrow\cos x=\cos ۲x\Rightarrow x=۲k\pi\pm ۲x\quad ;k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۲k\pi\\ x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع جواب‌ها}}x=\frac{۲k\pi}{۳}\quad ;k\in\mathbb{Z}$$

۶ گزینه ۱

$$A=\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=\sin(۳\pi+(\frac{\pi}{۴}+\alpha))=\sin(\pi+(\frac{\pi}{۴}+\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

$$=-(\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{۴}\sin\alpha)=-(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha)$$

همچنین $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ و ازطرفی می‌دانیم $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$. پس:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+(\frac{۱}{۷})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\xrightarrow{\alpha<۹۰^\circ}\cos\alpha=\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha=۱}\sin\alpha=\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$$

پس A برابر است با:

$$A=-(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۵\sqrt{۲}})=-(\frac{۷}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰})=-\frac{۸}{۱۰}=-\frac{۴}{۵}$$

۷ گزینه ۳

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = \frac{۳}{۲} \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = \frac{۳}{۲}$$

$$\left(\frac{\pi}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + b\cos(\frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{۲}b = ۰$$

$$\Rightarrow ۲a + b = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{۳}{۲} \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

۸ گزینه ۱

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \\ T = \frac{۲\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = ۱ \\ \min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۳, \ c = -۱ \\ b = ۳, \ c = -۱ \end{cases}$$

فقط حالت $b = ۳, c = -۱$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

۹ گزینه ۳

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x) = ۱ \Rightarrow ۲\sin(۳x)\cos(۳x) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۶x) = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳۶} \\ k = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases} \\ ۶x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{۵\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵\pi}{۳۶} \\ k = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱۷\pi}{۳۶} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین معادله چهار جواب دارد.

۱۰ گزینه ۴

$$\tan(۲۸۵^\circ) = \tan(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)$$

$$\tan(-۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = \tan(۱۵^\circ)$$

$$\sin(۱۰۹۵^\circ) = \sin(۱۰۸۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ$$

$$\cos(۲۵۵^\circ) = \cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin(۱۵^\circ)$$

$$\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ) - \sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)\tan(۱۵^\circ) + \sin^۲(۱۵^\circ)$$

$$= -۱ + \sin^۲(۱۵^\circ) = -\cos^۲(۱۵^\circ)$$

۱۱ گزینه ۴

$$\sin C = \frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\cos C > ۰} \cos C = \sqrt{۱ - \sin^۲ C} = \sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹}} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\begin{cases} \tan C = \dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{\frac{۵}{۱۳}}{\frac{۱۲}{۱۳}} = \dfrac{۵}{۱۲} \\ \tan C = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{AH}{۹} \end{cases} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲} = \frac{AH}{۹} \Rightarrow AH = \frac{۴۵}{۱۲} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$

۱۲ گزینه ۴

داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha . \tan\beta}$$

ازآنجاکه $\tan\beta$ و $\tan\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ هستند، داریم:

$$S = \tan\alpha + \tan\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۳}{۲}$$

$$P = \tan\alpha . \tan\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha . \tan\beta} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۲}} = -۱$$

۱۳ گزینه ۲

$$\tan(۳x)\tan x = ۱ \xrightarrow{\tan x \neq ۰} \tan ۳x = \frac{۱}{\tan x} = \cot x$$
$$\Rightarrow \tan ۳x = \tan(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۸}$$
$$\xrightarrow{x\in[\pi , ۲\pi]} x = \frac{۹}{۸}\pi , \frac{۱۱}{۸}\pi , \frac{۱۳}{۸}\pi , \frac{۱۵}{۸}\pi \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = ۶\pi$$

۱۴ گزینه ۳

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰} \xrightarrow[\cos\alpha<۰]{\text{انتهای کمان } \alpha \text{ در ربع دوم}} \cos\alpha = -\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}$$
$$= -\sqrt{۱-\frac{۲}{۱۰۰}} = -\frac{\sqrt{۹۸}}{۱۰}$$
$$\cos(\frac{۱۱\pi}{۴}+\alpha) = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۴}+\alpha) = \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}+\alpha) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}+\alpha)$$
$$= \cos\frac{۳\pi}{۴}\cos\alpha - \sin\frac{۳\pi}{۴}\sin\alpha = (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\times(-\frac{\sqrt{۹۸}}{۱۰}) - (\frac{\sqrt{۲}}{۲})\times(\frac{\sqrt{۲}}{۱۰})$$
$$= \frac{\sqrt{۱۹۶}}{۲۰} - \frac{۲}{۲۰} = \frac{۱۴-۲}{۲۰} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

نکته:

$$\alpha+\beta = \pi \Rightarrow \cos\alpha = -\cos\beta$$

۱۵ گزینه ۴

$$y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲}+x) = a + b\cos x$$

باتوجه‌به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = ۳ \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = ۳ \quad (۱)$$
$$(\frac{۷\pi}{۳}, ۰) : ۰ = a + b\cos(\frac{۷\pi}{۳}) = a + b\cos(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) = a + b(\frac{۱}{۲})$$
$$\Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۲$$

۱۶ گزینه ۴

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۱۲\pi}{۲} = ۶\pi$$

$$\Rightarrow T = ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۳}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = ۱ \\ \min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = ۰$ نزولی است، بنابراین $ab < ۰$، پس داریم:

$$\begin{cases} a = -۲ \\ b = \frac{۱}{۳} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۲ \\ b = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -۶$$

۱۷ گزینه ۲

$$\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$$

$$= \tan(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \tan(۳۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ)\sin(۷۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ)$$

$$= \tan(-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$

$$= (-\tan(۶۰^\circ))(-\cos(۳۰^\circ)) + (-\tan(۶۰^\circ))\sin(۶۰^\circ)$$

$$= (-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$$

۱۸ گزینه ۴

$$\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \sin(\frac{\pi}{۲} - (x + \frac{\pi}{۴}))$$

$$\Rightarrow \sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \sin(\frac{\pi}{۴} - x)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} + x \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \quad (x \neq k\pi \text{ غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

۱۹

گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲}\right)=-\cot\frac{\alpha}{۲}$

گام دوم

با استفاده از فرمول‌های کمان ۲α، رابطهٔ $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۱}{۲}$ را ساده کرده و مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-۱}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\ \cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲\Rightarrow\ \tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲}\right)=-\cot\frac{\alpha}{۲}=-۲$$

۲۰

گزینه ۴

گام اول

الف) وقتی تعداد نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها خواسته شده است، درواقع باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y=۰$ را تعیین کنیم. پس باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y=۰$ را در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ به دست آوریم.

ب) معادلهٔ $\sin\alpha=۰$ یک معادلهٔ خاص بوده و در آن $\alpha=k\pi$ است.

ج) مقادیر k را به نحوی تعیین می‌کنیم که ریشه‌های معادله حتماً در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ قرار بگیرند.

گام دوم

$$y=۰\Rightarrow ۳\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰\xrightarrow[\alpha=k\pi]{\sin\ \alpha=۰}\frac{\pi}{۴}-۲x=k\pi$$

$$\Rightarrow ۲x=\frac{\pi}{۴}-k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}-\frac{k\pi}{۲}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$k=-۲\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}+\pi=\frac{۹\pi}{۸}$$

$$k=-۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}+\frac{\pi}{۲}=\frac{۵\pi}{۸}$$

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}$$

$$k=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۲}=-\frac{۳\pi}{۸}$$

$$k=۲\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸}-\pi=-\frac{۷\pi}{۸}$$

توجه داشته باشید که به ازای $k\geq ۳$ یا $k\leq -۳$ مقادیری که برای x به دست می‌آید در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ نیست. پس پنج مقدار برای x به دست آمده و نمودار تابع در پنج نقطه محور xها را قطع می‌کند.

۲۱

گزینه ۴

گام اول

می‌دانیم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan 70^\circ + \tan 10^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 70^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin(10^\circ + 70^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 10^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$\cos 50^\circ(\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 40^\circ)}{\cos(\frac{\pi}{2} - 20^\circ)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 2(20^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2\cos 20^\circ$$

۲۲ گزینه ۳

گام اول

الف) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

ب) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

گام دوم

باتوجه‌به صورت سؤال و قسمت (الف) از گام اول، مقدار $\tan\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1+\tan\alpha=5(1-\tan\alpha)\Rightarrow 1+\tan\alpha=5-5\tan\alpha\Rightarrow 6\tan\alpha=4$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول مقدار $\tan 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{2}{3})}{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{12}{5}=2/4$$

۲۳ گزینه ۲

گام اول

الف) $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\,,\ \tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

ب) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

گام دوم

ابتدا باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، مقدار $\tan\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{2}{3}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{3}{2}$$

اکنون باتوجه‌به فرمول کمان $(\alpha-\beta)$ در قسمت (ب) از گام اول، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$$

۲۴ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ $\cos x = \sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را به دست می آوریم.

$$\cos^۲ x + ۳\sin(\frac{\pi}{۲} + x) + ۲ = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x + ۳\cos x + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (\cos x + ۱)(\cos x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi = (۲k + ۱)\pi \\ \cos x = -۲ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

۲۵ گزینه ۱

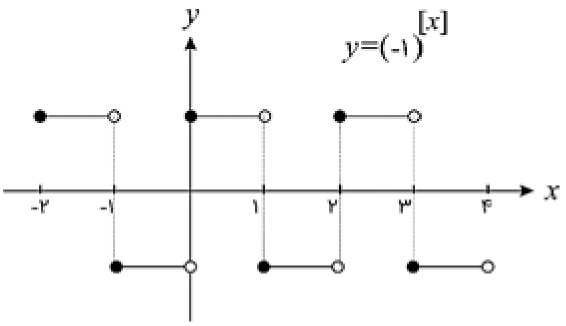
گام اول

الف) می‌دانیم به ازای هر x دلخواه $|f(x)| \geq 0$ است.

ب) $xy \geq 0$ همواره برقرار است هرگاه، x و y در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشد.

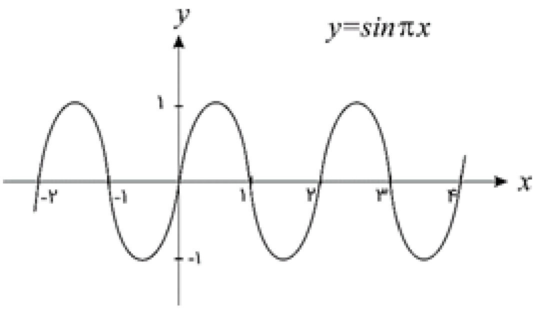
گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نامساوی $(-1)^{[x]}f(x) \geq 0$ زمانی برقرار است که دو تابع $y = (-1)^{[x]}$ و $y = f(x)$ در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشند. ابتدا نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:



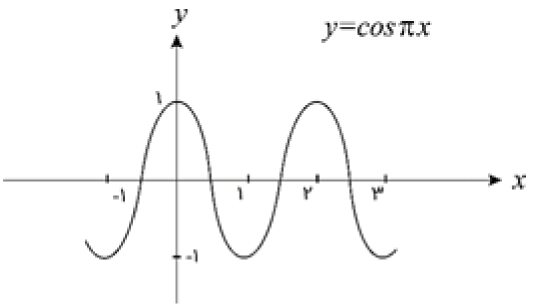
اکنون با رسم نمودار هریک از گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدام‌یک از آن‌ها در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است.

گزینهٔ ۱:



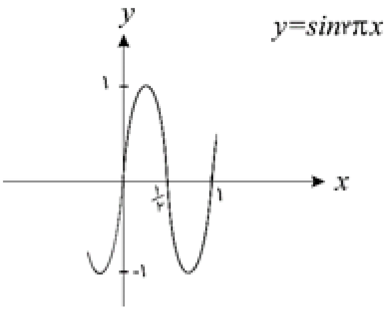
همان‌طور که مشاهده می‌شود، این تابع در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است، پس این گزینه جواب سؤال خواهد بود.

گزینهٔ ۲:



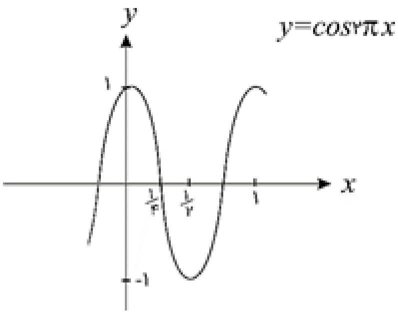
باتوجه‌به نمودار فوق، این تابع در بازه‌های زیادی ازجمله در بازهٔ $(\frac{1}{2}, 1)$ با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت نیست.

گزینهٔ ۳:



مقدار تابع در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ منفی است درحالی‌که تابع $y = (-۱)^{[x]}$ در این بازه دارای علامت مثبت است.

گزینهٔ ۴:



با مقایسهٔ نمودار بالا با نمودار تابع $y = (-۱)^{[x]}$، این گزینه هم جواب سؤال نیست.

۲۶ گزینه ۴

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin(۳\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

باتوجه‌به اینکه مقدار $\tan\theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر داده‌شده برحسب $\tan\theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\tan\theta+۱}{۲\tan\theta}=\frac{۰/۲+۱}{۲(۰/۲)}=\frac{۱/۲}{۰/۴}=۳$$

۲۷ گزینه ۲

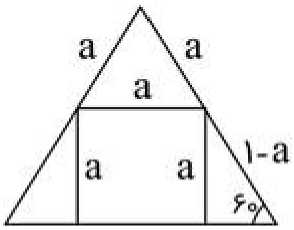
$$\cos ۳x+\cos x=۰\Rightarrow\cos ۳x=-\cos x\Rightarrow\cos ۳x=\cos(\pi-x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow ۴x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\ ۳x=۲k\pi-\pi+x\Rightarrow ۲x=۲k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x\neq ۰}x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

۲۸

گزینه ۱



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

۲۹

گزینه ۳

گام اول

الف) $\sin\alpha$ را داریم، بااستفاده از رابطهٔ $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ می توانیم $\cos\alpha$ را محاسبه کنیم.

ب) α زاویه ای منفرجه است پس در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار داشته و مقدار $\cos\alpha$ منفی است. در محاسبهٔ $\cos\alpha$ از روی $\sin\alpha$ به این نکته توجه داشته باشید.

ج) با داشتن $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مقدار $\tan\alpha$ را محاسبه کرده و در نهایت $\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$ را به دست می آوریم.

گام دوم

ابتدا $\cos\alpha$ و به دنبال آن $\tan\alpha$ را به دست می آوریم:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^۲ + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \frac{۹}{۲۵} + \cos^۲\alpha = ۱$$

$$\Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow{\cos\alpha<۰} \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}} = -\frac{۳}{۴}$$

حالا حاصل $\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$ را محاسبه می کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha) = \frac{\tan\frac{\pi}{۴} + \tan\alpha}{۱ - \tan\frac{\pi}{۴}\tan\alpha} = \frac{۱-\frac{۳}{۴}}{۱+\frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۴}} = \frac{۱}{۷}$$

۳۰ گزینه ۱

از اتحادهای $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ و $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}-\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x})=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)-\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=0$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x+\cos x-1)=0$$

$$\begin{cases}1-\frac{1}{2}\sin 2x=0\Rightarrow \sin 2x=2\Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی}\\ \sin x+\cos x-1=0\Rightarrow \sin x+\cos x=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi & (1)\\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2} & (2)\end{cases}$$

مجموعه جواب در بازه‌های داده‌شده $\left\{0,\frac{\pi}{2},2\pi\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها $\frac{5\pi}{2}$ است.

۳۱ گزینه ۴

$$۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\Rightarrow ۴\sin x(-\cos x)=۱$$

$$\Rightarrow -۴\times\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۱\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲} & (۱)\\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} & (۲)\end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

(۱)

k	۱	۲
x	$\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}$

(۲)

k	۰	۱
x	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi-\frac{\pi}{۱۲}+۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۷\pi}{۱۲}+\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}=۴\pi+\pi=۵\pi$$

۳۲ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $f(\pi)=-\frac{۳}{۲}$ است، پس:

$$-\frac{۳}{۲}=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow a+b(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲a-b\sqrt{۳}=-۳\quad(۱)$$

باتوجه‌به نمودار تابع $b>۰$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{۳}$ است، پس:

$$a+|b|=\sqrt{۳}\xrightarrow{b>۰}a+b=\sqrt{۳}\quad(۲)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-۲\begin{cases}a+b=\sqrt{۳}\\ ۲a-b\sqrt{۳}=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲a-۲b=-۲\sqrt{۳}\\ ۲a-b\sqrt{۳}=-۳\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}-b(۲+\sqrt{۳})=-(۳+۲\sqrt{۳})\Rightarrow b=\frac{\sqrt{۳}(۲+\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

۳۳ گزینه ۳

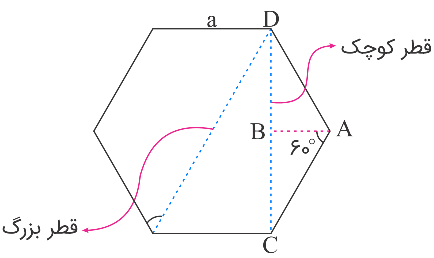
با استفاده از روابط زیر معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin(\frac{5\pi}{2}+x)=\sin(2\pi+\frac{\pi}{2}+x)=\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$$
$$\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x$$
$$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=1+\sin(\frac{5\pi}{2}+x)\Rightarrow\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x)=1+\cos x$$
$$\Rightarrow\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)=1+\cos x$$
$$\Rightarrow\cos x-\sin x=1+\cos x\Rightarrow\sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

۳۴ گزینه ۲

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S=6\times\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$
$$S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=9\sqrt{3}\Rightarrow a^2=6\Rightarrow a=\sqrt{6}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC=2BC=2AC\sin 60^\circ=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{3}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $2a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است.

۳۵

گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{۳\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\cos^۲ x}}{-(\sin^۲ x - \cos^۲ x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}} -\frac{۱}{\cos^۲ x} = -\frac{۱}{\cos^۲ \frac{۳\pi}{۴}} = -\frac{۱}{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = -\frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = -۲$$

۳۶

گزینه ۲

می دانیم $\tan\frac{۲\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$ و $\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = -\cos x$ است. از رابطهٔ داده شده مقدار $\cos x$ را حساب کرده و با استفاده از فرمول $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$، حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می کنیم.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱ \Rightarrow (-\sqrt{۳})(-\cos x) = ۱ \Rightarrow \sqrt{۳}\cos x = ۱ \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

حالا حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می کنیم:

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ = ۲(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲ - ۱ = ۲(\frac{۱}{۳}) - ۱ = \frac{۲}{۳} - ۱ = -\frac{۱}{۳}$$

۳۷ گزینه ۱

با استفاده از روابط زیر معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ ,\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(x+\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4})=2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}+\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\frac{\tan x+1}{1-\tan x}+\frac{\tan x-1}{1+\tan x}=2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{(1+\tan x)^2-(1-\tan x)^2}{1-\tan^2x}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\frac{1+2\tan x+\tan^2x-1+2\tan x-\tan^2x}{1-\tan^2x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2x}=2\sqrt{3}\xrightarrow{\div 2}\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\sqrt{3}$$

با توجه به رابطهٔ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$، داریم:

$$\tan 2x=\sqrt{3}\Rightarrow\tan 2x=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

۳۸ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$2\cos 2x=\cot x(4\sin x+\tan x)\Rightarrow 2(2\cos^2x-1)=4\cot x\sin x+\cot x\tan x$$
$$\Rightarrow 4\cos^2x-2=4\cos x+1\Rightarrow 4\cos^2x-4\cos x-3=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{4+\sqrt{64}}{8}=\frac{4+8}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow\cos x=\frac{3}{2}\ \text{غ.ق ق}\\ \cos x=\frac{4-\sqrt{64}}{8}=\frac{4-8}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

۳۹ گزینه ۱

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = a\sin(\frac{\pi}{۲} + b\pi x) = a\cos b\pi x$$

ماکزیمم تابع برابر با ۲ است؛ بنابراین: $|a| = ۲$

ازطرفی $y(۰) = ۲$، پس:

$$y(۰) = a \times \cos ۰ = a \Rightarrow a = ۲$$

همچنین نمودار تابع در بازهٔ $[-۲/۵, ۳/۵]$ سه بار تکرار شده است، درنتیجه:

$$۳T = ۳/۵ - (-۲/۵) = ۶ \Rightarrow T = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

که هر دو مقدار قابل‌قبول است. باتوجه‌به گزینه‌ها، $a.b = ۲$ است.

۴۰ گزینه ۱

به فرمول های ۲α توجه کنید:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha, \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$

$$۲\cos^۲ x + ۲\sin x\cos x = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ + ۲\sin x\cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \sin ۲x = -\cos ۲x \xrightarrow{\div \cos ۲x} \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = -\frac{\cos ۲x}{\cos ۲x}$$

$$\Rightarrow \tan ۲x = -۱ \Rightarrow \tan ۲x = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow ۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{\div ۲} x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$$

۴۱ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \dfrac{\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ می‌شود. باتوجه‌به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\cos x(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})} = -۱$$

۴۲ گزینه ۳

اگر $x \in [-۱, ۱]$، آنگاه:

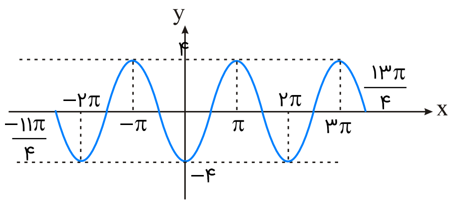
$$-۱ \le x \le ۱ \Rightarrow -۳\pi \le -۳\pi x \le ۳\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴} - ۳\pi \le \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \le \frac{\pi}{۴} + ۳\pi \Rightarrow \frac{-۱۱\pi}{۴} \le \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \le \frac{۱۳\pi}{۴}$$

حال با در نظر گرفتن $\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x = \theta$، ضابطهٔ تابع مفروض سؤال، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -۴\cos\theta \; ; \quad \frac{-۱۱\pi}{۴} \le \theta \le \frac{۱۳\pi}{۴}$$

که شکل آن به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta = -\pi$، $\theta = \pi$ و $\theta = ۳\pi$، بیشترین مقدار خود را دارد.

۴۳ گزینه ۴

می‌دانیم:

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow 1=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$
$$\Rightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

حال از رابطهٔ $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ کمک می‌گیریم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin^2 2x=1$$
$$\Rightarrow \sin 2x=\pm 1\Rightarrow 2x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$$

جواب‌های موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر $\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها 4π است.

۴۴ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\sin 2x\sin 4x+\sin^2 x=1\Rightarrow \sin 2x\sin 4x=1-\sin^2 x$$
$$\Rightarrow (2\sin x\cos x)(2\sin 2x\cos 2x)=\cos^2 x$$
$$\Rightarrow (2\sin x\cos x)(4\sin x\cos x\cos 2x)=\cos^2 x$$
$$\Rightarrow (\cos^2 x)(8\sin^2 x\cos 2x-1)=0$$
$$\Rightarrow (\cos^2 x)(8\sin^2 x(1-2\sin^2 x)-1)=0$$
$$\Rightarrow (\cos^2 x)(-16\sin^4 x+8\sin^2 x-1)=0$$
$$\Rightarrow (\cos^2 x)(-(4\sin^2 x-1))=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} & (1)\\ 4\sin^2 x-1=0\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6} & (2)\end{cases}$$
$$\xrightarrow{(1)\cup(2)} x=(2k+1)\frac{\pi}{6}$$

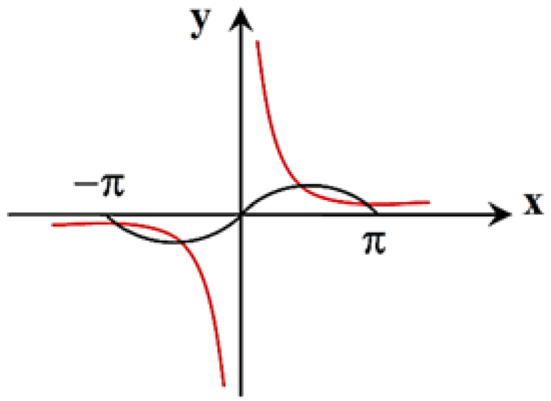
راه‌حل دوم:

$$\sin 2x\sin 4x=1-\sin^2 x\Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(-2x)-\cos 6x)=\cos^2 x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 6x=\frac{1+\cos 2x}{2}\Rightarrow \cos 6x=-1$$
$$\Rightarrow 6x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{6}$$

۴۵ گزینه ۲

$$x\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow x\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{x}$$

کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ به دست بیاوریم. برای این منظور هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



باتوجه‌به شکل، واضح است که معادلهٔ داده‌شده در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی است.

۴۶ گزینه ۴

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = (\sin^۲ x - \cos^۲ x)\underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱} = \sin^۲ x - \cos^۲ x$$

ب) با دانستن رابطهٔ $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$ و $\sin\frac{۵\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می آوریم.

گام دوم

$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = -(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = -\cos ۲x$$

$$\sin^۴ x - \cos^۴ x = -\cos ۲x = \sin^۲\frac{۵\pi}{۴} \xrightarrow{\sin\frac{۵\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}} -\cos ۲x = \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ \Rightarrow -\cos ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\div ۲} x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

۴۷ گزینه ۱

$$\tan\alpha = ۲\,,\ \tan\beta = \frac{۱}{۳}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} = \frac{۲\times۲}{۱-۲^۲} = -\frac{۴}{۳}$$

$$\tan(۲\alpha-\beta) = \frac{\tan ۲\alpha - \tan\beta}{۱+\tan ۲\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{-۴}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{-۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}} = -۳$$

۴۸ گزینه ۱

گام اول

الف) معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ را به معادلهٔ‌مثلثاتی $\cos ۳x = -\cos x$ تبدیل می‌کنیم.

ب) به‌جای $-\cos x$ عبارت $\cos(\pi - x)$ را قرار داده و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

جواب کلی $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ هر دو جواب به‌دست‌آمده را شامل می‌شود.

۴۹ گزینه ۴

نکته:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)} = ۱ \xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x} \frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۱$$

$$\Rightarrow \sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \ \text{غ‌ق‌ق} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

چون $\sin x \neq ۰$، بنابراین جواب $x = k\pi$ غیرقابل‌قبول است.

۵۰

گزینه ۳

کمترین مقدار تابع ۱- است؛ پس:

$$۱-|a|=-۱\Rightarrow |a|=۲$$

تابع در دورهٔ تناوب رسم شده است، پس:

$$۲T=\frac{۴}{۳}\Rightarrow T=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow |b|=۳$$

باتوجه‌به نمودار a و b هم‌علامت است؛ پس:

$$a+b=۵\ \text{یا}\ -۵$$

۵۱

گزینه ۳

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ عبارت داده‌شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos۲x+۲\cos^۲x=۰\Rightarrow ۲\cos^۲x-۱+۲\cos^۲x=۰$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۲x=۱\Rightarrow \cos^۲x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}} x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۵۲ گزینه ۴

گام اول

الف) تابع در بازهٔ بین $\frac{\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.

ب) دوره تناوب تابع $y = a - ۲\cos\left(bx + \frac{\pi}{۲}\right)$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

ج) داریم:

$$y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲}) = a + ۲\sin bx$$

باتوجه‌به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینهٔ نمودار رسم شده خواهد بود.

د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{۱۸}, ۰\right)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$$

همچنین باتوجه‌به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \quad \Rightarrow \quad |b| = ۳ \quad \xrightarrow{b>۰} \quad b = ۳$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{۱۸}\right) = ۰$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$۰ = a - ۲\cos\left(۳ \times \frac{\pi}{۱۸} + \frac{\pi}{۲}\right) = a - ۲\cos\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲}\right) = a + ۲\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = a + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a + ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad a = -۱$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -۱ + ۳ = ۲$$

گزینه ۲

نکته: از فرمول های کمان $(\alpha+\beta)$ می دانیم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

معادلهٔ مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)=\cos ۲x(\cos x-\sin x)$$
$$\Rightarrow \sin ۲x\ \sin x+\sin ۲x\ \cos x=\cos ۲x\ \cos x-\cos ۲x\ \sin x$$
$$\Rightarrow \sin ۲x\ \cos x+\cos ۲x\ \sin x=\cos ۲x\ \cos x-\sin ۲x\ \sin x$$

با توجه به فرمول های کمان $(\alpha+\beta)$ داریم:

$$\sin(۲x+x)=\cos(۲x+x)\Rightarrow \sin ۳x=\cos ۳x$$
$$\xrightarrow[\cos ۳x\neq ۰]{\div \cos ۳x}\frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}=۱\Rightarrow \tan ۳x=۱\Rightarrow \tan ۳x=\tan\frac{\pi}{۴}$$

جواب معادلهٔ مثلثاتی $\tan x=\tan\alpha$ از رابطهٔ $x=k\pi+\alpha$ به دست می آید.

$$۳x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}$$

جواب های معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ به صورت زیر است:

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۲}\ ,\ k=۱\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۱۲}\ ,\ k=۲\Rightarrow x=\frac{۹\pi}{۱۲}$$

مجموع جواب ها $=\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}+\frac{۹\pi}{۱۲}=\frac{۱۵\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۴}$

۵۴ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع برابر π و ماکزیمم مقدار آن ۱/۵ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲ \quad (I)$$

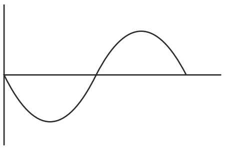
$$\text{ماکزیمم تابع} = ۱ + |a| = ۱/۵ \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۲} \, (II)$$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس نمودار با محور yها بزرگ‌تر از یک است.

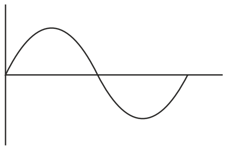
$$x = ۰ : y = ۱ + a\sin(\frac{-\pi}{۶}) = ۱ - \frac{a}{۲} > ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \xrightarrow{(II)} a = \frac{-۱}{۲}$$

باتوجه‌به اینکه ضریب sin در تابع منفی است و باتوجه‌به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = ۲$ قابل‌قبول است.

$$a + b = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$



نمودار $y=-\sin x$



نمودار $y=-\sin(-x)$

۵۵ گزینه ۱

$$\sin(x + \frac{\pi}{۸}) + \cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = ۱$$

باتوجه‌به اینکه $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ است، داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - x - \frac{\pi}{۸}) + \cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = \cos(\frac{۳\pi}{۸} - x) + \cos(x - \frac{۳\pi}{۸})$$
$$= ۲\cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = ۱ \Rightarrow \cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳}$$
$$\Rightarrow x - \frac{۳\pi}{۸} = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۸} \pm \frac{\pi}{۳}$$
$$\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x \in \left\{\frac{۳\pi}{۸} + \frac{\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۸} - \frac{\pi}{۳}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{۳\pi}{۸} + \frac{\pi}{۳} + \frac{۳\pi}{۸} - \frac{\pi}{۳} = \frac{۳\pi}{۴}$$

۵۶

گزینه ۳

در فرض تست مقدار $\tan 20^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به‌صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویهٔ 20° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan 20^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\frac{\sin 250^\circ+\sin 700^\circ}{\cos 560^\circ-\cos 110^\circ}=\frac{\sin(270-20^\circ)+\sin(720^\circ-20^\circ)}{\cos(540^\circ+20^\circ)-\cos(90^\circ+20^\circ)}$$

$$=\frac{-\cos 20^\circ+\sin(-20^\circ)}{\cos(180^\circ+20^\circ)-(-\sin 20^\circ)}=\frac{-\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div \cos 20^\circ} A=\frac{\frac{-\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}-\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{-\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}+\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}=\frac{-1-\tan 20^\circ}{-1+\tan 20^\circ}=\frac{-1-0/4}{-1+0/4}=\frac{-1/4}{-0/6}=\frac{7}{3}$$

۵۷

گزینه ۳

گام اول

$$\frac{1}{\sin 15^\circ}-\frac{1}{\cos 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}$$

نکته: $\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$

گام دوم

$$\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{-\sqrt{2}\sin(15^\circ-45^\circ)}{\frac{1}{4}}$$

$$=-4\sqrt{2}\sin(-30^\circ)=-4\sqrt{2}(-\frac{1}{2})=2\sqrt{2}$$

۵۸ گزینه ۴

راه‌حل اول:

ابتدا حاصل $1+\cot^2\theta$ و $1+\tan^2\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست می‌آوریم:

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\cot^2\theta = 1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

می‌دانیم $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ و $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ است پس:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^4\theta\sin^4\theta} = \frac{1}{(\cos\theta\sin\theta)^4}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

بنابراین:

$$\frac{1}{(\cos\theta\sin\theta)^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 2\theta)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}\sin^4 2\theta} = 16\sin^{-4}2\theta$$

راه‌حل دوم: (عددگذاری)

در صورتی که $\theta=\frac{\pi}{4}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{(1+(\tan\frac{\pi}{4})^2)(1+(\cot\frac{\pi}{4})^2)}{1-\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^4\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+1)(1+1)}{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^4} = 16$$

با جایگذاری $\theta=\frac{\pi}{4}$ در گزینه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تنها در گزینهٔ "۴" صدق می‌کند:

$$16\sin^{-4}2\theta = 16(\sin(2\times\frac{\pi}{4}))^{-4} = 16$$

۵۹

گزینه ۱

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan ۱۵^\circ$ داده شده است، سعی می کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویهٔ ۱۵° به دست آوریم.

گام دوم

$$A=\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$
$$=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(۳\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ-(-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}$$

برای این که در کسر داده شده $\tan ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}$$
$$=\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

۶۰ گزینه ۱

گام اول

نکته:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

گام دوم

با استفاده از گام اول، معادلهٔ داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \left(\cos x\cos\frac{\pi}{۴}-\sin x\sin\frac{\pi}{۴}\right)\left(\cos x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin x\sin\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x\right)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)\,\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x+\sin x)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\frac{۱}{۲} \quad\Rightarrow\quad \cos ۲x=\frac{۱}{۲} \quad\Rightarrow\quad \cos ۲x=\cos\frac{\pi}{۳}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم رابطهٔ $\cos x=\cos\alpha$ هنگامی برقرار است که $x=۲k\pi\pm\alpha$ باشد، جواب معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده، برابر است با:

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \quad\Rightarrow\quad x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

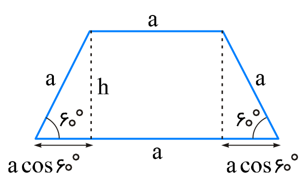
۶۱ گزینه ۱

$$۲\sin^{۲}x+۳\cos x=۰ \xrightarrow{\sin^{۲}x=۱-\cos^{۲}x} ۲-۲\cos^{۲}x+۳\cos x=۰ \Rightarrow ۲\cos^{۲}x-۳\cos x-۲=۰$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{۴}=\begin{cases}۲ & \text{غ‌ق‌ق}\\ -\frac{۱}{۲}\end{cases} \Rightarrow \cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

۶۲ گزینه ۲

$$(\text{محیط})\ P=۳a+۲a\cos۶۰^\circ+a\Rightarrow ۳۰=۵a\Rightarrow a=۶$$
$$S=\frac{(a+۲a)h}{۲}=\frac{۳a\times a\sin۶۰^\circ}{۲}\xrightarrow{a=۶}S=\frac{۳\sqrt{۳}\times ۶^{۲}}{۴}=۲۷\sqrt{۳}$$



۶۳ گزینه ۴

$$\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰ \Rightarrow ۲\sin x \cos x + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi$$

$$۲\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}, x = \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$\pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$$

در اینجا نیازی به محاسبهٔ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصلهٔ داده‌شده، مشخص کنیم.

۶۴ گزینه ۴

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اگر زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

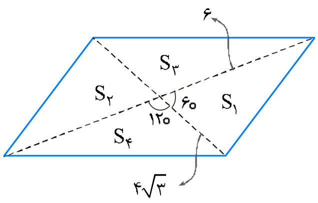
$$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$$

بااستفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin ۶۰^\circ = ۱۸$$

$$S_۳ = S_۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin(۱۲۰) = ۱۸$$

$$S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$



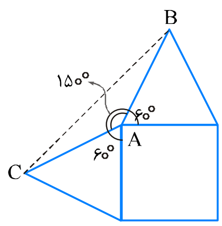
۶۵ گزینه ۱

نکته:

$$۱)\ \sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$
$$۲)\ \cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$$

$$\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\cos(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}+\alpha))-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$
$$=\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\sqrt{۲}\sin\left((\frac{\pi}{۴}+\alpha)-\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۲}\sin(\alpha)\ \ (*)$$
$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{۷}}{۳}\Rightarrow ۱-\cos^۲\alpha=\sin^۲\alpha\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\frac{۷}{۹}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$
$$\xrightarrow{\text{ربع (ناحیهٔ) چهارم}}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$
$$\xrightarrow{(*)}\sqrt{۲}\sin(\alpha)=\sqrt{۲}\times-\frac{\sqrt{۲}}{۳}=\frac{-۲}{۳}$$

۶۶ گزینه ۳



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\sin۱۵۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

۶۷ گزینه ۱

داریم:

$$\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{-\cos۲\alpha}{\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha}=-۲\cot۲\alpha$$

بنابراین $\tan\alpha-\cot\alpha=-۲\cot۲\alpha$، پس:

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)=-۲\cot(۲\pi x)$$

دورهٔ تناوب تابع $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر $\frac{\pi}{|۲\pi|}$ است، یعنی $\frac{۱}{۲}$.

۶۸ گزینه ۲

$$\tan(\frac{۱۷\pi}{۶}) = \tan(\frac{۱۸\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶}) = \tan(-\frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۳}) = \sin(\frac{۱۲\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۰\pi}{۳}) = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۲} = ۰$$

۶۹ گزینه ۳

گام اول

الف) با در نظر گرفتن $\cot\frac{x}{۲} = \frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}$ معادله را برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ به دست می‌آوریم. معادله به یک معادلهٔ درجه‌دو برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ تبدیل و با حل معادلهٔ درجه‌دو، حاصل $\tan\frac{x}{۲}$ را تعیین می‌کنیم.

ب) با استفاده از فرمول کمان $\tan ۲x$، ابتدا $\tan x$ و سپس $\tan ۲x$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\tan\frac{x}{۲} - \cot\frac{x}{۲} = ۱ \Rightarrow \tan\frac{x}{۲} - \frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^۲\frac{x}{۲} - ۱}{\tan\frac{x}{۲}} = ۱ \Rightarrow \tan^۲\frac{x}{۲} - ۱ = \tan\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan^۲\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan\frac{x}{۲} = \begin{cases} \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \\ \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

محاسبهٔ $\tan x$:

$$\tan x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}} = \frac{۲(۱\pm\sqrt{۵})^۲}{۱-(\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲})^۲} = -۲$$

محاسبهٔ $\tan ۲x$:

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^۲} = \frac{-۴}{۱-۴} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

۷۰ گزینه ۱

$$\sin ۵x\cos ۳x-\cos ۵x\sin ۳x=\sin(۵x-۳x)=\sin ۲x=\frac{۲}{۳}$$

مقدار $\cos ۴x$ را می‌خواهیم. می‌دانیم:

$$\cos ۴x=۱-۲\sin^{۲}۲x=۱-۲(\frac{۲}{۳})^{۲}=۱-\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۹}$$

۷۱ گزینه ۱

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow[۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha]{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱}-\sin ۲\alpha=-\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha}\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$$

۷۲ گزینه ۱

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را خلاصه کرده و سپس با استفاده از فرمول کمان های ۲α، حاصل تست را به دست می آوریم.

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha(-\sin\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha=$$
$$-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=-۲\sin\alpha\cos\alpha=-\sin ۲\alpha$$

۷۳ گزینه ۱

ماکزیمم برابر ۴ است.

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b=۰\,,\quad f(۲)=۴\Rightarrow a+b\cos\pi=۴\Rightarrow a-b=۴$$

$$\begin{cases}a+b=۰\\ a-b=۴\end{cases}\Rightarrow a=۲\,,\,b=-۲$$

۷۴ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{۵\pi}{۶}$ صفر است. پس:

$$y(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b\sin(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

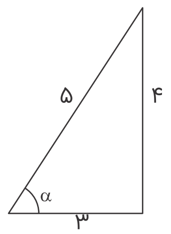
بنابراین: $y = a + ۲a\sin x$. به‌علاوه باتوجه‌به اینکه $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس $a > ۰$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = ۱$ باشد.

$$\max = ۳ \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$
$$\Rightarrow y = ۱ + ۲\sin x$$
$$y(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$$

۷۵ گزینه ۳

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha - \frac{۳\pi}{۲}) = -\tan(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cot\alpha$$

اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan\alpha = \frac{۴}{۳} \quad , \cot\alpha = \frac{۳}{۴}$$
$$\sin\alpha = -\frac{۴}{۵} \quad , \cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$$
$$\text{حاصل} : \cos\alpha(-\sin\alpha) - (-\cot\alpha) = -\frac{۳}{۵}(\frac{۴}{۵}) + \frac{۳}{۴}$$
$$= -\frac{۱۲}{۲۵} + \frac{۳}{۴} = \frac{-۴۸ + ۷۵}{۱۰۰} = \frac{۲۷}{۱۰۰}$$

۷۶ گزینه ۱

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}\left(\frac{۱}{\sin x}-\sin x\right)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}\left(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{\frac{\tan x}{۱}}{\frac{۱}{|\cos x|}}\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times|\cos x|\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}$$

اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ باشد آنگاه $\cos x<۰$ است، پس $|\cos x|=-\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\times(-\cos x)\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\cos^۲ x$$

۷۷ گزینه ۴

گام اول

می‌دانیم:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

گام دوم

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲}-a\right)}{\cos a\cos b}=\frac{\cos a}{\cos a\cos b}=\frac{۱}{\cos b}$$

۷۸ گزینه ۴

گام اول

می‌دانیم:

الف) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha\ ,\ \sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$

ج) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، عبارت داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\sin ۱۱۰^\circ(\tan ۲۰^\circ + \tan ۳۵^\circ) = \sin(\frac{\pi}{۲} + ۲۰^\circ)(\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} + \frac{\sin ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ})$$

$$= \cos ۲۰^\circ(\frac{\sin ۲۰^\circ \cos ۳۵^\circ + \sin ۳۵^\circ \cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ \cos ۳۵^\circ}) = \frac{\sin(۲۰^\circ + ۳۵^\circ)}{\cos ۳۵^\circ} = \frac{\sin ۵۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{۲} - ۳۵^\circ)}{\cos ۳۵^\circ} = \frac{\cos ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ} = ۱$$

۷۹ گزینه ۳

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳} = \sin(\frac{۱۸\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \sin(۶\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶}) = \cos(\frac{۱۷\pi}{۶}) = \cos(\frac{۱۸\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶}) = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۶})$$

$$= \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴}) = \tan(\frac{۲۰\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) = \tan(-\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶}) = -\sin\frac{۱۱\pi}{۶} = -\sin(\frac{۱۲\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۸۰ گزینه ۳

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطهٔ $\sin 2\alpha \frac{1}{2} = \sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = 1 + a\sin bx\cos bx = 1 + \frac{a}{2}\sin 2bx$$

باتوجه‌به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{3}{2}$، مینیمم تابع $\frac{1}{2}$ و دورهٔ تناوب $\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ است. پس:

$$\begin{cases} 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \\ 1 - \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

باتوجه‌به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{2}$ و $2b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته جواب $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ یا $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ دارد، درنتیجه $a + b = 2$ یا $a + b = -2$ صحیح است.

۸۱ گزینه ۴

$$A = \sqrt{1 + \tan^2 x}(2\sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\left(2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \sin^2 x\right)$$

$$= \frac{1}{|\cos x|}(2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x) = \frac{1 - \sin^2 x}{|\cos x|} = \frac{\cos^2 x}{|\cos x|}$$

چون $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ است، یعنی x در ناحیهٔ سوم قرار دارد و درنتیجه $|\cos x| = -\cos x$ است. پس:

$$A = \frac{\cos^2 x}{-\cos x} = -\cos x$$

۸۲ گزینه ۲

$$\tan\frac{11\pi}{4} = \tan(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\sin\frac{15\pi}{4} = \sin(\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{13\pi}{4} = \cos(\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = \tan\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4} = -1 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۸۳ گزینه ۲

$$\frac{\sin 3x+\sin 2x}{1+\cos x}=0$$

برای آنکه کسر صفر شود باید صورت آن صفر باشد.

$$\sin 3x+\sin 2x=0\Rightarrow \sin 3x=-\sin 2x\Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x)$$

$$\begin{cases}3x=2k\pi-2x\Rightarrow 5x=2k\pi\Rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{5} & \checkmark\\ 3x=2k\pi+\pi-(-2x)\Rightarrow x=2k\pi+\pi & \times\end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $x=2k\pi+\pi$ مخرج یعنی $1+\cos x$ صفر می‌شود؛ بنابراین جواب کلی همان $x=\dfrac{2k\pi}{5}$ است.

۸۴ گزینه ۲

با توجه به رابطهٔ $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ معادله را ساده می کنیم. هم چنین می دانیم $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ است.

$$2\tan x\cos^2 x=1\Rightarrow 2\frac{\sin x}{\cos x}\times\cos^2 x=1\xrightarrow{\cos x\neq 0}2\sin x\cos x=1$$

$$\Rightarrow \sin 2x=1\xrightarrow{\sin\alpha=1\Rightarrow\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\div 2}x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

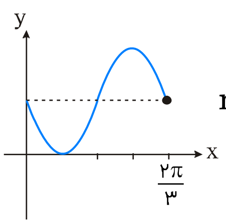
۸۵ گزینه ۴

طبق نمودار : $T=\dfrac{2\pi}{3}$

از روی ضابطه : $T=\dfrac{2\pi}{|m|}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|m|}\Rightarrow |m|=3\Rightarrow m=\pm 3$$

چون باتوجه‌به نمودار تابع باید ابتدا min و سپس max داشته باشد، بنابراین:



$$m=3\Rightarrow y=1-\sin 3x\xrightarrow{x=\frac{7\pi}{6}}y\left(\frac{7\pi}{6}\right)=1-\sin 3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$=1-\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=1-(-1)=2$$

۸۶ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x) = 0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases}$$

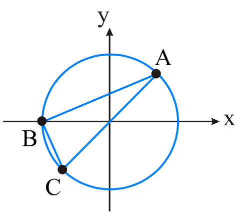
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x = 0$ و $x = 2\pi$ عبارت $1 - \cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف‌نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x = \pi,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{4}$ را بر روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AC} = \pi \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

۸۷

گزینه ۱

گام اول

الف) دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

ب) به ازای هر مقدار دلخواه x و a همواره داریم: $-۱ \leq \sin ax \leq ۱$

گام دوم

تابع $y = a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $[۰, ۳]$، سه نوسان کامل انجام داده است؛ بنابراین طول این بازه سه برابر دورهٔ تناوب تابع است، پس:

$$۳T = ۳ - ۰ \Rightarrow ۳T = ۳ \Rightarrow T = ۱$$

بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow ۱ = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، داریم:

$$-۱ \leq \sin(b\pi x) \leq ۱ \Rightarrow -a \leq a\sin(b\pi x) \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a$$

طبق نمودار تابع $y_{\max} = ۳$ و $y_{\min} = -۳$ و نمودار تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است بنابراین $a = -۳$ خواهد بود.
ازطرفی، به ازای مقادیر کوچک بزرگ‌تر از صفر، حاصل تابع باید منفی شود و چون $a = -۳$ شد پس مقدار $\sin b\pi x$ باید مثبت باشد؛ بنابراین داریم: $b = ۲$

درنتیجه:

$$ab = (-۳) \times ۲ = -۶$$

۸۸ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع به معادلهٔ $y = A\sin(Bx + D) + E$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|B|}$، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \quad (*)$$

همچنین با توجه به نمودار $T = ۶$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۲}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

با فرض $b = \frac{۱}{۳}$ و اگر A عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادلهٔ $y = A\sin(Bx + D) + E$، برابر با $A + E$ است، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow Max(y) = a \quad (**)$$

همچنین با توجه به نمودار $Max(y) = ۲$، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = ۲ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{۷}{۳}$ نیز قابل قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

۸۹ گزینه ۱

گام اول

باتوجه‌به نمودار رسم‌شده مشخص است دورهٔ تناوب تابع برابر با ۴π است. دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|m|}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$\frac{۲\pi}{|m|} = ۴\pi \Rightarrow |m| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = \pm\frac{۱}{۲}$$

با فرض $m = \frac{۱}{۲}$ تست را حل می‌کنیم (اگر $m = -\frac{۱}{۲}$ هم فرض شود تأثیری در جواب تست ندارد چون تابع $\cos mx$ یک تابع زوج است).

$$m = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow f(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$$

$$= \frac{۱}{۲} + ۲\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} + ۲(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۹۰ گزینه ۲

برای حل سؤال به دو رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x\ ,\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow -\cos 2x=-\cos x\Rightarrow \cos 2x=\cos x$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm x\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi \\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow 3x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x=2k\pi$ و $x=\frac{2k\pi}{3}$ را شامل شود به صورت $x=\frac{2k\pi}{3}$ است.

۹۱ گزینه ۳

برای ساده تر شدن معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=\sin x,\sin(\pi+x)=-\sin x$$

اگر در حل معادلهٔ مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ بازنویسی می کنیم.

$$2\sin(\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+3\cot x\sin(\pi+x)=0$$
$$\Rightarrow 2\sin x\sin x+3\cot x(-\sin x)=0$$
$$\Rightarrow 2\sin^2 x-3\cos x=0\xrightarrow{\sin^2 x=1-\cos^2 x}2(1-\cos^2 x)-3\cos x=0$$
$$\Rightarrow 2-2\cos^2 x-3\cos x=0\Rightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0\Rightarrow (2\cos x-1)(\cos x+2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\\ \cos x=-2\quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

۹۲ گزینه ۴

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطهٔ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ مرتب می کنیم.

$$2\sin^2 x = 3\cos x \Rightarrow 2(1-\cos^2 x) = 3\cos x$$
$$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x = 3\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ دارای جواب $x = 2k\pi \pm \alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادلهٔ $\cos x = A$ به ازای $A > 1$ و $A < -1$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = \frac{1}{2}$ برابر است با:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۹۳ گزینه ۳

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۹۴ گزینه ۳

برای حل معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cot x$$
$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$(\sin x - \tan x)\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos\frac{4\pi}{3}$$
$$(\sin x - \tan x)\cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{2}$$

جواب های معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ از رابطهٔ $x = 2k\pi \pm \alpha$ به دست می آید.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۹۵ گزینه ۴

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^{۲} x$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را برحسب $\sin x$ نوشته و حل می‌کنیم. جواب معادله را با $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ مطابقت داده و مقادیر i را مشخص می‌کنیم.

$$\cos ۲x = \sin x \Rightarrow ۱ - ۲\sin^{۲} x = \sin x$$

$$\Rightarrow ۲\sin^{۲} x + \sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x - ۱)(\sin x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ \sin x = -۱ \Rightarrow \sin x = \sin \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{۹\pi}{۶} \end{cases}$$

باتوجه‌به جواب‌های به‌دست‌آمده مقادیر i برابر است با:

$$i = \{۱, ۵, ۹\}$$

۹۶ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم:

$$\sin \frac{۵\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}, \ \sin(\frac{\pi}{۲} + x) = \cos x, \ \sin(\pi + x) = -\sin x$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را ساده کرده سپس حل می‌کنیم:

$$\sin \frac{۵\pi}{۶} + \sin(\frac{\pi}{۲} + x)\sin(\pi + x) = \frac{۱}{۲} - \cos x \sin x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\cos x \sin x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

۹۷

گزینه ۱

گام اول

مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $\cos x = \cos \alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi \pm \alpha$ است.

گام دوم

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$۲\cos^۲ x + \cos x = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

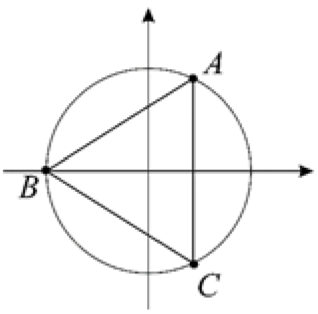
$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۱ \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x_۱ = \frac{\pi}{۳}, x_۲ = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos x\pi \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x_۳ = \pi$$

جواب‌ها را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است.

۹۸ گزینه ۱

گام اول

داریم: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

گام دوم

با استفاده از رابطهٔ گام اول، معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را برحسب $\cos x$ مرتب می‌کنیم:

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2 - 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس هر دو مقدار به‌دست‌آمده، قابل‌قبول است. باتوجه‌به آن‌ها جواب‌های معادله را در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos\pi \Rightarrow x_2 = \pi$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3}$$

۹۹ گزینه ۳

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}$$

$$= \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$$

همچنین با استفاده از فرمول کمان‌های 2α داریم:

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$$

بنابراین معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$2\sin 2x\cos 2x = -\cos 2x \quad\Rightarrow\quad 2\sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos 2x\,(2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6} \quad\Rightarrow\quad x = k\pi + \dfrac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6} \quad\Rightarrow\quad x = k\pi - \dfrac{\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازهٔ $[0, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} k = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{\pi}{4} \\ k = 1 \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x = \frac{7\pi}{12}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

بنابراین مجموع تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi + \frac{18\pi}{12} = 2\pi + \frac{6\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

۱۰۰ گزینه ۴

$$\tan x = \frac{1}{\tan 3x} = \cot 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - 3x)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۱۰۱ گزینه ۱

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{۴}-\cos x\sin\frac{\pi}{۴}}{\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴}}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x}$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\xrightarrow{\div\cos x}\frac{\tan x-۱}{\tan x+۱}=۲$$

$$\tan x-۱=۲\tan x+۲\Rightarrow\tan x=-۳$$

۱۰۲ گزینه ۲

گام اول

اگر $\alpha-\beta=\frac{\pi}{۴}$ باشد، می توان نتیجه گرفت $\alpha=\beta+\frac{\pi}{۴}$ است. با معلوم بودن مقدار $\tan\beta$، حاصل $\tan\alpha$ را به دست می آوریم.

گام دوم

$$\alpha=\beta+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\tan\alpha=\tan(\beta+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\tan\beta+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan\beta\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۳$$

پس حاصل $\sin ۲\alpha$ برابر است با:

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲\times ۳}{۱+(۳)^۲}=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$$

۱۰۳ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و باتوجه‌به اینکه $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ است عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$8\cos a\cos b\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=8\cos a\cos b\sin a\sin b$$
$$=2(2\sin a\cos a)(2\sin b\cos b)=2\sin 2a\sin 2b$$

داریم:

$$a+b=\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\times 2}2a+2b=\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2b=\frac{\pi}{2}-2a$$

بنابراین:

$$\sin 2b=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2a\right)=\cos 2a$$

پس می‌توان نوشت:

$$2\sin 2a\sin 2b=2\sin 2a\cos 2a=\sin 2(2a)=\sin 4a$$

۱۰۴ گزینه ۱

دانستن روابط زیر به ساده شدن معادلهٔ مثلثاتی کمک بسیاری می کند:

$$\sin(3\pi-x)=\sin x,\ \cos(\pi+x)=-\cos x,\ \cos\frac{3\pi}{2}=0$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3x\sin(3\pi-x)-\sin 3x\cos(\pi+x)=\cos\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos 3x\sin x-\sin 3x(-\cos x)=0$$
$$\Rightarrow\cos 3x\sin x+\sin 3x\cos x=0\Rightarrow\sin(x+3x)=0\Rightarrow\sin 4x=0$$
$$\xrightarrow{\sin\alpha=0\ \Rightarrow\alpha=k\pi}4x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}$$

۱۰۵ گزینه ۲

نکته:

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

از نکتهٔ بالا می‌توان فهمید $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$؛ بنابراین:

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \tan 3x$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

۱۰۶ گزینه ۴

گام اول

می‌دانیم:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \ , \ \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، کسر داده‌شده را ساده کرده و سپس حل می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱۰۷ گزینه ۳

گام اول

می‌دانیم:

$$\text{۲} \sin x \cos x = \sin \text{۲}x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول می‌توان نوشت:

$$\sin(x + \frac{\pi}{\text{۴}}) = \sin x \cos\frac{\pi}{\text{۴}} + \cos x \sin\frac{\pi}{\text{۴}} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{\text{۴}}) = \frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}\sin x + \frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}\cos x$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{\text{۴}}) = \frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}(\sin x + \cos x) \Rightarrow \sqrt{\text{۲}}\sin(x + \frac{\pi}{\text{۴}}) = \sin x + \cos x$$

بنابراین داریم:

$$\text{۲}\sqrt{\text{۲}}\sin x\cos x = \sin x + \cos x \Rightarrow \sqrt{\text{۲}}\sin\text{۲}x = \sqrt{\text{۲}}\sin(x + \frac{\pi}{\text{۴}}) \Rightarrow \sin\text{۲}x = \sin(x + \frac{\pi}{\text{۴}})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{۲}x = \text{۲}k\pi + x + \frac{\pi}{\text{۴}} \Rightarrow x = \text{۲}k\pi + \frac{\pi}{\text{۴}} \\ \text{۲}x = \text{۲}k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{\text{۴}} \Rightarrow \text{۳}x = \text{۲}k\pi + \frac{\text{۳}\pi}{\text{۴}} \Rightarrow x = \frac{\text{۲}k\pi}{\text{۳}} + \frac{\pi}{\text{۴}} \end{cases}$$

به ازای $k \in \mathbb{Z}$، مجموعهٔ $x = \frac{\text{۲}k\pi}{\text{۳}} + \frac{\pi}{\text{۴}}$ جواب‌های $x = \text{۲}k\pi + \frac{\pi}{\text{۴}}$ را نیز شامل می‌شود؛ بنابراین جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده به‌صورت $x = \frac{\text{۲}k\pi}{\text{۳}} + \frac{\pi}{\text{۴}}$ است.

۱۰۸ گزینه ۲

$$\text{۲}\cos x(\cos x - \sin x) = \text{۱} \Rightarrow \text{۲}\cos^{\text{۲}}x - \text{۲}\cos x\sin x - \text{۱} = \text{۰}$$

$$\Rightarrow \text{۲}\cos x\sin x = \text{۲}\cos^{\text{۲}}x - \text{۱} \Rightarrow \sin\text{۲}x = \cos\text{۲}x \Rightarrow \tan\text{۲}x = \text{۱}$$

$$\Rightarrow \text{۲}x = k\pi + \frac{\pi}{\text{۴}} \xrightarrow{\div\text{۲}} x = \frac{k\pi}{\text{۲}} + \frac{\pi}{\text{۸}}$$

۱۰۹ گزینه ۴

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi \Rightarrow \sin 5x + \sin 4x = 0$$

بنابراین:

$$\sin 5x = -\sin 4x = \sin(-4x)$$

$$\begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \Rightarrow 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{9} \quad (1) \\ 5x = 2k\pi + \pi + 4x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad (2) \end{cases}$$

جواب‌های معادلهٔ (۱) عبارت‌اند از:

$$0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{18\pi}{9}$$

جواب‌های این معادله یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{2\pi}{9}$ است که مجموع جملات برابر می‌شود با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{n=10} S_{10} = \frac{10}{2}(0 + \frac{18\pi}{9}) = 10\pi$$

از طرفی معادلهٔ (۲) در این بازه فقط دارای جواب π است؛ بنابراین مجموع جواب‌های معادله در این بازه 11π است.

۱۱۰ گزینه ۲

می دانیم $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ است. هم چنین جواب های کلی معادلهٔ $\tan x = \tan\alpha$ از رابطهٔ $x = k\pi + \alpha$ به دست می آید.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۱۱۱ گزینه ۴

$$\frac{\cos^۲\alpha\cos^۲\beta - \sin^۲\alpha\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha\cos^۲\beta - \cos^۲\alpha\sin^۲\beta} = \frac{(\cos a\cos\beta)^۲ - (\sin\alpha\sin\beta)^۲}{(\sin\alpha\cos\beta)^۲ - (\cos\alpha\sin\beta)^۲}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$= \frac{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}$$

با استفاده از دستورهای مجموع و تفاضل دو کمان برای کسینوس، خواهیم داشت:

$$= \frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)} = \cot(\alpha+\beta)\cot(\alpha-\beta)$$

باید $\cot(\alpha+\beta)$ و $\cot(\alpha-\beta)$ را بیابیم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = ۱۳۵^\circ \Rightarrow \cot(\alpha+\beta) = \cot\frac{۳\pi}{۴} = -۱ \\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \cot(\alpha-\beta) = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

پس:

$$\cot(\alpha+\beta)\cot(\alpha-\beta) = (-۱)(\frac{۴}{۳}) = \frac{-۴}{۳}$$

۱۱۲ گزینه ۲

از فرمول $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ استفاده می‌کنیم.

$$\cos(x+\frac{\pi}{۳}) + \cos(x-\frac{\pi}{۳}) = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{۳} - \cancel{\sin x\sin\frac{\pi}{۳}} + \cos x\cos\frac{\pi}{۳} + \cancel{\sin x\sin\frac{\pi}{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲\cos x\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲\cos x \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{۲}{۳}$$

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ = ۲(\frac{۲}{۳})^۲ - ۱ = ۲\times\frac{۴}{۹} - ۱ = \frac{۸}{۹} - ۱ = \frac{-۱}{۹}$$

منبع: کنکور سراسری

۱ اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A \subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B - A' = A$　　۲) $A - B' = A$

۳) $A \cap B' = \varnothing$　　۴) $B \cap A' = \varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۲ فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟

۱) $A \subset B'$　　۲) $A - B' = \varnothing$

۳) $A \cap B' = A$　　۴) $(A \cup B)' = \varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳ اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی $\{۱\}, \{۳, ۵\}, \{۷, ۹, ۱۱\}, \ldots$. در این صورت جملهٔ آخر واقع در دستهٔ شمارهٔ چهل، کدام است؟

۱) ۱۵۶۳　　۲) ۱۵۸۹

۳) ۱۶۳۹　　۴) ۱۶۵۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی، هستند. قدر نسبت دنبالهٔ هندسی، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$　　۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲　　۴) $\frac{۹}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{۱\}, \{۲, ۳, ۴\}, \ldots$. در دستهٔ نهم واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر، کدام است؟

۱) ۷۱　　۲) ۷۲

۳) ۷۳　　۴) ۷۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۶ اگر $i \in \{۱, ۲, ۳, ..., ۹\}$ و $A_i = [-i, \frac{۹-i}{۲}]$ آن گاه مجموعهٔ $(A_۱ \cap A_۷) - (A_۲ \cap A_۵)$ به کدام صورت است؟

۱) $[-۲, -۱) \cup (۱, ۲]$

۲) $[-۲, -۱] \cup [۱, ۲]$

۳) $[-۱, ۱]$

۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۷ اگر $A_n = \left(\frac{-۲}{n}, \frac{n-۲}{n}\right)$ به صورت بازه باشد، مجموعهٔ $(A_۳ \cup A_۶) - A_۳$ برابر کدام بازه است؟

۱) $\left(\frac{-۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$

۲) $\left[\frac{-۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$

۳) $\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$

۴) $\left[\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۸ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند. قدر نسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$

۲) $\frac{۷}{۴}$

۳) $\frac{۹}{۴}$

۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۹ مجموعه‌های $A = \{۲\}$ و $B = \{۳, ۵, \{۲\}\}$ و $C = \{\{\{۲\}, ۳, ۵\}, ۲\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟

۱) $A \in B$

۲) $A \in C$

۳) $B \in C$

۴) $A \subset C$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۰ در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۱ اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n, ۲^m \leq ۲n\}, n \in N$ آنگاه مجموعهٔ $(A_۶ - A_۴) \cup A_۱$ چند عضو دارد؟

۱) ۴

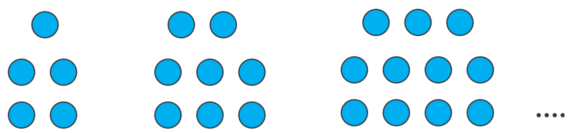
۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۲ در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟



۱) ۳۴

۲) ۳۶

۳) ۳۸

۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، $(۱), (۳,۵), (۷,۹,۱۱), \dots$؛ مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌اُم، کدام است؟

۱) ۱۷۰۰   ۲) ۱۷۵۰

۳) ۱۸۰۰   ۴) ۱۸۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۴ باتوجه‌به دنبالهٔ حسابی، مجموع $\frac{۱}{۱۷\times ۲۰} + \dots + \frac{۱}{۸\times ۱۱} + \frac{۱}{۵\times ۸} + \frac{۱}{۲\times ۵}$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵   ۲) ۰/۱۸

۳) ۰/۲۴   ۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵ در دو دنبالهٔ حسابی به‌صورت‌های $۲, ۷, ۱۲, \dots$ و $۸, ۱۱, ۱۴, \dots$، چند عدد سه‌رقمی مشترک وجود دارد؟

۱) ۵۸   ۲) ۵۹

۳) ۶۰   ۴) ۶۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۶ در دنباله‌های حسابی $۲, ۹, ۱۶, ۲۳, \dots$ و $۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, \dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰، موجود است؟

۱) ۵   ۲) ۶

۳) ۷   ۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

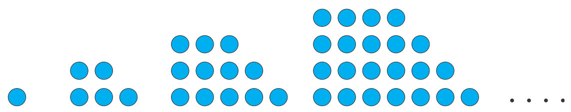
۱۷ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شمارهٔ آن دسته باشد، $(۱), (۳,۵), (۷,۹,۱۱), \dots$. جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم کدام است؟

۱) ۴۱۵   ۲) ۴۱۹

۳) ۴۲۱   ۴) ۴۲۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۸ در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل نهم کدام است؟



۱) ۱۱۷

۲) ۱۲۰

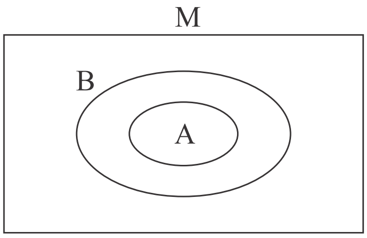
۳) ۱۲۳

۴) ۱۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱ گزینه ۴

برای بررسی مسئله، بهتر است نمودار ون زیر را برای مجموعه‌های A و B فرض کنیم:



گزینهٔ "۱" به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$B - A' = A \Rightarrow B \cap A = A$$

باتوجه‌به شکل کاملاً درست است.
گزینهٔ "۲" عبارت است از:

$$A - B' = A \Rightarrow A \cap B = A$$

بنابراین این گزینه درست است.
گزینهٔ "۳" به‌صورت زیر است:

$$A \cap B' = \varnothing \Rightarrow A - B = \varnothing$$

چون $A \subset B$، پس کاملاً درست است.
گزینهٔ "۴" عبارت است از:

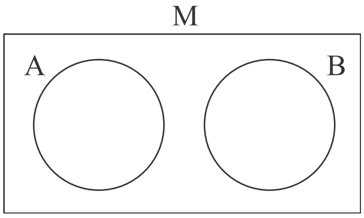
$$B \cap A' = \varnothing \Rightarrow B - A = \varnothing$$

نادرست می‌باشد، پس جواب مسئله گزینهٔ "۴" است.

۲

گزینه ۴

نمودار ون را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



گزینهٔ "۱" درست است، زیرا همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، A زیرمجموعهٔ B' است.
گزینهٔ "۲" را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A - B' = \varnothing \Rightarrow A \cap B = \varnothing$$

که کاملاً درست است.
گزینهٔ "۳" را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$A \cap B' = A \Rightarrow A - B = A$$

بنابراین باتوجه‌به شکل درست است.
گزینهٔ "۴" به‌صورت زیر است:

$$(A \cup B)' = \varnothing \Rightarrow A' \cap B' = \varnothing$$

باتوجه‌به شکل نادرست است.

۳

گزینه ۳

ازآنجاکه تعداد جملات هر دسته، برابر با شمارهٔ آن دسته است، پس تعداد کل جملات ۴۰ دستهٔ اول برابر است با:

$$۱ + ۲ + \ldots + ۴۰ = \frac{۴۰ \times ۴۱}{۲} = ۸۲۰$$

همچنین جملهٔ عمومی اعداد طبیعی فرد متوالی به‌صورت $a_n = ۲n - ۱$ است، پس:

$$a_{۸۲۰} = ۲(۸۲۰) - ۱ = ۱۶۳۹$$

۴ گزینه ۴

راه‌حل اول:

جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d و جملهٔ اول a_1 برابر است با:

$$\underbrace{a_1+2d}_{t_1},\ \underbrace{a_1+6d}_{t_2},\ \underbrace{a_1+15d}_{t_3}$$

t_1 ، t_2 و t_3 سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس داریم:

$$t_2{}^2=t_1t_3 \Rightarrow (a_1+6d)^2=(a_1+2d)(a_1+15d)$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1^2}+12a_1d+36d^2=\cancel{a_1^2}+17a_1d+30d^2$$

$$\Rightarrow 6d^2-5a_1d=0 \Rightarrow d(6d-5a_1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=0 \Rightarrow r=1 \quad (\text{در گزینه‌ها نیست}) \\ 6d-5a_1=0 \Rightarrow d=\frac{5}{6}a_1 \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

$$t_1=a_1+2d=a_1+2\left(\frac{5}{6}a_1\right)=\frac{8}{3}a_1$$

$$t_2=a_1+6d=a_1+6\left(\frac{5}{6}a_1\right)=6a_1$$

درنتیجه قدر نسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{6a_1}{\frac{8}{3}a_1}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر جملات a_n، a_m و a_k از یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدر نسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با: $r=\dfrac{k-m}{m-n}$

a_3، a_7 و a_{16} جملات یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس طبق نکته داریم:

$$r=\frac{16-7}{7-3}=\frac{9}{4}$$

۵ گزینه ۳

دستهٔ اول : $\{۱\}$

دستهٔ دوم : $\{\underbrace{۲}_{۱+۱}, ۳, \underbrace{۴}_{۲^۲}\}$

دستهٔ سوم : $\{\underbrace{۵}_{۲^۲+۱}, ۶, ۷, ۸, \underbrace{۹}_{۳^۲}\}$

$\vdots$

دستهٔ هشتم : $\left\{\underbrace{۵۰}_{۷^۲+۱}, \dots, \underbrace{۶۴}_{۸^۲}\right\}$

دستهٔ نهم : $\left\{\underbrace{۶۵}_{۸^۲+۱}, \dots, \underbrace{۸۱}_{۹^۲}\right\}$

$\Rightarrow$ واسطهٔ حسابی $= \frac{۸۱+۶۵}{۲} = \frac{۱۴۶}{۲} = ۷۳$

۶

گزینه ۱

ابتدا با توجه به تعریف مجموعهٔ $\mathrm{A_i}$، مجموعه‌های $\mathrm{A_۱}$، $\mathrm{A_۲}$ و $\mathrm{A_۵}$ و $\mathrm{A_۷}$ را به صورت بازه‌ای مشخص می‌کنیم.
برای به دست آوردن اشتراک دو مجموعه که به صورت بازه‌ای مشخص شده‌اند، ابتدای بازه، بزرگ‌ترین عدد ابتدای دو مجموعه و انتهای بازه، کوچک‌ترین عدد انتهای دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود.
تست را با استفاده از رسم نمودار هم حل می‌کنیم تا اگر در مشخص کردن مجموعه‌ها به مشکل برخوردید، مشکلتان به راحتی حل شود.

$$\mathrm{A_i} = [-\mathrm{i}, \frac{۹-\mathrm{i}}{۲}]$$

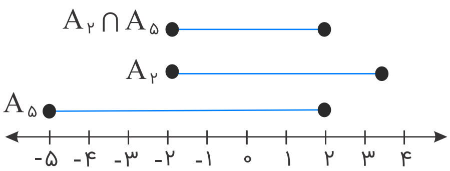
$$\mathrm{A_۱} = [-۱, \frac{۹-۱}{۲}] = [-۱, ۴]$$

$$\mathrm{A_۲} = [-۲, \frac{۹-۲}{۲}] = [-۲, \frac{۷}{۲}]$$

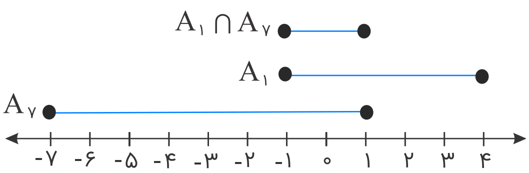
$$\mathrm{A_۵} = [-۵, \frac{۹-۵}{۲}] = [-۵, ۲]$$

$$\mathrm{A_۷} = [-۷, \frac{۹-۷}{۲}] = [-۷, ۱]$$

$$\mathrm{A_۲} \cap \mathrm{A_۵} = [-۲, \frac{۷}{۲}] \cap [-۵, ۲] = [-۲, ۲]$$



$$\mathrm{A_۱} \cap \mathrm{A_۷} = [-۱, ۴] \cap [-۷, ۱] = [-۱, ۱]$$



$$(\mathrm{A_۲} \cap \mathrm{A_۵}) - (\mathrm{A_۱} \cap \mathrm{A_۷}) = [-۲, ۲] - [-۱, ۱] = [-۲, -۱) \cup (۱, ۲]$$

۷ گزینه ۴

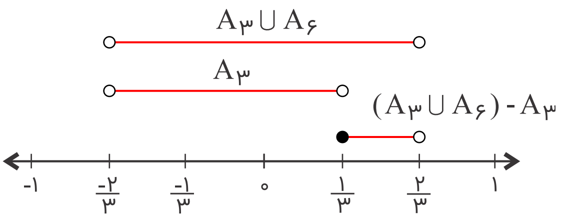
ابتدا با توجه به رابطهٔ $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$، مجموعه‌های A_3, A_6 را به صورت بازه‌ای تعیین می‌کنیم. (برای بدست آوردن A_3، $n = 3$ و برای به دست آوردن A_6، $n = 6$ در نظر گرفته می‌شود.) در ادامه برای تعیین بازهٔ $A_3 \cup A_6$، ابتدای بازه کوچک‌ترین عضو ابتدای A_3 و A_6 و انتهای آن بزرگ‌ترین عضو انتهای A_3 و A_6 در نظر گرفته می‌شود.

$$A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}) \Rightarrow \begin{cases} A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ A_6 = (-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

$$A_3 \cup A_6 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

در صورتی که تعیین اجتماع و اشتراک بازه‌ها برای شما دشوار بود می‌توانید از رسم نمودار هم به شکل زیر استفاده کنید:



۸ گزینه ۴

جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه‌به اینکه $a_n = a_1 + (n-1)d$، داریم $a_2 = a_1 + d$، $a_5 = a_1 + 4d$ و $a_{12} = a_1 + 11d$.

ازطرفی می‌دانیم که اگر x، y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آنگاه $y^2 = x.z$؛ پس باتوجه‌به فرض سؤال داریم:

$$a_5^2 = a_2.a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d) \times (a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d \ (*)$$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_2 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنبالهٔ هندسی، از تقسیم دوجملهٔ متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنبالهٔ هندسی موردنظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

۹

گزینه ۲

بررسی گزینهٔ اول: $\{۲\} \in B$ است، پس $A \in B$ یک نتیجه‌گیری درست است.

بررسی گزینهٔ دوم: مجموعهٔ C فقط دو عضو به‌صورت $\{۳, ۵, \{۲\}\}$ و ۲ دارد و $\{۲\} \notin C$، پس $A \in C$ یک نتیجه‌گیری نادرست است و همین گزینه جواب سؤال می‌شود.

بررسی گزینهٔ سوم: مجموعهٔ C عضوی به‌صورت $\{۳, ۵, \{۲\}\}$ دارد، پس $B \in C$ یک گزارهٔ درست است.

بررسی گزینهٔ چهارم: $۲ \in C$ است؛ بنابراین $\{۲\}$ یک زیرمجموعهٔ تک عضوی برای مجموعهٔ C محسوب می‌شود پس $A \subset C$ یک نتیجه‌گیری درست است.

۱۰

گزینه ۲

اگر قدرنسبت این تصاعد را q درنظر بگیریم، می‌توانیم سه جملهٔ متوالی آن را $\frac{a}{q}$، a و aq درنظر بگیریم. طبق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{q} + a + aq = ۱۹ \quad (*) \\ (\frac{a}{q})(a)(aq) = ۲۱۶ \Rightarrow a^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow a^۳ = ۶^۳ \Rightarrow a = ۶ \quad (**) \end{cases}$$

$$(*), (**) \Rightarrow \frac{۶}{q} + ۶ + ۶q = ۱۹ \xrightarrow{\times q} ۶ + ۶q + ۶q^۲ = ۱۹q$$

$$\Rightarrow ۶q^۲ - ۱۳q + ۶ = ۰ \Rightarrow q = \frac{-(-۱۳) \pm \sqrt{(-۱۳)^۲ - ۴(۶)(۶)}}{۲(۶)} = \frac{۱۳ \pm ۵}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{۳}{۲} \\ q = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

در حالتی که $q = \frac{۳}{۲}$، ازآنجاکه $a = ۶$، جمله‌ها به‌صورت $۶(\frac{۳}{۲}) = ۹$, ۶ و $\frac{۶}{\frac{۳}{۲}} = ۴$ درمی‌آیند.

درحالتی که $q = \frac{۲}{۳}$، ازآنجاکه $a = ۶$، جمله‌ها به‌صورت $۶(\frac{۲}{۳}) = ۴$,۶ و $\frac{۶}{\frac{۲}{۳}} = ۹$ درمی‌آیند.

پس در هر دو حالت، تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد برابر است با: $۹ - ۴ = ۵$.

۱۱

گزینه ۲

در حل تست به نکات زیر توجه کنید:

الف) با توجه به مجموعهٔ A_n، ابتدا مجموعه‌های $A_۱$، $A_۴$ و $A_۶$ را با اعضای آن مشخص می‌کنیم.

ب) نامعادلهٔ قدر مطلق $|x| \leq a$، به صورت $-a \leq x \leq a$ در نظر گرفته می‌شود.

ج) در تعیین اعضا حواستان باشد که هر دو نامعادلهٔ $۲^m \leq ۲n$ و $|m| \leq n$ باید هم زمان برقرار باشد.

$$A_۱ = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq ۱, ۲^m \leq ۲\}$$

$$|m| \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq m \leq ۱ \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-۱, ۰, ۱\}$$

$$۲^m \leq ۲ \Rightarrow m \leq ۱ \Rightarrow A_۱ = \{-۱, ۰, ۱\}$$

$$A_۴ = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq ۴, ۲^m \leq ۸\}$$

$$|m| \leq ۴ \Rightarrow -۴ \leq m \leq ۴ \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-۴, -۳, ..., ۳, ۴\}$$

$$۲^m \leq ۸ \Rightarrow ۲^m \leq ۲^۳ \Rightarrow m \leq ۳ \Rightarrow A_۱ = \{-۴, -۳, ..., ۲, ۳\}$$

$$A_۶ = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq ۶, ۲^m \leq ۱۲\}$$

$$|m| \leq ۶ \Rightarrow -۶ \leq m \leq ۶ \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-۶, -۵, ..., ۵, ۶\}$$

$$۲^m \leq ۱۲ \Rightarrow m \leq ۳ \Rightarrow A_۶ = \{-۶, -۵, ..., ۱, ۲, ۳\}$$

تعیین اعضای مجموعهٔ $(A_۶ - A_۴) \cup A_۱$:

$$A_۶ - A_۴ = \{-۶, -۵, ..., ۱, ۲, ۳\} - \{-۴, -۳, ..., ۱, ۲, ۳\} = \{-۶, -۵\}$$

$$(A_۶ - A_۴) \cup A_۱ = \{-۶, -۵\} \cup \{-۱, ۰, ۱\} = \{-۶, -۵, -۱, ۰, ۱\}$$

بنابراین مجموعهٔ $(A_۶ - A_۴) \cup A_۱$ دارای ۵ عضو است.

۱۲

گزینه ۳

راه‌حل اول:

تعداد دایره‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، بنابراین داریم:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد دایره ها	۵	۸	۱۱
		+۳	+۳

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_{۱۲} = ۵ + ۱۱ \times ۳ = ۳۸$$

راه‌حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = ۱ + ۲ \times ۲ \\ a_۲ = ۲ + ۲ \times ۳ \\ a_۳ = ۳ + ۲ \times ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = n + ۲ \times (n+۱) = ۳n + ۲$$

بنابراین با یک دنبالهٔ خطی با جملهٔ عمومی $a_n = ۳n + ۲$ مواجه هستیم. جملهٔ دوازدهم دنباله برابر است با:

$$a_{۱۲} = ۳(۱۲) + ۲ = ۳۸$$

۱۳ گزینه ۳

$$\underset{\text{دستهٔ اول}}{\overset{\downarrow}{۱}} \quad , \quad \underset{\text{دستهٔ دوم}}{\overset{\downarrow}{۲}} \quad , \quad \underset{\text{دستهٔ سوم}}{\overset{\downarrow}{۳}} \quad , \quad \dots$$

پس تعداد کل جملات ۲۹ دستهٔ اول برابر است با:

$$\text{تعداد کل جملات ۲۹ دستهٔ اول} = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۹$$
$$= \frac{۲۹\,(۲۹+۱)}{۲} = \frac{۲۹ \times ۳۰}{۲} = ۴۳۵$$

پس اولین جملهٔ دستهٔ سی اُم، برابر با جملهٔ ۴۳۶اُم دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد است. دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد، یک دنبالهٔ خطی با جملهٔ عمومی $a_n = ۲n - ۱$ است، بنابراین:

$$\text{اولین جملهٔ دستهٔ ۳۰ام} = a_{۴۳۶} = ۲ \times ۴۳۶ - ۱ = ۸۷۱ = b_۱$$

دستهٔ سی‌اُم، ۳۰ جمله دارد، بنابراین جملهٔ آخر این دسته برابر است با:

$$b_{۳۰} = b_۱ + ۲۹d \xrightarrow[d=۲]{b_۱=۸۷۱} ۸۷۱ + ۲۹ \times ۲ = ۹۲۹$$

(توجه کنید که جملات هر دسته، یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت ۲ هستند)، بنابراین:

$$b_۱ + b_{۳۰} = ۸۷۱ + ۹۲۹ = ۱۸۰۰$$

۱۴ گزینه ۱

$$S = \frac{۱}{۲ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ۸} + \frac{۱}{۸ \times ۱۱} + \dots + \frac{۱}{۱۷ \times ۲۰}$$
$$۳S = \frac{۵-۲}{۲ \times ۵} + \frac{۸-۵}{۵ \times ۸} + \frac{۱۱-۸}{۸ \times ۱۱} + \dots + \frac{۲۰-۱۷}{۱۷ \times ۲۰}$$
$$۳S = (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵}) + (\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۸}) + (\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۱}) + \dots + (\frac{۱}{۱۷} - \frac{۱}{۲۰})$$

دقت کنید که دومین عدد هر پرانتز با اولین عدد پرانتز بعدی ساده می‌شوند:

$$۳S = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲۰} = \frac{۹}{۲۰} \Rightarrow S = \frac{۳}{۲۰} \Rightarrow S = \frac{۳}{۲۰} \times \frac{۵}{۵} = \frac{۱۵}{۱۰۰} = ۰/۱۵$$

۱۵ گزینه ۳

$$\begin{cases} ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \ldots & d_۱ = ۵ \\ ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, \ldots & d_۲ = ۳ \end{cases}$$

اولین جملهٔ مشترک دو دنباله ۱۷ است. همچنین قدرنسبت دنبالهٔ جملات مشترک ک.م.م $d_۱$ و $d_۲$ یعنی $۳ \times ۵ = ۱۵$ است؛ بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ جملات مشترک عبارت است از:

$$a_n = ۱۷ + ۱۵(n - ۱) = ۱۵n + ۲$$

حال باید تعداد nهایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $۱۰۰ \leq a_n \leq ۹۹۹$:

$$۱۰۰ \leq ۱۵n + ۲ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۹۸ \leq ۱۵n \leq ۹۹۷$$
$$\Rightarrow ۶/\ldots \leq n \leq ۶۶/\ldots \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{۷, ۸, \ldots, ۶۶\}$$

بنابراین تعداد جملات موردنظر برابر است با:

$$۶۶ - ۷ + ۱ = ۶۰$$

۱۶ گزینه ۲

جمله‌های مشترک تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت دو دنباله است.

$$۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \ldots \Rightarrow d_۱ = ۷$$
$$۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \ldots \Rightarrow d_۲ = ۵$$

اولین جملهٔ مشترک بین دو دنباله، ۳۷ است.

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \xrightarrow{d=[۷,۵]=۳۵} a_n = ۳۷ + ۳۵(n - ۱) = ۳۵n + ۲$$
$$۱۰۰ \leq a_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰$$
$$\Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ \Rightarrow ۲/\ldots \leq n < ۸/\ldots$$
$$۳ \leq n \leq ۸ \Rightarrow n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

پس ۶ عدد با این شرایط داریم.

۱۷ گزینه ۲

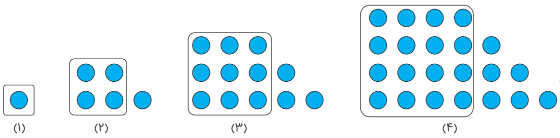
در دستهٔ اول ۱، دستهٔ دوم ۲ و... و در دستهٔ بیستم، ۲۰ عدد داریم پس در کل به‌اندازهٔ $۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۲۰ = \frac{۲۰}{۲}(۱ + ۲۰) = ۲۱۰$ عدد فرد داریم؛ بنابراین جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم، ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی $(۲n - ۱)$ است.

$$۲ \times ۲۱۰ - ۱ = ۴۱۹$$

۱۸ گزینه ۱

الگوی داده‌شده را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

طبق شکل داریم:



$$a_۱ = ۱^۲ + ۰ \quad , \quad a_۲ = ۲^۲ + (۰+۱) \quad , \quad a_۳ = ۳^۲ + (۰+۱+۲) \quad , \quad \dots$$
$$\Rightarrow a_n = n^۲ + (۰+۱+۲+\dots+(n-۱))$$

بنابراین در شکل نهم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$۹^۲ + (۰+۱+۲+۳+\dots+۸) = ۸۱ + \frac{۸ \times ۹}{۲} = ۸۱ + ۳۶ = ۱۱۷$$

۱ مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x=۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱)=۰$ و $f'(۱)=-۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲ کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\frac{۲}{x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳ اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) -۶
۲) -۳
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x^۲+۳x}$ در نقطهٔ $x=۱$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۶ خط مماس بر نمودار $y = \frac{۱}{\sin x} , ۰ < x < \pi$، در نقطه‌ای به طول $x_۰$ واقع بر آن، موازی خط به معادلهٔ $۳y - ۲x = ۵$ است، $x_۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۷ مشتق تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ به‌صورت $\lim_{h\to ۰} \frac{۲(۲+h)^۲ + k(۲+h) - ۲k - ۸}{h} = ۱۲$ بیان شده است، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۸ به ازای کدام مقدار a خط به معادلهٔ $y = -۳x + ۲$، بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲ + a}{x - ۲}$، مماس است؟

۱) ۱- ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۶x} & ; ۰ \le x < ۴ \\ \left[\frac{x}{۴}\right] (x^۲ - ۹x) & ; ۴ \le x < ۸ \end{cases}$، مقدار $f'(۲) - f'(۵)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{a}{x} + bx^۲$ در نقطهٔ $(۱, -۲)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$، مینیمم ۲) $-\frac{۴}{۳}$، ماکزیمم

۳) $\frac{۴}{۳}$، مینیمم ۴) $\frac{۴}{۳}$، ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x}{۱ - x^۲}$ بر کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۲, ۰)$ ۲) $(-\infty, -۲)$

۳) $(۰, ۲)$ ۴) $(-۲, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۲ خط گذرا از دو نقطهٔ $(۱, ۲)$ و $(-۱, ۳)$، بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ مماس است. حد عبارت $\dfrac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x}$ وقتی $x \to ۳$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\sqrt{\dfrac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$، کدام است؟

۱) -۲۱
۲) -۱۸
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴ اگر $\dfrac{۳}{۲} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt{ax+b} - ۲}{x^۲ - ۱}$ باشد، b کدام است؟

۱) -۸
۲) -۶
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{ax^n + ۱۵}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}$، اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -۱$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ کدام است؟

۱) -۶
۲) -۴
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۶ تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\dfrac{۳}{۲} = \lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۲+h) - ۹}{h}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۷ دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادلهٔ $y = (x-۲)^۲$ روی بازهٔ $[۰, ۲]$ است، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $\dfrac{۲۸}{۲۷}$
۲) $\dfrac{۱۰}{۹}$
۳) $\dfrac{۳۲}{۲۷}$
۴) $\dfrac{۱۱}{۹}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۸ اگر $f(x) = x^۲ - ۲x + ۴$ و $g(x) = x^۳ + x$، کمترین مقدار تابع gof کدام است؟

۱) ۲۱
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۹ مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطهٔ $x = -۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$
۲) -۵
۳) -۴
۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲۰ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^۳ - x|$ روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۱ اگر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ax + ۹}{۱ - x + \sqrt{x + ۱}} = ۳$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \to ۳$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۲ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲ + ۲x}}{x^۲ - x}\right)^۳$، در نقطهٔ $x = ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = ||x| - ۱|$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۴ به ازای کدام مقدار k، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + k$ در بازهٔ $[۱, ۳]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۵ خط $y = -۱$ بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۲x^۲ - x + a$ مماس است. a کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۸}$
۲) $-\frac{۷}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۸}$
۴) $\frac{۹}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۲۶ بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویهٔ قائمه و وتر آن ۶ باشد، کدام است؟

۱) ۳
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۴
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۲۷ بیشترین مقدار تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$ در بازهٔ $[-۲, ۲]$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱ + \sqrt{x}}{۵ - ۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x + ۶)^۲} & ; x > ۱ \\ ax + b & ; x \leq ۱ \end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳۰ به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y = ۵x + a$، بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x + ۶$ مماس است؟

۱) ‎-۳ ۲) ‎-۲

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۱ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳x^۲ + ۴x - ۲$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a + \frac{h}{۲}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به $a + h$ تغییر کند، کدام حالت است؟

۱) h ۲) $۲h$

۳) $۳h$ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۳ مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = x - \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲}$، بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{-۱}{۳}$

۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - [x]}{x^۳ - x - ۶} & ; x \neq ۲ \\ a & ; x = ۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در بازهٔ $[۲, ۳)$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۵ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{۱}{۳}x^۳ + ۲x^۲ - x$، با بیشترین شیب ممکن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$

۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۶ کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۱ - \cos^۲ x - \sin x$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{-۱}{۲}$
۳) $\frac{-۱}{۴}$
۴) صفر

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

۳۷ اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $۵\sqrt{۲}$ باشند، بیشترین مقدار $۳x + ۴y$ کدام است؟

۱) $۲۵\sqrt{۲}$
۲) ۳۶
۳) $۲۸\sqrt{۲}$
۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۸ ماکزیمم تابع با ضابطهٔ $f(x) = -|x| \cos x$، در بازهٔ $[-۱, ۱]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\cos ۱$
۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۳۹ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۲\sqrt{x}}{x} & ; x \geq ۱ \\ ax^۲ + bx & ; x < ۱ \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۴۰ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{۱ + x^۲}}{x}$ بر روی دامنهٔ خود، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۱ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{۵x - ۴}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x = ۴$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۴۲ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ;x<۰\end{cases}$، مشتق اول و دوم تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ چگونه است؟

۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم دارد.

۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.

۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد.

۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۴۳ اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\dfrac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳}$

۲) $\dfrac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۴۴ کدام بیان برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\left|x^۲-۳\right|$ بر دامنهٔ $[-۱,۱]$ نادرست است؟

۱) مینیمم مطلق دارد.

۲) ماکزیمم مطلق دارد.

۳) دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۴۵ اگر $f'(x)=\dfrac{۱}{x}$، مشتق تابع $f(x+\sqrt{۱+x^۲})$ کدام است؟

۱) $-x+\sqrt{۱+x^۲}$

۲) $x-\sqrt{۱+x^۲}$

۳) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$

۴) $\sqrt{۱+x^۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۶ اگر $f(x)=\dfrac{x^۲}{|۱-x|}[x]$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$

۲) $\dfrac{۱}{۲}$

۳) $\dfrac{۳}{۴}$

۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۷ اگر تابع f در $x_۰$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=-۲$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(x_۰)-f(x_۰-h)}{h}$ کدام است؟

۱) $۲-f(x_۰)$

۲) $۲+f(x_۰)$

۳) ۲

۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۴۸ در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازهٔ $[۲/۲۵,\ ۲/۵۶]$، از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$
۲) $\frac{۲}{۹۳}$
۳) $\frac{۱}{۶۲}$
۴) $\frac{۱}{۳۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۹ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۶}$ نسبت به متغیر x روی بازهٔ $[۰,۳]$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x=\sqrt{۲}$، چقدر کمتر است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۱۸}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۰ اگر $f(x)=x^۳-[۲x^۲]x$ باشد، مقدار $f'_-(\sqrt{۲})$ و $f'_+(\sqrt{۲})$، از راست به چپ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $f'_-(\sqrt{۲})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{۲})$ وجود ندارد.
۲) $f'_-(\sqrt{۲})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{۲})=۲$
۳) $f'_-(\sqrt{۲})=۳$ و $f'_+(\sqrt{۲})$ وجود ندارد.
۴) $f'_-(\sqrt{۲})=۳$ و $f'_+(\sqrt{۲})=۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۵۱ خط به معادلهٔ $y=۳x-۲$ در نقطهٔ $x=۲$، بر منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۴f(x)}{x-۲}$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۵۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x=۴$ تا $x=۶/۲۵$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=۴$، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$
۲) $\frac{۱}{۱۸}$
۳) $\frac{۵}{۷۲}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۳ اگر $\frac{۳}{۲} = \lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}$ و $f(x)=\sqrt{۵-x^{۲}}$، آنگاه $(gof)'(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۴ نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۸

۵۵ اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & ;x\leq -۲\\ -\frac{۱}{۲}x^{۲}+bx+c\ ; & x>-۲\end{cases}$، در $x=-۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x^{۲}-۱|$ با دامنهٔ $[-۲,۲]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۸ مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۵۹ اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|\,(x+a)$ در نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) آن عمود برهم باشند، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-1\}$
۲) $\{1\}$
۳) $\{-1, 1\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۶۰ نقطهٔ $M\,(x, y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطهٔ $x = 7$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{16}$
۲) $\frac{15}{8}$
۳) $\frac{3}{7}$
۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۶۱ تابع با ضابطهٔ $y = x\sqrt{x^2}$ ازنظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.
۲) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.
۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر
۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۶۲ اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{x}$
۲) $\frac{3}{x^2}$
۳) $\frac{1}{3x}$
۴) $\frac{x-3}{x^2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۶۳ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y = (x-1)^2\,\sqrt[3]{x^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}(x-۱)\,|x-۱| & ; x\neq ۱\\ a & ; x=۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است. a کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۶۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{x}+|x-۱|$، مقدار $f'_{+}(۱)+۳f'_{-}(۱)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۶۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[۳]{x+a}-b}{x} & ; x\neq ۰\\ \dfrac{۱}{۱۲} & ; x=۰\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پیوسته است. b کدام است؟

۱) ± ۱
۲) ± ۲
۳) ± ۳
۴) ± ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۱}{۲}x^{۲}-\dfrac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۴۵
۴) ۰/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۶۸ مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\{۰,\dfrac{۴}{۵},۲\}$
۲) $\{۰,\dfrac{۲}{۳},۲\}$
۳) $\{۰,۱\}$
۴) $\{\dfrac{۲}{۳},۲\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۶۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x-۱} & ; x\geq ۲\\ -x^{۲}+ax+b & ; x<۲\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{x}-۵ & ;x\geq ۱\\ x^۲+ax+b & ;x<۱\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد. b کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۱ مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^۲-۲۸).\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

۱) $\{-۲,۲\}$
۲) $\{-\sqrt{۷},\sqrt{۷}\}$
۳) $\{-۲,۰,۲\}$
۴) $\{-۷,۰,۱\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۷۲ اگر $a>۰$ و ثابت و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}$ کدام است؟

۱) $۴a$
۲) $۳a$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷۳ تابع f با ضابطهٔ زیر، در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}۱ & ;\quad x<۰\\ x+۱ & ;۰\leq x<۱\\ ۲x+۲ & ;۱\leq x<۲\\ x^۲+۲ & ;\quad x\geq ۲\end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر
۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۷۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴۸}$
۲) $\frac{۵}{۲۴}$
۳) $\frac{۷}{۲۴}$
۴) $\frac{۷}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۵ با شرط $x \leq ۱$; $f(x) = x^۳ - ۳x$ در تابع با ضابطهٔ $g(x) = x^۳ + x$، بیشترین مقدار gof کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۷۶ اگر $f(x) = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x) = ۴x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) مشتق ندارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷۷ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < ۱ \\ x^۲ - x & ; x \geq ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) هر مقدار a
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۷۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} |x^۲ - ۲x| & ; x < ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ + ax + b & ; x \geq ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۴x - ۵}{x + ۱}$ و دامنهٔ $[۰, ۸]$، خط مماس بر نمودار آن، موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲-
۲) ۱/۵-
۳) ۱-
۴) ۰/۵-

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۱ به ازای کدام مقادیر a، تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ + \frac{a}{x}$، دارای ماکزیمم نسبی است؟

۱) $|a| > ۲$
۲) $a < ۰$
۳) $a > ۰$
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۸۲ اگر $f(x) = (x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}$، حاصل $\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(-۱+\Delta x) - f(-۱)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۸۳ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^۲ + ax + b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، در نقطهٔ $x = ۱$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۰}$
۲) $\frac{۱}{۲۴}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۵ بیشترین مساحت از مستطیل‌هایی که دو رأس آن بر روی نیم‌بیضی به معادلهٔ $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور xها باشند، کدام است؟

۱) ۶
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) ۸

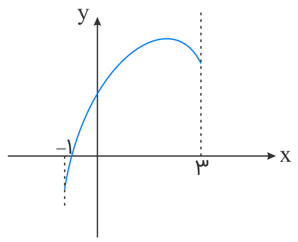
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۸۶ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۱۲ - x}$ در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) $۸\sqrt{۳}$
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^۲ + ax + b}$ است. مقدار ماکزیمم مطلق تابع کدام است؟



۱) $۱ + \sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۱ + ۲\sqrt{۲}$

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{۲x + ۱} + \frac{۱}{x + ۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰, ۴]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{۳}{۲}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳　　۲) ۰/۰۴

۳) ۰/۰۵　　۴) ۰/۰۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۹ خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۵$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + ۱$ مماس است، a کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳

۳) ۴　　۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹۰ کمترین مقدار تابع $y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲$، کدام است؟

۱) -۳۶　　۲) -۳۲

۳) -۲۴　　۴) -۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۹۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۸}{ax + b} & ; x > ۲ \\ -x^۳ + ۶x & ; x \leq ۲ \end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۲ حد عبارت $\dfrac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$، وقتی $x \to ۲$، کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۳}$
۲) $-\dfrac{۱}{۴}$
۳) $-\dfrac{۱}{۶}$
۴) $-\dfrac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۳ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ $A(۱,۵)$ و $B(۷,-۲)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۹۴ اگر $f(x)=۱-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۹۵ مشتق چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۹۶ از تساوی $y=\sqrt[۳]{x}$، مقدار $y''y^۵$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{-۴}{۹}x$
۲) $\dfrac{-۱}{۳}x$
۳) $\dfrac{-۲}{۹}$
۴) $\dfrac{-۲}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۹۷ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+۴ & ;x\geq -۲ \\ x^۳-x & ;x<-۲\end{cases}$، همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۳
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تابع از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۳$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۹۹ اگر $f(x) = |x - ۲| + \sqrt{۲x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x) - f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰۰ کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$
۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$
۳) $h(x) = ۲x + \frac{۱}{x}$
۴) $p(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۰۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x + ۲)\sqrt{۴x + ۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰, ۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۱۰
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲۰
۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۰۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x| - ۲x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰۳ در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{۳}$، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) ۱
۳) $\sqrt[۳]{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۰۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ a می‌باشد. a کدام است؟

۱) ۱۱/۷۵
۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰۵ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^{۲}}{x-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۰۶ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۱$، بر خط به معادلهٔ $x - ۳y = ۲$ عمود است. این خط مماس، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۱, ۳)$
۲) $(۱, ۴)$
۳) $(۲, -۶)$
۴) $(۲, -۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۰۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۳} + ax^{۲} - ۸x$، در بازهٔ $(۱, ۴)$ قرار می‌گیرد؟

۱) $-۳ < a < ۱/۵$
۲) $-۳ < a < ۲/۵$
۳) $-۵ < a < ۱/۵$
۴) $-۵ < a < ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x - \frac{۱}{x} & ; \ x \geq ۱ \\ x^{۲} + ax + b & ; \ x < ۱ \end{cases}$ مقدار $f'(۱)$ موجود است، $f(۱ - \sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $۳ - \sqrt{۲}$
۲) $۲ - \sqrt{۲}$
۳) $۲ - ۲\sqrt{۲}$
۴) $۳ - ۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = (۲x + ۱)^{-\frac{۱}{۲}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x = ۴$ تا $x = ۱۲$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x = ۴$، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۷}{۵۴۰}$
۲) $\frac{۱۱}{۵۴۰}$
۳) $\frac{۷}{۲۷۰}$
۴) $\frac{۱۱}{۲۷۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۱۰ اگر $\frac{۱}{۲} = \lim\limits_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۱۱ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳} & ; x > ۳ \\ ax - ۳a - \frac{۳}{۸} & ; x \leq ۳ \end{cases}$، در نقطهٔ $x = ۳$ پیوسته است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) هیچ مقدار a
۴) a هر چه باشد

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۱۲ فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{۴x - x^{۲}}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱۳ اگر $f(x) = \sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۰/۲
۲) -۰/۱
۳) ۰/۱
۴) ۰/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۱۴ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-۱)|x^{۲} + x - ۲|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۶
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۱۵ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x^{۲} + ۱۴۴}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x = ۵$ تا $x = ۹$ کدام است؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۱۶ اگر $g(\circ) = ۱$ و $f'(\circ) = g(\circ)$ و $f(x) = x + ۱ + (g(x))^۵$، مقدار $f''(\circ)$ برابر کدام است؟

۱) $۴g''(\circ)$

۲) $۵g''(\circ)$

۳) $۴g''(\circ) + ۲\circ$

۴) $۵g''(\circ) + ۲\circ$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱۷ اگر $g(x) = \sqrt{۲x}$ و $f(x) = (x^۲ - x)$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to \circ} \frac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x) - f(۲)g(۲)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۸ کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴, \circ)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۲x + ۹}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۱۹ اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = -\frac{۱}{۳}$، مشتق $f\left(\sqrt{|x| + ۳}\right)$ در نقطهٔ $x = -۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $-\frac{۱}{۶}$

۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

۱۲۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left[\frac{۱}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

۱) $[\circ, ۱]$

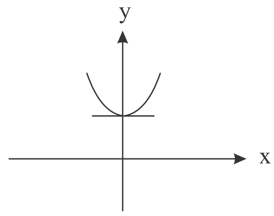
۲) $(-۱, \circ)$

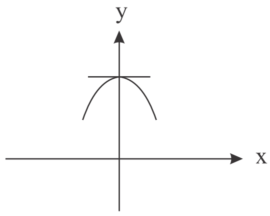
۳) $[۱, +\infty)$

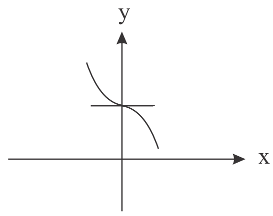
۴) $(-\infty, -۱)$

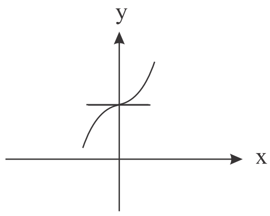
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۲۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}+۱}$ در نزدیکی نقطهٔ $x=۰$ چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۲۲ تابع f در نقطهٔ c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

۱) مثبت

۲) منفی

۳) نامنفی

۴) نامثبت

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۲۳ اگر $۱=f'(-۱)=-g'(۱)=-g(۱)=۲h'(۰)=h(۰)$، مقدار مشتق تابع $fogoh$ در صفر کدام است؟

۱) -۲

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۲۴ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟

۱) ۴

۲) $۴/۵$

۳) ۵

۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲۵ برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}-۱۲x+۸$ بر بازهٔ $[-۳,۱]$ کدام است؟

۱) $[-۸,۱۷]$

۲) $[-۸,۲۴]$

۳) $[-۳,۱۷]$

۴) $[-۳,۲۴]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۲۶ مجموعهٔ طول نقاط ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\left|x^۲ - ۳\right|$ کدام است؟

۱) $\{-\sqrt{۳}\}$

۲) $\{\sqrt{۳}\}$

۳) $\{-\sqrt{۳}, ۱\}$

۴) $\{\sqrt{۳}, ۱\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۲۷ در تابع با ضابطهٔ $f\,(x) = x\,|x - ۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲۸ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(۴ - x^۲)$ است. اگر $f'(۱) = -۵$ و $f''(۱) = -۱$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{۳})$، کدام است؟

۱) ‎-۳

۲) ‎-۲

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۲۹ کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$

۲) $-\frac{۱}{۶}$

۳) $-\frac{۱}{۳}$

۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۳۰ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}$ در بازهٔ $[۵\,,\,۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $۴ + \sqrt{۲}$

۲) $۳ + ۲\sqrt{۲}$

۳) $۲ + \frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

۴) $۲ + \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳۱ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^۳ - x^۲$ در نقطهٔ $x = ۱$ واقع بر آن، منحنی را در نقطهٔ دیگر (A) قطع می‌کند. عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) ‎-۳

۲) ‎-۲

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۳۲ دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$　　۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۳۳ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۳x + |x|$ و $g(x) = \frac{۳}{۴}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$　　۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۳۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ;\ x \text{ گویا} \\ ۰ & ;\ x \text{ گنگ} \end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲

۳) بی‌شمار　　۴) هیچ نقطه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۳۵ ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $y = -x + \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) فاقد ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۳۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(\frac{۱}{۴}+h) - f(\frac{۱}{۴})}{h}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳۷ بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟

۱) ۹۵۸　　۲) ۹۶۸

۳) ۹۷۸　　۴) ۹۸۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۳۸ تابع f روی بازهٔ (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

۱) هر نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

۲) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، نقطهٔ بحرانی است.

۳) در هر نقطهٔ بحرانی، مشتق تابع صفر است.

۴) در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۳۹ مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۳}x^{۳} - x^{۲} - ۱۵x$، در بازهٔ $[-۴ \, , \, ۳]$، کدام است؟

۱) -۱۸ و ۲۴   ۲) -۴۵ و ۲۷

۳) -۳۶ و ۲۷   ۴) -۲۷ و ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x}{x-۱}$، آهنگ متوسط از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۵$، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \alpha$ است. α کدام است؟

۱) ۲/۵   ۲) $۱ + \sqrt{۳}$

۳) ۳   ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۴۱ دو نقطهٔ $A(۲, ۳)$ و $B(۴, ۷)$ و خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطهٔ M بر روی خط مفروض؛ با کدام طول انتخاب شود به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱   ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۴۲ تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است. کدام بیان نادرست است؟

۱) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.

۲) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد، آنگاه c نقطهٔ بحرانی است.

۳) اگر c نقطهٔ بحرانی باشد، آنگاه c نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

۴) اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق باشد، آنگاه c نقطهٔ بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۴۳ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطهٔ $(-۱,۰)$ می‌گذرد. α کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۴۴ اگر تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $x^۲f(x)$ در $x=-۲$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۴۵ اگر $f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۴۶ بزرگ‌ترین حجم مخروط، از بین مخروط‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر واحد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۸۱}$
۲) $\frac{\pi}{۱۲}$
۳) $\frac{۳\pi}{۳۲}$
۴) $\frac{۴\pi}{۲۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۱۴۷ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، حاصل $f'(x)\cdot g'(f(x))$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) x
۴) $\frac{۱}{۲}x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۴۸ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۸,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=x\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۱}$
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۵\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۴۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \frac{1}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2 + h$ تغییر کند برابر $\frac{8}{9}$ است. h کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵۰ به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+2)y = mx$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{1+x^2}$ است؟

۱) $m > -1$
۲) $m < -1$
۳) $m > 1$
۴) $m < 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۵۱ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{(x-1).\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطهٔ $x = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $\frac{3}{40}$
۴) $\frac{5}{16}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۵۲ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3$، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0/1$، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = 3$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۳۱
۲) ۰/۴۲
۳) ۰/۶۲
۴) ۰/۹۱

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۵۴ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = 2^x$، آنگاه تابع gof از نظر اکسترمم <u>نسبی</u> کدام نوع را دارد؟

۱) دارای ماکسیمم - دارای مینیمم
۲) دارای ماکسیمم - فاقد مینیمم
۳) فاقد ماکسیمم - دارای مینیمم
۴) فاقد ماکسیمم - فاقد مینیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۵۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، در نقطهٔ $x=۱$ با نمو متغیر ۰/۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۴۲}$
۲) $\frac{۱}{۲۱}$
۳) $\frac{۳}{۴۲}$
۴) $\frac{۲}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۵۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[x]$ روی بازهٔ $(۰,۳)$ در چند نقطه، مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۵۷ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲-۲x}{x+a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

۱) $a>۰$ یا $a<-۲$
۲) $a>۲$ یا $a<۰$
۳) $-۲<a<۰$
۴) $۰<a<۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۵۸ مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۴}{۴}-\frac{x^۳}{۳}-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۸}{۳}$
۴) $-\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵۹ اگر $g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲)=۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|\cdot[x]$، مقدار $f'_-(۰)-f'_+(۰)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۶۱ خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۵$ در نقطهٔ $x = ۲$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{f(x) - f(۱)}{۲x - ۲} = \dfrac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۶۲ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \dfrac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x) = ax^۲ + bx$، در نقطهٔ $x = ۲$، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{|x^۳ - ۲x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۶۴ مشتق عبارت $\left(\dfrac{۱۶}{x} - \sqrt[۳]{x^۲}\right)^۲$ به ازای $x = -۸$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{-۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۶۵ ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{۱}{x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۶}$ ۲) $\dfrac{۱}{۵}$

۳) $\dfrac{۱}{۳}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۶۶ مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۲x - ۳}{x^۲ + ۱}$، کدام است؟

۱) $-۱ + \sqrt{۵}$ ۲) $۱ + \sqrt{۵}$

۳) $-۱ + \sqrt{۳}$ ۴) $۱ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اوّل محورهای مختصات، مماس است؟

۱) ۴-

۲) ۴ و ۱۲-

۳) ۴- و ۱۲

۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۶۸ مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[۳]{\left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^۲}$ در نقطهٔ $x = -۲$، کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) مینیمم نسبی

۲) ماکسیمم نسبی

۳) مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی

۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۷۰ اگر تابع f در $x = ۴$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x \to ۴} \frac{f(x) + ۷}{x - ۴} = \frac{-۳}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(۲x)}{x}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۱۷۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{۱ + |x|}$ در نقطهٔ $x = \alpha$ مشتق ندارد، مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

۱) -۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) تعریف‌نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷۲ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax^۳ + bx & ; \ x < ۱ \\ ۲\sqrt{۴x - ۳} & ; \ x \geq ۱ \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۷۳ اگر c طول نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f روی دامنهٔ آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطهٔ c، کدام وضعیت را دارد؟

۱) پیوسته
۲) مشتق‌پذیر
۳) خط مماس افقی
۴) اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۷۴ برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{۲ - x}{x}}$ کدام است؟

۱) $(۰, ۱]$
۲) $[۰, ۲]$
۳) $[۱, ۲]$
۴) $(۱, ۳)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۷۵ مشتق تابع $f(x) = x\sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}}$ در نقطهٔ $x = -۳$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷۶ بیشترین مساحت زمینی مستطیل‌شکل که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است، طول طناب چند متر است؟

۱) ۶۸
۲) ۷۰
۳) ۷۱
۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۱

گزینه ۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

گام دوم

باتوجه‌به مشخص بودن مقادیر $y'(۱)$، $f(۱)$ و $f'(۱)$، مقدار $g(۱)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(۱)$ ذکرنشده صفر بودن $f(۱)$ است).

$$y'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^{۲}(۱)} \Rightarrow ۳=\frac{(-۴)g(۱)-۰}{g^{۲}(۱)} \Rightarrow ۳=\frac{-۴g(۱)}{g^{۲}(۱)} \Rightarrow ۳=\frac{-۴}{g(۱)} \Rightarrow g(۱)=-\frac{۴}{۳}$$

۲

گزینه ۳

نقطهٔ $A(\alpha,\frac{۲}{\alpha^{۲}})$ را بر روی منحنی $y=\frac{۲}{x^{۲}}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ A برابر است با:

$$OA=\sqrt{(\alpha-۰)^{۲}+(\frac{۲}{\alpha^{۲}}-۰)^{۲}}=\sqrt{\alpha^{۲}+\frac{۴}{\alpha^{۴}}}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ OA، ابتدا معادلهٔ $(OA)'_{\alpha}=۰$ را حل می‌کنیم:

$$(OA)'_{\alpha}=\frac{۲\alpha-\frac{۱۶\alpha^{۳}}{\alpha^{۸}}}{۲\sqrt{\alpha^{۲}+\frac{۴}{\alpha^{۴}}}}$$

$$(OA)'_{\alpha}=۰ \Rightarrow ۲\alpha-\frac{۱۶}{\alpha^{۵}}=۰ \Rightarrow ۲\alpha=\frac{۱۶}{\alpha^{۵}} \Rightarrow \alpha^{۶}=۸ \Rightarrow \alpha=\sqrt{۲}$$

بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از منحنی $y=\frac{۲}{x^{۲}}$، به ازای $\alpha=\sqrt{۲}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{min}=\sqrt{(\sqrt{۲})^{۲}+\frac{۴}{(\sqrt{۲})^{۴}}}=\sqrt{۲+\frac{۴}{۴}}=\sqrt{۲+۱}=\sqrt{۳}$$

۳ گزینه ۱

گام اول

طبق تعریف مشتق، حد خواسته‌شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-۱$ است یعنی:

$$f'(-۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$$

گام دوم

به ازای $x=-۱$ عبارت $(x^۲-x-۲)$ برابر صفر می‌شود و تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ نیز در $x=-۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبهٔ مشتق در نقطهٔ $x=-۱$، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $(x^۲-x-۲)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و درنهایت مقدار آن را به ازای $x=-۱$ به دست آوریم:

$$x=-۱\ :\quad f'(x)=(۲x-۱)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}\Rightarrow f'(-۱)=(-۲-۱)\sqrt[۳]{(-۱)^۲-۷(-۱)}=(-۳)\sqrt[۳]{۸}=-۳\times ۲=-۶$$

۴ گزینه ۲

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x=۰$، در معادلهٔ آن به دست می‌آید.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y=\sqrt{x^۲+۳x}\Rightarrow y'=\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}$$
$$y'(۱)=\frac{۲+۳}{۲\sqrt{۱+۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۵}{۲\times ۲}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{۵}{۴}$$

$$x=۱\Rightarrow y=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow y(۱)=۲$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱,۲)$ برابر است با:

$$y-y(۱)=y'(۱)(x-۱)\Rightarrow y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱)$$
$$\Rightarrow y=\frac{۵}{۴}x-\frac{۵}{۴}+۲\Rightarrow y=\frac{۵}{۴}x+\frac{۳}{۴}$$

با جایگذاری $x=۰$ در معادلهٔ خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=۰} y=\frac{۵}{۴}(۰)+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۵ | گزینه ۳

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

ب) نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوییم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادلهٔ $y' = 0$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y'' = 4x^3 + 4x^2 - 8x \xrightarrow{y''=0} 4x(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

بنابراین طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع برابر صفر است.

۶

گزینه ۲

گام اول

الف) شیب دو خط موازی باهم برابر است.

ب) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

ابتدا با استاندارد کردن معادلهٔ خط داده‌شده، شیب آن را تعیین می‌کنیم:

$$۳y - ۲x = ۵ \Rightarrow ۳y = ۲x + ۵ \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x + \frac{۵}{۳} \Rightarrow m = \frac{۲}{۳}$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x_\circ$ برابر شیب خط داده شده است، بنابراین:

$$y = \frac{۱}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{\circ - \cos x}{\sin^۲ x} = -\frac{\cos x}{\sin^۲ x}$$

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } x_\circ = y'(x_\circ) = -\frac{\cos x_\circ}{\sin^۲ x_\circ} = \frac{۲}{۳}$$

$x_\circ$ را به‌گونه‌ای پیدا می‌کنیم که معادلهٔ $-\frac{\cos x_\circ}{\sin^۲ x_\circ} = \frac{۲}{۳}$ برقرار باشد. با جایگذاری گزینه‌ها، فقط به ازای $x_\circ = \frac{۲\pi}{۳}$ معادله برقرار است. روش دیگر برای یافتن $x_\circ$، حل معادلهٔ مثلثاتی است. داریم:

$$\frac{-\cos x_\circ}{\sin^۲ x_\circ} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow -\frac{\cos x_\circ}{۱ - \cos^۲ x_\circ} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x_\circ = -۳\cos x_\circ \Rightarrow ۲\cos^۲ x_\circ - ۳\cos x_\circ - ۲ = \circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x_\circ = \frac{۳ + ۵}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲ \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x_\circ = \frac{۳ - ۵}{۴} = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x_\circ = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

از بین گزینه‌ها $x_\circ = \frac{۲\pi}{۳}$ جواب معادله است.

۷ گزینه ۳

روش اول:

حد داده‌شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=۱۲ \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۲\left(۴+۴h+h^۲\right)+۲k+kh-۲k-۸}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۸+۸h+۲h^۲+kh-۸}{h}=۱۲ \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۲h^۲+۸h+kh}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}۲h+۸+k=۱۲ \Rightarrow ۸+k=۱۲ \Rightarrow k=۴$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

حد داده‌شده را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حل می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{h\to ۰}\frac{۲\times ۲(۱)(۲+h)+k}{۱}=\lim_{h\to ۰}\frac{۸+۴h+k}{۱}=۱۲ \Rightarrow ۸+k=۱۲ \Rightarrow k=۴$$

۸ گزینه ۲

درصورتی‌که خط بر منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی دو منحنی، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x^۲+a}{x-۲}\\ y&=-۳x+۲\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x^۲+a}{x-۲}=-۳x+۲$$

$$\Rightarrow x^۲+a=-۳x^۲+۸x-۴ \Rightarrow ۴x^۲-۸x+(a+۴)=۰$$

برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف، $\Delta=۰$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (-۸)^۲-۴(۴)(a+۴)=۰ \Rightarrow ۶۴-۱۶a-۶۴=۰ \Rightarrow a=۰$$

۹ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;۰\leq x<۴\\ \left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x) & ;۴\leq x<۸\end{cases}$$

$$۲<۴ \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}=\frac{x+۳}{\sqrt{x^۲+۶x}} \quad (I)$$

$$۵>۴ \Rightarrow f(x)=\left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x)\ ,\ \left[\frac{۵}{۴}\right]=۱ \Rightarrow f'(x)=۲x-۹ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

$$\xrightarrow{(II)} f'(۵)=۱$$

پس $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$ است.

۱۰ گزینه ۲

نقطهٔ $(۱, -۲)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^{۲} \xrightarrow{x=۱\ ,y=-۲} -۲ = a + b \quad (I)$$

می‌دانیم هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، یک نقطهٔ بحرانی تابع است بنابراین $x = ۱$ در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کند یعنی $f'(۱) = ۰$ است:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^{۲}} + ۲bx \xrightarrow{f'(۱)=۰} -a + ۲b = ۰ \Rightarrow a = ۲b \quad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ (II) در رابطهٔ (I) داریم:

$$a + b = -۲ \xrightarrow{a=۲b} ۲b + b = -۲ \Rightarrow ۳b = -۲ \Rightarrow b = \frac{-۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{a=۲b} a = -\frac{۴}{۳}$$

بنابراین:

$$f(x) = -\frac{۴}{۳x} - \frac{۲}{۳}x^{۲} \quad , \quad f'(x) = \frac{۴}{۳x^{۲}} - \frac{۴}{۳}x$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f'(x)$، نوع اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

x		۱	
$f'(x)$	+	۰	-
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

بنابراین به ازای $a = -\frac{۴}{۳}$، نقطهٔ $(۱, -۲)$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

۱۱ گزینه ۲

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

$$۱ - x^{۲} = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ تعریف شده است. داریم:

$$y = \frac{x}{۱ - x^{۲}} \Rightarrow y' = \frac{(۱ - x^{۲}) - (-۲x)x}{(۱ - x^{۲})^{۲}} = \frac{x^{۲} + ۱}{(۱ - x^{۲})^{۲}}$$

تابع y' به‌ازای تمام نقاط عضو دامنهٔ تعریف تابع y، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ‌کدام از دو مقدار $x = \pm ۱$ درون بازه نباشد، باتوجه‌به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازهٔ $(-\infty, -۲)$ صعودی است.

۱۲

گزینه ۲

گام اول

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطهٔ $x = 3$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(1, 2)$ و $B(-1, 3)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow f(3) = 1$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده‌شده را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x\to 3} -\frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} -(f(x) + 5)\frac{(f(x) - f(3))}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3} -(f(x) + 5)(f'(3)) = -(f(3) + 5)f'(3) = -6\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \frac{f^2(3) + 4f(3) - 5}{3 - 3} = \frac{1 + 4 - 5}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x\to 3} \frac{2f'(x)f(x) + 4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3) + 4f'(3)}{-1}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)(1) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1 - 2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

۱۳ گزینه ۱

حد داده‌شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x = ۲$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x = ۲$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = f'(۲)$$

$$f'(x) = ۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲ \times \left(\frac{-۷}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}(۲x-۳)^۲}\right) \Rightarrow f'(۲) = ۱۲ \times \frac{-۷}{۲ \times \sqrt{\frac{۲+۲}{۴-۳}}(۴-۳)^۲} = -۲۱$$

۱۴ گزینه ۱

هنگامی‌که $x = ۱$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ درنتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{۰}{۰}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیرصفر باشد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{ax+b} - ۲}{x^۲ - ۱} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt{a+b} - ۲ = ۰ \Rightarrow a + b = ۴$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{HOP} : \lim_{x\to ۱} \frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}}{۲x} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۴\sqrt{a+b}} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a+b=۴} a = ۱۲ \Rightarrow b = -۸$$

۱۵

گزینه ۱

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \to \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^{۲}+bx+c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{۴}|x+\frac{۱۵}{۸}| = -۲(x+\frac{۱۵}{۸})$$

(دقت کنید که چون $x \to -\infty$ بود، قرینهٔ عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، $n=۱$ است. داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x-(-۲(x+\frac{۱۵}{۸}))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x+۲x+\frac{۱۵}{۴}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۵x+\frac{۱۵}{۴}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{۵x} = \frac{a}{۵}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱ \Rightarrow \frac{a}{۵} = -۱ \Rightarrow a=-۵$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x\to۳$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to۳} f(x) = \lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}} = \frac{۰}{۰}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}} = \lim_{x\to۳} \frac{-۵}{۳-\frac{۸x+۱۵}{۲\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}}} = \frac{-۵}{۳-\frac{۲۴+۱۵}{۲\sqrt{۳۶+۴۵}}}$$

$$= \frac{-۵}{۳-\frac{۳۹}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۵}{۶}} = -۶ \Rightarrow \lim_{x\to۳} f(x) = -۶$$

روش دوم:

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\times\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵(x-۳)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{۹x^۲-۴x^۲-۱۵x}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵(x-۳)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{۵x(x-۳)}=\lim_{x\to ۳}-\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{x}=-\frac{۹+۹}{۳}=-\frac{۱۸}{۳}=-۶$$

۱۶ گزینه ۳

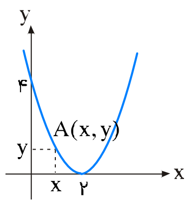
باتوجه‌به عبارت $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}=\frac{۳}{۲}$، $f(۲)=۹$ و $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$ می‌شود.

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f(x)}+x\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\Rightarrow g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+۲\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}$$

$$\Rightarrow g'(۲)=\sqrt{۹}+۲\times\frac{\frac{۳}{۲}}{۲\sqrt{۹}}=۳+\frac{۱}{۲}=۳/۵$$

۱۷ گزینه ۳

نقطهٔ $A(x,y)$ روی منحنی $y=(x-۲)^۲$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x,(x-۲)^۲)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S=xy\xrightarrow{y_A=(x-۲)^۲}S=x(x-۲)^۲\quad;\quad ۰<x<۲$$

$$S'_x=(x-۲)^۲+۲x(x-۲)=(x-۲)(x-۲+۲x)=(x-۲)(۳x-۲)$$

$$S'_x=۰\Rightarrow(x-۲)(۳x-۲)=۰\xrightarrow{x\neq ۲}۳x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x=\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آید:

$$S_{max}=x(x-۲)^۲=(\frac{۲}{۳})(\frac{۲}{۳}-۲)^۲=\frac{۲}{۳}(-\frac{۴}{۳})^۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۶}{۹}=\frac{۳۲}{۲۷}$$

۱۸ گزینه ۴

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنهٔ تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^{۲} - ۲x + ۴ \quad , \; D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x - ۲ \; , \; f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(۱) = ۱^{۲} - ۲(۱) + ۴ = ۱ - ۲ + ۴ = ۳ \Rightarrow f(x) \geq ۳$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$g(x) = x^{۳} + x \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = ۳x^{۲} + ۱ > ۰$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع gof به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq ۳ \Rightarrow g(f(x)) \geq g(۳)$$

$$\Rightarrow (gof)_{min} = g(۳) = ۳^{۳} + ۳ = ۲۷ + ۳ = ۳۰$$

۱۹ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \to (-۳)^+$ داریم:

$$x \to (-۳)^+ \Rightarrow x > -۳ \Rightarrow [x] = -۳, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-۳ + x)\sqrt[۳]{۹x} = (x - ۳)\sqrt[۳]{۹x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{۹x} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۸۱x^{۲}}}(x - ۳)$$

$$\Rightarrow f'_+(-۳) = \sqrt[۳]{-۲۷} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۷۲۹}}(-۶) = -۳ + \frac{۹}{۳ \times ۹}(-۶) = -۳ - ۲ = -۵$$

۲۰ گزینه ۴

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$، ریشه‌های سادهٔ دو معادلهٔ $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ خواهد بود.

$$f(x)=|x^3-x|\xrightarrow{f(x)=0}x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0, x=1, x=-1$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-1)(x^3-x)}{|x^3-x|}\xrightarrow{f'(x)=0}3x^2-1=0\Rightarrow 3x^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}, x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-1,2]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x)=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ دارای شش نقطهٔ بحرانی $x=0$، $x=1$، $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$، $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $x=-1$ و $x=2$ است

۲۱ گزینه ۳

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است. چون $x\to+\infty$، برای یافتن حاصل حد کافی است بزرگ‌ترین جملهٔ صورت را بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج تقسیم کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=3\Rightarrow a=-3$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{-1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{-3}{-1+\frac{1}{2\sqrt{4}}}=-\frac{3}{-\frac{3}{4}}=4$$

۲۲ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3 = \frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x)'(x^2-x)^3 - ((x^2-x)^3)'(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

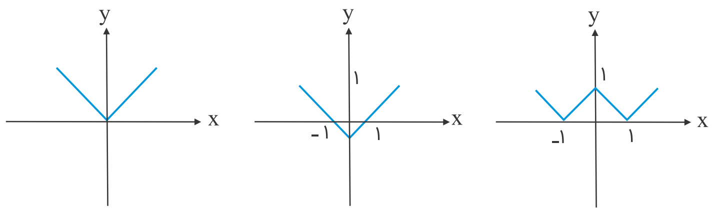
$$= \frac{(2x+2)(x^2-x)^3 - (3(2x-1)(x^2-x)^2)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2) = \frac{6\times\cancel{8} - 3\times 3\times 4\times \cancel{8}}{\cancel{64}_{\,8}} = -\frac{15}{4}$$

۲۳ گزینه ۴

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



y=|x| y=|x|-1 y=||x|-1|

باتوجه‌به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x=-1, x=0, x=1$، نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق نیز مشتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلقی دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x|-1|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$1)\ |x| \ :\quad x=0$$

$$2)\ ||x|-1| \ :\quad |x|-1=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

تابع در سه نقطهٔ $x=-1, x=0, x=1$ مشتق‌ناپذیر است.

۲۴ گزینه ۲

برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[1,3]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x)=0$ باشد یا $f'(x)$ تعریف‌نشده باشد. داریم:

$$f(x)=x^3-3x^2+k \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2$$

چون $0 \notin [1,3]$ پس تنها نقطهٔ $x=2$ قابل‌قبول است؛ همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی‌اند. بنابراین داریم:

$$f(1)=1-3+k=k-2$$

$$f(2)=8-12+k=k-4$$

$$f(3)=27-27+k=k$$

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر k و کمترین مقدار آن برابر $k-4$ است. این دو مقدار قرینهٔ یکدیگرند؛ پس:

$$k=-(k-4) \Rightarrow k=-k+4 \Rightarrow 2k=4 \Rightarrow k=2$$

۲۵ گزینه ۲

گام اول

خط بر یک منحنی مماس است درصورتی‌که معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط و منحنی، معادلهٔ تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

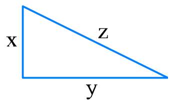
$$2x^2-x+a=-1 \Rightarrow 2x^2-x+a+1=0$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta=0$ شود:

$$\Delta=(-1)^2-4(2)(a+1)=0 \Rightarrow 1-8(a+1)=0$$
$$\Rightarrow 8(a+1)=1 \Rightarrow a+1=\frac{1}{8} \Rightarrow a=-\frac{7}{8}$$

۲۶ گزینه ۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x، y و z به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x + z = ۶ \Rightarrow z = ۶ - x$$

ازطرفی طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲ + y^۲ = z^۲ \xrightarrow{z=۶-x} x^۲ + y^۲ = (۶ - x)^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = x^۲ - ۱۲x + ۳۶$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۳۶ - ۱۲x \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - ۱۲x} \Rightarrow y = ۲\sqrt{۹ - ۳x}$$

اکنون مساحت مثلث را به‌صورت تابعی برحسب x می‌نویسیم:

$$S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}x(۲\sqrt{۹ - ۳x}) = x\sqrt{۹ - ۳x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادلهٔ $S'_x = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = \sqrt{۹ - ۳x} - \frac{۳x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}} = \frac{۲(۹ - ۳x) - ۳x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}} = \frac{۱۸ - ۹x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}}$$

$$S'_x = ۰ \Rightarrow ۱۸ - ۹x = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$\xrightarrow{y=۲\sqrt{۹-۳x}} y = ۲\sqrt{۹ - ۶} = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده‌شده برابر است با:

$$S_{max} = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

۲۷ گزینه ۲

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۶x - ۹$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۳(x^۲ - ۲x - ۳) = ۳(x-۳)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

چون $۳ \notin [-۲, ۲]$، پس مقدار تابع را به‌ازای $x = -۱, -۲, ۲$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ + ۵ = ۱۰$$

$$f(۲) = ۸ - ۱۲ - ۱۸ + ۵ = -۱۷$$

$$f(-۲) = -۸ - ۱۲ + ۱۸ + ۵ = ۳$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y = ۱۰$ است.

۲۸ گزینه ۳

$\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{۱ + \sqrt{x}}{۵ - ۲x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵ - ۲x) + ۲(۱ + \sqrt{x})}{(۵ - ۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴) = \frac{\frac{۱}{۴}(۵ - ۸) + ۲(۱ + ۲)}{(۵ - ۸)^۲} = \frac{-\frac{۳}{۴} + ۶}{۹} = \frac{۲۱}{۳۶} = \frac{۷}{۱۲}$$

۲۹ گزینه ۴

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ موجود است هرگاه:

اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطهٔ $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \sqrt[3]{(2+6)^2} = a+b \Rightarrow \sqrt[3]{8^2} = a+b \Rightarrow a+b=4 \quad (\mathrm{I})$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(2x+6)^2} & ;x>1\\ ax+b & ;x\leq 1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}(2x+6)^{\frac{2}{3}} & ;x>1\\ ax+b & ;x\leq 1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2\times\frac{2}{3}\times(2x+6)^{-\frac{1}{3}} & ;x>1\\ a & ;x<1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2x+6}} & ;x>1\\ a & ;x<1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=f'_-(1) \Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2+6}} = a \Rightarrow a=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (I) داریم:

$$a+b=4 \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} \frac{2}{3}+b=4 \Rightarrow b=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

۳۰ گزینه ۲

خط $y=5x+a$ بر نمودار تابع $y=2x^2-3x+6$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y=2x^2-3x+6 \Rightarrow \text{مشتق} = \text{شیب خط مماس} \Rightarrow 4x-3=5 \Rightarrow x=2$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به‌علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x=2$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(2)=2(2)^2-3(2)+6=8-6+6=8 \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس } (2,8)$$

نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس باید صدق کند:

$$y=5x+a \xrightarrow{(2,8)} 8=5(2)+a \Rightarrow a=-2$$

۳۱ گزینه ۴

باتوجه‌به وجود عبارت $[x]$ در ضابطهٔ تابع $f(x)$، ابتدا بازهٔ $[-1,2]$ را به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و ضابطهٔ تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2\sin \pi x$$

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع $f(x)$ در بازهٔ $[0,1]$ به‌صورت خط افقی $y = 0$ است پس هر $x \in [0,1]$ می‌تواند یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ باشد، همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-1,2]$ یعنی $x = -1, 2$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-1,2]$ دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.

۳۲ گزینه ۴

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a + \frac{h}{2}$ یعنی محاسبهٔ $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$، پس ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 4$$

$$a + \frac{h}{2} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'\left(a + \frac{h}{2}\right) = 6\left(a + \frac{h}{2}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a + h$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{\left[3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2\right] - \left(3a^2 + 4a - 2\right)}{h}$$

$$= \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 4a + 4h - 2 - 3a^2 - 4a + 2}{h} = \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته‌شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

۳۳ گزینه ۳

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -۳x^{۲} \leq ۰ \Rightarrow x^{۳} - ۳x^{۲} \leq x^{۳} \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \leq \sqrt[۳]{x^{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \geq ۰$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

۳۴ گزینه ۱

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x - [x]}{x^{۳} - x - ۶} = \lim_{x \to ۲} \frac{x - ۲}{x^{۳} - x - ۶} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \to ۲} \frac{x - ۲}{x^{۳} - x - ۶} = \lim_{x \to ۲} \frac{۱}{۳x^{۲} - ۱} = \frac{۱}{۱۲ - ۱} = \frac{۱}{۱۱}$$

$$f(۲) = a \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$$

۳۵ گزینه ۴

$$f(x) = -\frac{۱}{۳}x^{۳} + ۲x^{۲} - x \Rightarrow f'(x) = -x^{۲} + ۴x - ۱$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیمم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^{۲} + ۴x - ۱$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \quad , \quad f(۲) = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow A\left(۲, \frac{۱۰}{۳}\right)$$

شیب خط مماس : $m = f'(۲) = -۴ + ۸ - ۱ = ۳$

معادلهٔ خط مماس : $y - \frac{۱۰}{۳} = ۳\,(x - ۲) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{۱۰}{۳} - ۶ = \frac{-۸}{۳}$ عرض از مبدأ

۳۶ گزینه ۳

ازآنجایی‌که $\sin^{۲}x = ۱ - \cos^{۲}x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^{۲}x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$، داریم $-۱ \leq t \leq ۱$ و درنتیجه:

$$y = t^{۲} - t \quad , \quad -۱ \leq t \leq ۱$$

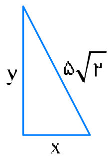
$$y' = ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲}$$

$$y(۱) = ۰ \quad , \quad y(-۱) = ۲ \quad , \quad y(\frac{۱}{۲}) = \frac{-۱}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-۱}{۴}$ است.

۳۷ گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$x^۲ + y^۲ = (۵\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۵۰$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۵۰ - x^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۵۰ - x^۲}$$

$$\Rightarrow f = ۳x + ۴y = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = ۳ + ۴(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵۰ - x^۲}}) = ۳ - \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳ = \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}} \Rightarrow ۳\sqrt{۵۰ - x^۲} = ۴x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x>۰} ۹(۵۰ - x^۲) = ۱۶x^۲$$

$$\Rightarrow ۴۵۰ - ۹x^۲ = ۱۶x^۲ \Rightarrow ۲۵x^۲ = ۴۵۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = \sqrt{۱۸}$$

$$y = \sqrt{۵۰ - x^۲} = \sqrt{۵۰ - ۱۸} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$f_{max} = ۳x + ۴y = ۳(۳\sqrt{۲}) + ۴(۴\sqrt{۲}) = ۹\sqrt{۲} + ۱۶\sqrt{۲} = ۲۵\sqrt{۲}$$

۳۸ گزینه ۱

می‌دانیم به ازای $-۱ \leq x \leq ۱$ همواره $\cos x > ۰$ است؛ ازطرفی به ازای هر x، $|x| \geq ۰$ است بنابراین به ازای $x \in [-۱, ۱]$ نامساوی $-|x| \cos x \leq ۰$ برقرار است.

می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازهٔ $[-۱, ۱]$ به ازای $x = ۰$، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

۳۹

گزینه ۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲\sqrt{x}}{x} = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۲ + bx = a + b \\ f(۱) = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b = ۲ \quad (\mathrm{I})$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{۳}{۲}} & ; x > ۱ \\ ۲ax + b & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۱) = -(۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -۱ \\ f'_-(۱) = ۲a + b \end{array}\right\} \xrightarrow{f'_+(۱) = f'_-(۱)} ۲a + b = -۱ \qquad (\mathrm{II})$$

دو رابطهٔ I و II را به‌صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = ۲ \\ ۲a + b = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = ۳ \Rightarrow a = -۳ \xrightarrow{(\mathrm{I})} -۳ + b = ۲ \quad \Rightarrow \quad b = ۵$$

۴۰ گزینه ۱

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x)=0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\Rightarrow\begin{cases}1+x^2\geq 0\Rightarrow x^2\geq -1\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

حال ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

معادلهٔ $f'(x)=0$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x=0$ تعریف‌نشده است اما $x=0$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن برابر صفر است.

۴۱ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$$

حال $f(4)$ و $f'(4)$ را به دست آورده و معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$f(4)=\frac{5\times 4-4}{\sqrt{4}}=\frac{16}{2}=8$$

$$f'(x)=\frac{5\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{x}\Rightarrow f'(4)=\frac{10-\frac{1}{4}(16)}{4}=\frac{3}{2}$$

معادلهٔ خط مماس:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Rightarrow y-8=\frac{3}{2}(x-4)$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}} y-8=\frac{3}{2}(-4)\Rightarrow y-8=-6\Rightarrow y=2$$

گزینه ۲

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f\left(x\right)$ در نقطهٔ $x=\circ$ موجود است درصورتی‌که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f'_{+}\left(\circ\right)=f'_{-}\left(\circ\right)$.

ب) مشتق دوم تابع $f\left(x\right)$ در نقطهٔ $x=\circ$ موجود است درصورتی‌که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f''_{+}\left(\circ\right)=f''_{-}\left(\circ\right)$.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ معکوس تابع $f\left(x\right)$ را برای $x\geq\circ$ و $x<\circ$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $\left(f^{-1}\right)'\left(x\right)$ و $\left(f^{-1}\right)''\left(x\right)$ در نقطهٔ $x=\circ$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq\circ\\ -\sqrt{-x} & ;x<\circ\end{cases}$$

$$x\geq\circ,\ y\geq\circ\ \Rightarrow\ f\left(x\right)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ y=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف مثبت)}} y^{۲}=x\Rightarrow f^{-۱}\left(x\right)=x^{۲}\quad ;\quad x\geq\circ$$

$$x<\circ, y<\circ\Rightarrow f\left(x\right)=-\sqrt{-x}\Rightarrow y=-\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف منفی)}} y^{۲}=-x\Rightarrow x=-y^{۲}\Rightarrow f^{-۱}\left(x\right)=-x^{۲}\quad ;\quad x<\circ$$

پس ضابطهٔ تابع $f^{-۱}\left(x\right)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f^{-۱}\left(x\right)=\begin{cases}x^{۲} & ;x\geq\circ\\ -x^{۲} & ;x<\circ\end{cases}$$

تابع $f^{-۱}\left(x\right)$ در $x=\circ$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to\circ^{+}} f\left(x\right)=\lim_{x\to\circ^{-}} f\left(x\right)=f\left(\circ\right)=\circ$$

همچنین داریم:

$$\left(f^{-۱}\right)'\left(x\right)=\begin{cases}۲x & ;x>\circ\\ -۲x & ;x<\circ\end{cases}\ \Rightarrow\ \left(f^{-۱}\right)'_{+}\left(\circ\right)=\left(f^{-۱}\right)'_{-}\left(\circ\right)=\circ$$

پس تابع $f^{-۱}\left(x\right)$ در $x=\circ$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$\left(f^{-۱}\right)''\left(x\right)=\begin{cases}۲ & ;x>\circ\\ -۲ & ;x<\circ\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\left(f^{-۱}\right)''_{+}\left(\circ\right)=۲\\ \left(f^{-۱}\right)''_{-}\left(\circ\right)=-۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \left(f^{-۱}\right)''_{+}\left(\circ\right)\neq\left(f^{-۱}\right)''_{-}\left(\circ\right)$$

بنابراین تابع $f^{-۱}\left(x\right)$ در $x=\circ$ مشتق دوم ندارد.

۴۳

گزینه ۳

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f\left(x\right)$ در $x=۲$ است:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f\left(x\right)-f\left(۲\right)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'\left(۲\right)=\frac{۴}{۳}$$

$$g(۱)=۱+\sqrt{۱}=۲$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$(fog)'(۱)=g'(۱)\times f'(g(۱))=g'(۱)\times f'(۲)=\frac{۴}{۳}g'(۱)$$

ازطرفی:

$$g\left(x\right)=x+\sqrt{x}\Rightarrow g'\left(x\right)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=۱}g'\left(۱\right)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

درنتیجه:

$$(fog)'(۱)=\frac{۴}{۳}g'\left(۱\right)=\frac{۴}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۲$$

۴۴

گزینه ۳

عبارت $۳-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x\in[-۱,۱]:\left|x^۲-۳\right|=-(x^۲-۳)=۳-x^۲$$

$$\Rightarrow f(x)=x\left|x^۲-۳\right|=x(۳-x^۲)=۳x-x^۳$$

با حل معادلهٔ $f'(x)=۰$، نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=۳-۳x^۲\xrightarrow{f'(x)=۰}۳-۳x^۲=۰\Rightarrow ۳x^۲=۳\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-۱)=-۲$ مینیمم مطلق تابع و $f(۱)=۲$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x=+۱$ و $x=-۱$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینهٔ سوم نادرست است.

۴۵ گزینه ۳

گام اول

اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و با فرض اینکه $u=x+\sqrt{1+x^2}$ است، مشتق تابع $f\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(u)=\frac{1}{u}$$

$$y=f\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow y'=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'f'\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۴۶ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$f'_-(3)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

تابع f در $x=3$ پیوستگی چپ ندارد و درنتیجه $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ وجود ندارد.

راه‌حل دوم:

بدون توجه به تعریف مشتق، حد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{(3+h)^2}{|1-(3+h)|}[3+h]-\frac{27}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{(3+h)^2}{|-2-h|}\times 2-\frac{27}{2}}{h}=\frac{\frac{9}{2}\times 2-\frac{27}{2}}{0^-}=\frac{-\frac{9}{2}}{0^-}=+\infty$$

۴۷ گزینه ۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'_{-}(x_\circ)=\lim_{h\to\circ^-}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}\quad,\quad f'_{+}(x_\circ)=\lim_{h\to\circ^+}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

ب) تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و باهم برابر باشد.

گام دوم

وقتی $h\to\circ^-$، حاصل حد داده‌شده $\frac{\circ}{\circ}$ و مبهم می‌شود. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to\circ^-}\frac{f(x_\circ)-f(x_\circ-h)}{h}\overset{H}{=}\lim_{h\to\circ^-}\frac{\circ-(-۱)f'(x_\circ-h)}{۱}=\lim_{h\to\circ^-}f'(x_\circ-h)=f'_{-}(x_\circ)$$

چون تابع در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است، پس داریم:

$$f'_{-}(x_\circ)=f'_{+}(x_\circ)=-۲$$

بنابراین حاصل حد داده‌شده برابر ۲- می‌شود.

۴۸ گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته‌شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۲/۵۶)-f(۲/۲۵)}{۲/۵۶-۲/۲۵}=\frac{\sqrt{۲/۵۶}-\sqrt{۲/۲۵}}{\circ/۳۱}=\frac{۱/۶-۱/۵}{\circ/۳۱}=\frac{\circ/۱}{\circ/۳۱}=\frac{۱\circ}{۳۱}$$

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$x=۲/۲۵\ \text{آهنگ آنی در نقطهٔ}=f'(۲/۲۵)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲/۲۵}}=\frac{۱}{۲\times ۱/۵}=\frac{۱}{۳}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(۲/۲۵)-\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱\circ}{۳۱}=\frac{۳۱-۳\circ}{۹۳}=\frac{۱}{۹۳}$$

۴۹ گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ } [۰, ۳] = \frac{f(۳) - f(۰)}{۳ - ۰} = \frac{\sqrt{۹+۱۶} - \sqrt{۱۶}}{۳} = \frac{\sqrt{۲۵} - \sqrt{۱۶}}{۳} = \frac{۵ - ۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$f(x) = \sqrt{x^۲ + ۱۶} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱۶}} = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱۶}}$$

$$x = \sqrt{۲} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'\left(\sqrt{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\left(\sqrt{۲}\right)^۲ + ۱۶}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲+۱۶}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

۵۰ گزینه ۲

گام اول

$f'_+(\sqrt{۲})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{۲}$ و $f'_-(\sqrt{۲})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{۲}$ است.

گام دوم

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ $\sqrt{۲}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})^۳ - [۲(\sqrt{۲})^۲](\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^+} x^۳ - [۲x^۲]x = (\sqrt{۲})^۳ - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^+)^۲]}_{۴^+}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^-} x^۳ - [۲x^۲]x = (\sqrt{۲})^۳ - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^-)^۲]}_{۴^-}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = -\sqrt{۲}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، درنتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را بدست می‌آوریم:

$$x \to \sqrt{۲}^+ \Rightarrow x > \sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ > ۲ \Rightarrow ۲x^۲ > ۴ \Rightarrow [۲x^۲] = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = x^۳ - ۴x \Rightarrow f'_+(x) = ۳x^۲ - ۴$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{۲}) = ۳(\sqrt{۲})^۲ - ۴ = ۳(۲) - ۴ = ۶ - ۴ = ۲$$

۵۱ گزینه ۳

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس، هم در معادلهٔ خط مماس و هم در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y = ۳x - ۲$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(۲) = ۳$ است. با جایگذاری $x = ۲$ در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس نیز برابر است با:

$$f(۲) = ۳(۲) - ۲ = ۶ - ۲ = ۴$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f^۲(x) - ۴f(x)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)(f(x) - ۴)}{x - ۲}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to ۲} f(x)}_{f(۲)} \times \underbrace{\lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - ۴}{x - ۲}}_{f'(۲)} = f(۲) \times f'(۲) = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

۵۲ گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(۶/۲۵) - f(۴)}{۶/۲۵ - ۴} = \frac{\sqrt{۶/۲۵} - \sqrt{۴}}{۲/۲۵} = \frac{۲/۵ - ۲}{۲/۲۵} = \frac{۰/۵}{۲/۲۵} = \frac{۱}{۴/۵}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۲ \times ۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = \frac{۱۰}{۴۵} - \frac{۱}{۴} = \frac{۴۰ - ۴۵}{۱۸۰} = \frac{-۵}{۱۸۰} = \frac{-۱}{۳۶}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{۱}{۳۶}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

۵۳

گزینه ۱

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{g\left(x\right)-g\left(۲\right)}{x-۲}=g'\left(۲\right)$$

ب) می‌دانیم:

$$\left(gof\right)'\left(۱\right)=f'\left(۱\right)g'\left(f\left(۱\right)\right)$$

گام دوم

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$، مقادیر $f\left(۱\right)$ و $f'\left(۱\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f\left(x\right)=\sqrt{۵-x^۲}\Rightarrow f\left(۱\right)=\sqrt{۵-۱}=۲$$

$$f'\left(x\right)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۵-x^۲}}\quad\Rightarrow\quad f'\left(۱\right)=\frac{-۱}{\sqrt{۵-۱}}=\frac{-۱}{\sqrt{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

پس مقدار $\left(gof\right)'\left(۱\right)$ برابر است با:

$$\left(gof\right)'\left(۱\right)=f'\left(۱\right)g'\left(f\left(۱\right)\right)\xrightarrow{f(۱)=۲}\left(gof\right)'\left(۱\right)=f'\left(۱\right)\times g'\left(۲\right)=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

۵۴

گزینه ۴

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادلهٔ $y'=۰$ به دست می‌آید، لذا:

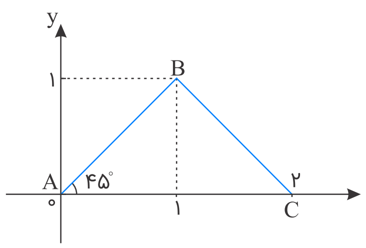
$$f(x)=x^۲(x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x(x-۲)^۲+۲(x-۲)(x^۲)$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x(x-۲)(x-۲+x)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰,۱,۲$$

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\quad,\quad B\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.\quad,\quad C\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$$



$$\Rightarrow AB=BC$$

باتوجه‌به شکل و اینکه $AB=BC$، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

۵۵ گزینه ۳

تابع در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد. مشتق تابع را در همسایگی راست بررسی می‌کنیم.

$$x > ۱ : f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱ + x} = \sqrt{x^۲ + x - ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x + ۱}{۲\sqrt{x^۲ + x - ۱}} \Rightarrow f'_{+}(۱) = \frac{۳}{۲}$$

۵۶ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = f(-۲)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} \sqrt{۵ - ۲x} = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} (-\frac{۱}{۲}x^۲ + bx + c) = -\frac{۱}{۲}(-۲)^۲ + b(-۲) + c = -۲ - ۲b + c$$

$$f(-۲) = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\Rightarrow -۲ - ۲b + c = ۳ \Rightarrow -۲b + c = ۵ \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_{-}(-۲) = f'_{+}(-۲)$$

$$\begin{cases} f'_{-}(x) = \dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵ - ۲x}} \Rightarrow f'_{-}(-۲) = \dfrac{-۲}{۲ \times ۳} = -\dfrac{۱}{۳} \\ f'_{+}(x) = -x + b \Rightarrow f'_{+}(-۲) = ۲ + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} = ۲ + b \Rightarrow b = -\frac{۷}{۳} \xrightarrow{(*)} -۲(-\frac{۷}{۳}) + c = ۵$$

$$\Rightarrow c = ۵ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

۵۷ گزینه ۴

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^۲-۱|$ روی بازهٔ $[-۲,۲]$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم. برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)$، کافی است نقاطی که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد را بیابیم.

$$\begin{cases} x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۱ \\ x\leq -۱ \end{cases} \\ x^۲-۱< ۰ \Rightarrow x^۲< ۱ \Rightarrow |x|< ۱ \Rightarrow -۱<x<۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x(x^۲-۱) & ; x\geq ۱,\ x\leq -۱ \\ -x(x^۲-۱) & ; -۱<x<۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۳-x & ; x\geq ۱,\ x\leq -۱ \\ -x^۳+x & ; -۱<x<۱ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته است، پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۱ & ; x>۱,\ x<-۱ \\ -۳x^۲+۱ & ; -۱<x<۱ \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x>۱,\ x<-۱ : ۳x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ \text{غ.ق.} \\ -۱<x<۱ : -۳x^۲+۱=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

(دقت کنید که در ضابطهٔ اول، چون ریشه‌های به‌دست‌آمده در محدودهٔ تعریف‌شده برای x قرار نمی‌گیرند پس قابل‌قبول نیستند.)

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است:

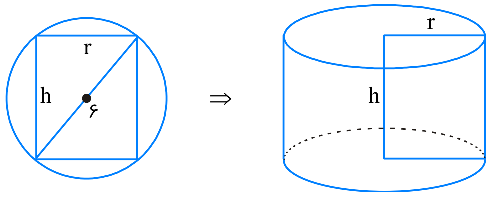
$$x=۱ : f'_+(۱)=۳-۱=۲\ ,\ f'_-(۱)=-۳+۱=-۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=-۱ : f'_+(-۱)=-۳+۱=-۲\ ,\ f'_-(-۱)=۳-۱=۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

همچنین تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۲,۲]$ بحرانی است.

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۶ نقطهٔ بحرانی $x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x=۱$، $x=-۱$، $x=۲$ و $x=-۲$ است.

۵۸ گزینه ۲



می‌دانیم قطر مستطیل محاط درون دایره، برابر با قطر دایره است پس طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$h^۲ + r^۲ = ۶^۲ \Rightarrow h^۲ + r^۲ = ۳۶ \Rightarrow r = \sqrt{۳۶ - h^۲}$$

حجم استوانهٔ حاصل از دوران مستطیل برابر است با:

$$V = \pi r^۲ h = \pi(۳۶ - h^۲)h = ۳۶\pi h - \pi h^۳$$

می‌خواهیم حجم استوانه بیشترین مقدار باشد پس ابتدا معادلهٔ $V'_h = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = ۳۶\pi - ۳\pi h^۲$$
$$V'_h = ۰ \Rightarrow ۳۶\pi - ۳\pi h^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow ۳\pi h^۲ = ۳۶\pi \Rightarrow h^۲ = ۱۲ \Rightarrow h = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

۵۹ گزینه ۳

گام اول

الف) نکته: در توابع دارای عبارت قدر مطلقی، ریشهٔ سادهٔ عبارت درون قدر مطلق نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) یا مشتق‌ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x) = |x|(x + a)$ نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) تابع، نقطهٔ $x = ۰$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطهٔ $x = ۰$ برابر $f'_+(۰)$ و شیب مماس چپ در نقطهٔ $x = ۰$ برابر $f'_-(۰)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطهٔ $x = ۰$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(۰) \cdot f'_+(۰) = -۱$

گام دوم

$$x > ۰ : |x| = x \Rightarrow f(x) = x(x + a) = x^۲ + ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x + a \Rightarrow f'_+(۰) = ۲(۰) + a = ۰ + a = a$$

$$x < ۰ : |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)(x + a) = -x^۲ - ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = -۲x - a \Rightarrow f'_-(۰) = -۲(۰) - a = ۰ - a = -a$$

$$f'_+(۰) f'_-(۰) = -۱ \Rightarrow a(-a) = -۱ \Rightarrow -a^۲ = -۱ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

۶۰

گزینه ۱

گام اول

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $M\left(x,y\right)$ از مبدأ مختصات از رابطهٔ $T=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ به دست می‌آید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطهٔ T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y=\sqrt{x+۸}$ را جایگزین می‌کنیم تا T برحسب متغیر x به دست آید.

$$T=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\xrightarrow{y=\sqrt{x+۸}}T=\sqrt{x^{۲}+\left(\sqrt{x+۸}\right)^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+x+۸}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x=۷$ حساب می‌کنیم:

$$T'=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^{۲}+x+۸}}$$

$$\Rightarrow T'\left(۷\right)=\frac{۲\left(۷\right)+۱}{۲\sqrt{۷^{۲}+۷+۸}}=\frac{۱۴+۱}{۲\sqrt{۴۹+۷+۸}}=\frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}}=\frac{۱۵}{۲\times ۸}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۶۱

گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad ; \quad 0 \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(0) = f'_+(0)$.

گام دوم

چون $x^2 \geq 0$ همواره برقرار است پس $D_f = \mathbb{R}$.

اکنون ضابطهٔ تابع را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می‌کنیم:

$$y = x\sqrt{x^2} = x|x| = \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow & |x| = x \Rightarrow y = x^2 \\ x < 0 \Rightarrow & |x| = -x \Rightarrow y = -x^2 \end{cases}$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} -x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x=0$ پیوسته است.

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق‌پذیری تابع را بررسی می‌کنیم:

$$y' = \begin{cases} 2x & ; \ x > 0 \\ -2x & ; \ x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_-(0) = y'_+(0) = 0$$

پس تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۶۲

گزینه ۲

گام اول

می‌دانیم $\mathrm{fog}\,(x) = f(g(x))$ و $(\mathrm{fog})'\,(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ است.

گام دوم

با داشتن ضابطه‌های $f\,(x)$ و $g\,(x)$، ابتدا ضابطهٔ $\mathrm{fog}\,(x)$ را تعیین کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f\,(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3} \quad , \quad g\,(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

$$\mathrm{fog}\,(x) = f\,(g\,(x)) = \frac{(g\,(x))^3 - 2}{1 + (g\,(x))^3} = \frac{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 - 2}{1 + \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3} = \frac{x - 1 - 2}{1 + x - 1} = \frac{x - 3}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \mathrm{fog}\,(x) = \frac{x - 3}{x}$$

ضابطهٔ y' را به دست می‌آوریم:

$$f'\,(g\,(x)) \cdot g'\,(x) = y' = \frac{x - (x - 3)}{x^2} = \frac{x - x + 3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

۶۳

گزینه ۱

$$y = (x-1)^2\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = 2(x-1)(x^{\frac{2}{3}}) + (x-1)^2\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right) \Rightarrow y' = \frac{6(x-1)x + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{صورت} = 0 \;\Rightarrow\; 2(x-1)(3x + (x-1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = 0 \;\Rightarrow\; 3\sqrt[3]{x} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

باتوجه‌به گزینه‌ها $x = \frac{1}{4}$ جواب مسئله است.

۶۴

گزینه ۱

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که:

اولاً در این نقطه پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱)$$

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow x - ۱ > ۰ \Rightarrow |x - ۱| = x - ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - ۱)(x - ۱) = (x - ۱)^۲ \Rightarrow \lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۰$$

$$x \to ۱^- \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow x - ۱ < ۰ \Rightarrow |x - ۱| = -(x - ۱)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - ۱)(-(x - ۱)) = -(x - ۱)^۲ \Rightarrow \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۰$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow a = ۰$$

همچنین داریم:

$$f'_-(x) = ۲(x - ۱) \Rightarrow f'_-(۱) = ۰$$
$$f'_+(x) = -۲(x - ۱) \Rightarrow f'_+(۱) = ۰$$

بنابراین تابع به ازای $a = ۰$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

۶۵ گزینه ۳

گام اول

$f'_{+}(1)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ و $f'_{-}(1)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$.

گام دوم

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطهٔ $x=1$، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطهٔ تابع و مشتق آن را به ازای $x>1$ و $x<1$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow |x-1| = x-1 \\ x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow |x-1| = -x+1 \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + x - 1 & ; x>1 \\ x^{\frac{3}{2}} - x + 1 & ; x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 & ; x>1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 & ; x<1 \end{cases}$$

با جایگذاری $x=1$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$، مقدار $f'_{+}(1)$ و $f'_{-}(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_{+}(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$f'_{-}(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_{+}(1) + 3f'_{-}(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

۶۶ گزینه ۲

$$f(0) = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+a} - b}{x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{0+a} - b = 0 \quad (1) \\ \text{HOP} : \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}}}{1} = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = \pm 2 \xrightarrow{(1)} b = \pm 2$$

۶۷ گزینه ۲

$$f(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x) = x + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f'(۲) = ۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(۴) - f(۱)}{۴ - ۱} = \frac{(۸ - \frac{۱}{۴}) - (\frac{۱}{۲} - ۱)}{۳} = \frac{\frac{۳۱}{۴} + \frac{۱}{۲}}{۳} = \frac{۱۱}{۴}$

اختلاف : $\frac{۱۱}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{۲}{۴} = ۰/۵$

۶۸ گزینه ۱

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ تعریف‌نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x - ۲|$، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x = ۲$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} & ; \ x \geq ۲ \\ -(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} & ; \ x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} & ; \ x \geq ۲ \\ -(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} & ; \ x < ۲ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x = ۲$ پیوسته است پس ضابطهٔ تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x > ۲ \\ -\sqrt[۳]{x^۲} - \frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۵x - ۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x > ۲ \\ \frac{-۵x + ۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x < ۲ \end{cases}$$

ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \ : \ ۵x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۵} \ \text{غ.ق} \\ x < ۲ \ : \ -۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x = ۰$ ریشهٔ مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف‌نشده است؛ ازطرفی به ازای $x = ۲$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} f'_{+}(۲) &= \frac{۱۰ - ۴}{۳\sqrt[۳]{۲}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}} = \sqrt[۳]{۴} \\ f'_{-}(۲) &= \frac{-۱۰ + ۴}{۳\sqrt[۳]{۲}} = \frac{-۲}{\sqrt[۳]{۲}} = -\sqrt[۳]{۴} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(۲) \ \text{موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{۰, \frac{۴}{۵}, ۲\}$ است.

۶۹ گزینه ۲

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x = ۲$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = ۲$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow -۴ + ۲a + b = ۱ \Rightarrow ۲a + b = ۵ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{۱}{(x-۱)^۲} & ; x \geq ۲ \\ -۲x + a & ; x < ۲ \end{cases}$$

$$f'_-(۲) = f'_+(۲) \Rightarrow -۴ + a = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

$$(۱) : ۶ + b = ۵ \Rightarrow b = -۱$$

۷۰ گزینه ۲

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-۳}{x^۲} \Rightarrow f'_+(۱) = -۳$$
$$x \to ۱^- \Rightarrow f'(x) = ۲x + a \Rightarrow f'_-(۱) = ۲ + a$$
$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow -۳ = ۲ + a \Rightarrow a = -۵$$

چون تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow ۳ - ۵ = (۱)^۲ - ۵(۱) + b \Rightarrow b = ۲$$

۷۱ گزینه ۳

گام اول

نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نقاطی از دامنهٔ تابع f که در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف‌نشده است را می‌یابیم.

$$f(x) = (x^۲ - ۲۸)\sqrt[۳]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x\sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۲ - ۲۸) = \frac{۶x^۲ + x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۷x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ - ۲۸ = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ = ۲۸ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

به‌ازای $x = ۰$، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و درنتیجه این تابع تعریف‌نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-۲, ۰, ۲\}$ است.

۷۲ گزینه ۴

a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = ۲$، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{۸x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادلهٔ $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{۸x}} = (۶ + x)(۸x)^{-\frac{۱}{۴}}$$

$$y' = (۸x)^{-\frac{۱}{۴}} - ۲(۶ + x)(۸x)^{-\frac{۵}{۴}} = (۸x)^{-\frac{۵}{۴}}(۸x - ۱۲ - ۲x) = \frac{۶x - ۱۲}{\sqrt[۴]{(۸x)^{۵}}}$$

$$y' = ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(۲)$ است و داریم:

$$y(۲) = \frac{۶ + ۲}{\sqrt[۴]{۸(۲)}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۱۶}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۲^۴}} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۷۳

گزینه ۳

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

گام دوم

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هریک از زیربازه‌ها، پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در سه نقطهٔ مرزی $x=0$، $x=1$ و $x=2$ بررسی شود.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 0+1 = 1\\ f(0)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ;x<0\\ 1 & ;x>0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x+2 = 4\\ f(x)=2(1)+2=4\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x+2 = 4+2 = 6\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2+2 = 4+2 = 6\\ f(2)=2^2+2=4+2=6\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ;x<2\\ 2x & ;x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2)=2\\ f'_+(2)=4\end{array}\right\} \Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در یک نقطه ناپیوسته و در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۷۴ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_\circ)=\lim\limits_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim\limits_{h\to\circ}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ برابر $f'(۱)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=۱$ محاسبه کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\times\frac{۴(x+۳)-(۴x+۵)}{(x+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴+۵}{۱+۳}}}\times\frac{۴(۱+۳)-(۴+۵)}{(۱+۳)^۲}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۷}{۴۸}$$

۷۵ گزینه ۲

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x)=x^۳+x\Rightarrow g'(x)=۳x^۲+۱>\circ$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع gof به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=x^۳-۳x\ ;x\leq ۱\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳$$

$$f'(x)=\circ\Rightarrow ۳x^۲=۳\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱	$+\infty$
$f'(x)$		+	∘	−	∘	
$f(x)$		↗		↘		

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x\leq ۱$، در نقطهٔ $x=-۱$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-۱)=(-۱)^۳-۳(-۱)=-۱+۳=۲$$

بنابراین با شرط $x\leq ۱$ داریم: $f(x)\leq ۲$

به این ترتیب بیشترین مقدار تابع gof برابر است با:

$$(gof)_{max}=g(۲)=۲^۳+۲=۸+۲=۱۰$$

۷۶ گزینه ۲

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۴x + |x|) - \frac{۱}{۵}|۴x + ۱|x||$$

$$\text{اگر } x \geq ۰ \Rightarrow (fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۵x) - \frac{۱}{۵}(۵x) = ۴x - x = ۳x$$

$$\text{اگر } x < ۰ \Rightarrow fog(x) = \frac{۴}{۵}(۴x - x) - \frac{۱}{۵}\underbrace{|۴x - x|}_{۳x}$$

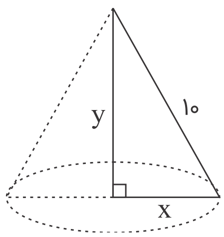
$$= \frac{۱۲}{۵}x - \frac{۱}{۵}(-۳x) = \frac{۱۵}{۵}x = ۳x$$

بنابراین $(fog)(x) = ۳x$، پس:

$$(fog)'(x) = ۳$$

۷۷ گزینه ۴

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^۲ y \xrightarrow{(*)} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - y^۲)y = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰y - y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ - ۳y^۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۳۰۰ - ۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}} = ۲ \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{۲}$$

۷۸ گزینه ۲

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\right)$، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطهٔ $x=1$ موجود و باهم برابر باشند.

بررسی پیوستگی در نقطهٔ $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow a-a=1-1\Rightarrow 0=0$$

به یک رابطهٔ همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x=1$ پیوسته است.

بررسی مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases} ax-a & ;x<1 \\ x^2-x & ;x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} a & ;x<1 \\ 2x-1 & ;x>1\end{cases}$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2-1=1\Rightarrow a=1$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a=1$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است.

۷۹ گزینه ۱

تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس بایستی در $x=۲$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x=۲$ برابر باشند.

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴+۲a+b=|۴-۴| \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴+۲a+b=۰$$

$$\Rightarrow ۲a+b=-۲ \quad (۱)$$

تابع f را در همسایگی چپ $x=۲$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰,۲$$

x		۰		۲	
$x^۲-۲x$	+	۰	−	۰	+

بنابراین باتوجه‌به جدول تعیین علامت اگر $۰<x<۲$ باشد، $|x^۲-۲x|=۲x-x^۲$ است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & ;x<۰ \\ -x^۲+۲x & ;۰\le x<۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & ;x\ge ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & ;x<۰ \\ -۲x+۲ & ;۰<x<۲ \\ x+a & ;x\ge ۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲) \Rightarrow ۲+a=-۲(۲)+۲ \Rightarrow a=-۴$$

$$(۱) \xrightarrow{a=-۴} -۸+b=-۲ \Rightarrow b=۶$$

$$\Rightarrow a+b=۲$$

۸۰ گزینه ۳

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۵\\ f(۸)=\frac{۲۷}{۹}=۳\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۳-(-۵)}{۸-۰}=۱$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x)=\frac{۴(x+۱)-(۴x-۵)}{(x+۱)^۲}\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱\Rightarrow(x+۱)^۲=۹$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۳\Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق}\\ x+۱=-۳\Rightarrow x=-۴ & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x=۲$ بر منحنی مماس است:

$$f(۲)=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow(۲,۱),m=۱$$
$$y-۱=۱(x-۲)\xrightarrow{x=۰}y=-۱$$

۸۱ گزینه ۴

گام اول

فرض کنیم $x=c$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ باشد. اگر $f''(c)>۰$ باشد آنگاه $x=c$، مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است و اگر $f''(c)<۰$ باشد آنگاه $x=c$، ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

گام دوم

ابتدا با محاسبهٔ مشتق تابع $f(x)$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x^۲+\frac{a}{x}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=۲x-\frac{a}{x^۲}$$

برای یافتن نقاط بحرانی ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را می‌یابیم:

$$f'(x)=۰\quad\Rightarrow\quad ۲x-\frac{a}{x^۲}=۰\Rightarrow ۲x=\frac{a}{x^۲}\Rightarrow x^۳=\frac{a}{۲}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$$

پس $x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ است. اکنون مقدار مشتق دوم تابع را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$f''(x)=۲+\frac{۲a}{x^۳}\xrightarrow{x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}}f''(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}})=۲+\frac{۲a}{(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}})^۳}=۲+\frac{۲a}{\frac{a}{۲}}=۲+۴=۶$$

باتوجه‌به گام اول، چون $f''(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}})>۰$ است پس $x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین تابع f به ازای هیچ مقداری از a، ماکزیمم نسبی ندارد.

۸۲ گزینه ۲

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع برحسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطهٔ مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2} = (x-2)\,x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 1 \times x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-1)$ است، پس داریم:

$$f'(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{2(-1-2)}{3\sqrt[3]{-1}} = 1 + \frac{2(-3)}{3(-1)} = 1 + 2 = 3$$

۸۳ گزینه ۴

ازآنجاکه این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$y_1 = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_1 = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$y_2 = x^2 + ax + b \Rightarrow y'_2 = 2x + a$$

$$y'_1(4) = y'_2(4) \Rightarrow 2 + \frac{4}{4} = 8 + a \Rightarrow a = -5$$

و نیز داریم:

$$y_1(4) = y_2(4) \Rightarrow 8 = 16 - 5(4) + b \Rightarrow 8 = -4 + b \Rightarrow b = 12$$

۸۴

گزینه ۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۱$ تا $x=۱/۴۴$ را با استفاده از رابطهٔ $\frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۰/۴۴}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$ باید ضابطهٔ مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(۱)$ را محاسبه کنیم.

اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۱/۴۴)-f(۱)}{۰/۴۴} = \frac{\frac{۰/۴۴}{\sqrt{۱/۴۴}}-۰}{۰/۴۴} = \frac{۱}{\sqrt{۱/۴۴}} = \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۱}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶}$$

$$f(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}$$

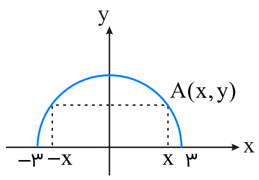
$$= \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۲x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

۸۵ گزینه ۱

نقطهٔ A را بر روی نیم‌بیضی $y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۹-x^۲}$ در نظر می‌گیریم.



این نقطه دارای مختصات $A(x, \frac{۲}{۳}\sqrt{۹-x^۲})$ است. فرض می‌کنیم طول مستطیل $۲x$ و عرض آن y باشد پس داریم:

$$S=۲xy=۲x(\frac{۲}{۳}\sqrt{۹-x^۲})=\frac{۴}{۳}x\sqrt{۹-x^۲}=\frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲-x^۴}\ ,\ -۳<x<۳$$

برای یافتن بیشترین مساحت، ابتدا معادلهٔ $S'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x)=\frac{۴}{۳}(\frac{۱۸x-۴x^۳}{۲\sqrt{۹x^۲-x^۴}})$$

$$S'(x)=۰\Rightarrow ۱۸x-۴x^۳=۰\Rightarrow ۲x(۹-۲x^۲)=۰$$

$$\xrightarrow{x\neq ۰} ۲x^۲=۹\Rightarrow x^۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

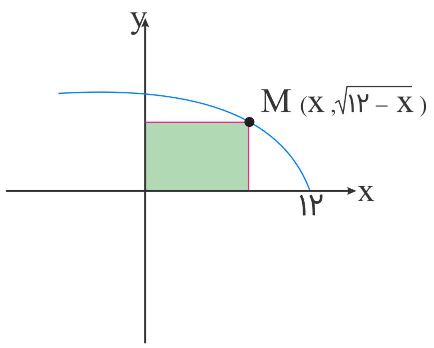
بنابراین داریم:

$$S_{max}=\frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲-x^۴}=\frac{۴}{۳}\sqrt{۹(\frac{۹}{۲})-\frac{۸۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۲}-\frac{۸۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۴}}$$

$$=\frac{۴}{۳}\times\frac{۹}{۲}=\frac{۳۶}{۶}=۶$$

۸۶ گزینه ۳

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲ - x}$ است.

$$S' = \sqrt{۱۲ - x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲ - x) - x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰$$

$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲ - ۸} = ۱۶$$

۸۷ گزینه ۳

چون دامنهٔ تابع $[-۱, ۳]$ است، پس $x_۱ = ۳$ و $x_۲ = -۱$ ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲ + ax + b = ۰$ هستند.

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-a}{-۱} \Rightarrow -۱ + ۳ = a \Rightarrow a = ۲$$

$$x_۱x_۲ = \frac{b}{-۱} \Rightarrow -۱ \times ۳ = -b \Rightarrow b = ۳$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیممش صفر است.

$$f'(x) = ۱ + \frac{-۲x + ۲}{۲\sqrt{-x^۲ + ۲x + ۳}} = ۰ \Rightarrow \frac{x - ۱}{\sqrt{-x^۲ + ۲x + ۳}} = ۱$$

$$\Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۳ = (x - ۱)^۲ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۳ = x^۲ - ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۲}$$

$x = ۱ + \sqrt{۲}$ قابل‌قبول است.

$$f(۱ + \sqrt{۲}) = ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-(۱ + \sqrt{۲})^۲ + ۲(۱ + \sqrt{۲}) + ۳}$$

$$= ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-۱ - ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۲ + ۲\sqrt{۲} + ۳} = ۱ + ۲\sqrt{۲}$$

۸۸ گزینه ۲

$$[\text{۰}, \text{۴}]\ \text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ} = \frac{f(\text{۴}) - f(\text{۰})}{\text{۴} - \text{۰}} = \frac{(\sqrt{\text{۹}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}) - (\sqrt{\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱}})}{\text{۴} - \text{۰}} = \frac{\frac{\text{۶}}{\text{۵}}}{\text{۴}} = \frac{\text{۳}}{\text{۱۰}} = \text{۰/۳}$$

$$f'(x) = \frac{\text{۲}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}x + \text{۱}}} - \frac{\text{۱}}{(x + \text{۱})^{\text{۲}}}$$

$$x = \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\ \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در} = f'(\frac{\text{۳}}{\text{۲}}) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{(\frac{\text{۵}}{\text{۲}})^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۴}}{\text{۲۵}} = \text{۰/۵} - \text{۰/۱۶} = \text{۰/۳۴}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = \text{۰/۳۴} - \text{۰/۳} = \text{۰/۰۴}$$

۸۹ گزینه ۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

ج) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y = \text{۲}x - \text{۵}$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادلهٔ $y = ax^{\text{۲}} + bx + \text{۱}$ در نقطهٔ $x = \text{۱}$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y = ax^{\text{۲}} + bx + \text{۱} \Rightarrow y' = \text{۲}ax + b \xrightarrow{x=\text{۱}} m_{\text{مماس}} = y'(\text{۱}) = \text{۲} \Rightarrow \text{۲}a + b = \text{۲} \quad (I)$$

طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x = \text{۱}$ مقدار به‌دست‌آمده از معادلهٔ خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y = \text{۲}x - \text{۵} \Rightarrow y(\text{۱}) = \text{۲} - \text{۵} = -\text{۳}$$

$$y = ax^{\text{۲}} + bx + \text{۱} \Rightarrow y(\text{۱}) = a + b + \text{۱} = -\text{۳} \Rightarrow a + b = -\text{۴} \quad (II)$$

از دو معادلهٔ (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{۲}a + b = \text{۲} \\ a + b = -\text{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{۲}a + b = \text{۲} \\ -a - b = \text{۴} \end{cases} \Rightarrow a = \text{۶}$$

۹۰ گزینه ۲

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

ضابطهٔ $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲ \Rightarrow y' = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = x(x-۴)(x+۱)$$

$$y' = ۰ \Rightarrow x(x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(۰) = ۰ \\ y(۴) = -۳۲ \\ y(-۱) = -\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده، $y = -۳۲$ کمترین مقدار تابع است.

۹۱ گزینه ۳

تابع باید در $x = ۲$ پیوسته باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۸}{ax+b} = \dfrac{۸}{۲a+b} \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} -x^۳ + ۶x = -۸ + ۱۲ = ۴ \end{array}\right. \Rightarrow \frac{۸}{۲a+b} = ۴ \Rightarrow ۲a + b = ۲$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-۸a}{(ax+b)^۲} & ; x > ۲ \\ -۳x^۲ + ۶ & ; x \leq ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(۲) = \dfrac{-۸a}{(۲a+b)^۲} = \dfrac{-۸a}{۲^۲} = -۲a \\ f'_-(۲) = -۱۲ + ۶ = -۶ \end{cases} \Rightarrow -۲a = -۶ \Rightarrow a = ۳ \quad , \quad b = -۴$$

۹۲ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۰ - \dfrac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x - ۱۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(۱۰x - ۱۸)\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}$$

$$= \frac{-۱}{۲(۴)} = \frac{-۱}{۸}$$

۹۳

گزینه ۴

گام اول

فاصلهٔ میان دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام دوم

نقطهٔ موردنظر را $M(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه‌به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}$$

$$|MB| = \sqrt{(7-\alpha)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکسیمم مقدارش، کافی است ریشهٔ مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + 25} - \sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-2(1-\alpha)}{2\sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}} - \frac{-2(7-\alpha)}{2\sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}} = \frac{(7-\alpha)}{\sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}} - \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{(7-\alpha)}{\sqrt{(7-\alpha)^2 + 4}} = \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 25}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(7-\alpha)^2}{(7-\alpha)^2 + 4} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2 + 25}$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)^2((7-\alpha)^2 + 4) = (7-\alpha)^2((1-\alpha)^2 + 25)$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)^2(7-\alpha)^2 + 4(1-\alpha)^2 = (7-\alpha)^2(1-\alpha)^2 + 25(7-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4(1-\alpha)^2 = 25(7-\alpha)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2(1-\alpha) = \pm 5(7-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\alpha = 35 - 5\alpha \Rightarrow 3\alpha = 33 \Rightarrow \alpha = 11 \\ 2 - 2\alpha = -35 + 5\alpha \Rightarrow 7\alpha = 37 \Rightarrow \alpha = \dfrac{37}{7} \end{cases}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، $\alpha = 11$ قابل‌قبول است.

گزینه ۳

برای تعیین ضابطهٔ تابع $f\left(f\left(x\right)\right)$، کافی است در ضابطهٔ $f\left(x\right)$ به‌جای متغیر x تابع $f\left(x\right)$ را جایگذاری کنیم:

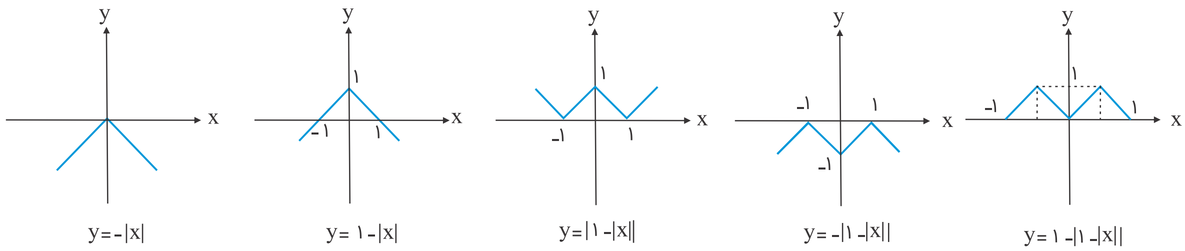
$$f\left(x\right)=۱-|x| \quad \Rightarrow \quad f\left(f\left(x\right)\right)=۱-|f\left(x\right)|=۱-|۱-|x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$۱)|x| \; : \quad x=۰$$

$$۲)|۱-|x|| \; : \quad ۱-|x|=۰ \quad \Rightarrow \quad |x|=۱ \quad \Rightarrow \quad x=\pm ۱$$

علاوه‌برآن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y=|۱-|x||$، دارای سه نقطهٔ مشتق‌ناپذیر $x=۰,\ x=۱,\ x=-۱$ است.

۹۵ گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید همواره نامنفی باشد.

ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.

ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

گام دوم

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow D_f=[-1,1]$$

تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است (باتوجه‌به اینکه گزینهٔ "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج حذف شود:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

چون داریم:

$$x\to 0^- \Rightarrow x<0 \Rightarrow |x|=-x$$

بنابراین:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-0}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹۶ گزینه ۳

برای سهولت در مشتق‌گیری به‌جای $\sqrt[3]{x}$، عبارت $x^{\frac{1}{3}}$ را قرار می‌دهیم. ضابطهٔ مشتق دوم یا همان y'' را تعیین کرده و حاصل $y''y^5$ را به دست می‌آوریم (دقت کنید y^5 مشتق پنجم تابع y نیست، مشتق پنجم را به‌صورت $y^{(5)}$ نمایش می‌دهند).

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y'' = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

$$\Rightarrow y''y^5 = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \times \sqrt[3]{x^5} = -\frac{2}{9}$$

۹۷ گزینه ۲

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = 4a - 2b + 4 \\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -8 + 2 = -6\end{array}\right\} \Rightarrow 4a - 2b = -10 \Rightarrow 2a - b = -5$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2 \,,\, f'_+(-2) = -4a + b \\ 3x^2 - 1 & ; x < -2 \,,\, f'_-(-2) = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a + b = 11 \\ 2a - b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -2a = 6 \Rightarrow a = -3 \,,\, b = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - x + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$$

$$f(1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

۹۸ گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۳$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۳) - f(۲)}{۳ - ۲} = \frac{\frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴}}{۱} = \frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴} = ۴ - ۹ = -۵$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $x = \sqrt[۳]{۱۲}$، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۳۶}{x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۰ \times x^۲ - ۲x(۳۶)}{x^۴} = -\frac{۷۲x}{x^۴} = -\frac{۷۲}{x^۳}$$

$$x = \sqrt[۳]{۱۲} \text{ آهنگ آنی در } = f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = -\frac{۷۲}{\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right)^۳} = -\frac{۷۲}{۱۲} = -۶$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = -۵ - (-۶) = ۱$$

۹۹ گزینه ۲

گام اول

حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x) - f(۲)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x = ۲$ یا همان $f'_-(۲)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را وقتی $x < ۲$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطهٔ $f'(x)$ و مقدار $f'(-۲)$ را به دست می‌آوریم.

$$x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \Rightarrow |x - ۲| = -(x - ۲) = ۲ - x$$

$$f(x) = ۲ - x + \sqrt{۲x} \Rightarrow f'(x) = -۱ + \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}} = \frac{۱}{\sqrt{۲x}} - ۱$$

$$\lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x) - f(۲)}{\Delta x} = f'_-(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲ \times ۲}} - ۱ = \frac{۱}{\sqrt{۴}} - ۱ = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۱۰۰ گزینه ۱

تابع $y = x + \sqrt{x}$ یک‌به‌یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

۱۰۱ گزینه ۴

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[0, 2]$:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{19}{4}$$

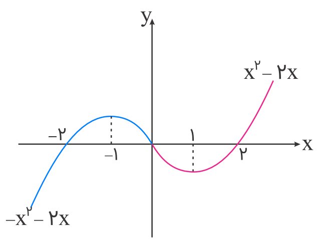
تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$5 - \frac{19}{4} = \frac{1}{4}$$

۱۰۲ گزینه ۱

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq 0 : f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x < 0 : f'(x) = -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

$$\text{فاصله} : \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۳

گام اول

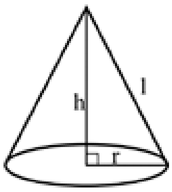
الف) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$



گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم.

باتوجه‌به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{۳}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow r^۲ h = ۱ \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{h} \Rightarrow r = \frac{۱}{\sqrt{h}} \quad (I)$$

برای محاسبهٔ مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازهٔ l را به دست آوریم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$l^۲ = r^۲ + h^۲ \Rightarrow l = \sqrt{r^۲ + h^۲} \quad (II)$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطهٔ (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(II)} S = \pi r\sqrt{r^۲ + h^۲} \xrightarrow{(I)} S = \pi \times \frac{۱}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{۱}{h} + h^۲} = \frac{\pi\sqrt{h^۳ + ۱}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{۳h^۲}{۲\sqrt{h^۳ + ۱}} \times h - \sqrt{h^۳ + ۱}}{h^۲} = \frac{\pi}{h^۲}\left(\frac{۳h^۳ - ۲h^۳ - ۲}{۲\sqrt{h^۳ + ۱}}\right) = \frac{\pi}{h^۲}\left(\frac{h^۳ - ۲}{۲\sqrt{h^۳ + ۱}}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow h^۳ - ۲ = ۰ \Rightarrow h^۳ = ۲ \Rightarrow h = \sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[۳]{۲}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{۳}$، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

۱۰۴ گزینه ۲

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 به x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبهٔ مقدار a کافی است معادلهٔ $\frac{f(25)-f(4)}{25-4} = f'(a)$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۴ به ۲۵} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{4}}{21} = \frac{5-2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4a = 49 \Rightarrow a = \frac{49}{4} = 12/25$$

۱۰۵ گزینه ۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_0, y_0) عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow{x=2} y(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(2) = \frac{2^2 - (2 \times 2)}{(2-1)^2} = \frac{4-4}{1} = 0$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(2, 4)$ به‌صورت زیر است:

$$y - y(2) = y'(2)(x-2) \xrightarrow[x=2]{y'(2)=0} y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(2, 4)$؛ یعنی خط $y = 4$، دارای عرض ۴ است.

۱۰۶ گزینه ۳

گام اول

الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱- می‌شود.

ب) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) معادلهٔ خط به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط داده‌شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می‌آوریم.

$$x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می‌کنیم خط در نقطهٔ $x = x_0$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$$

$$\Rightarrow 3{x_0}^2 + 6x_0 + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

$$y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

پس نقطهٔ تماس دارای مختصات $(-1, 3)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 3 + 3 \Rightarrow y = -3x$$

از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(2, -6)$ در معادلهٔ خط صدق می‌کند.

۱۰۷ گزینه ۴

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازهٔ $(1, 4)$ پیوسته است. برای یافتن نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادلهٔ $f'(x) = 0$ را حل کنیم. می‌دانیم این معادله روی بازهٔ $(1, 4)$ ریشه خواهد داشت درصورتی‌که رابطهٔ $f'(1)f'(4) < 0$ برقرار باشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8$$

$$\begin{cases} f'(1) = 3 + 2a - 8 = 2a - 5 \\ f'(4) = 48 + 8a - 8 = 8a + 40 \end{cases} \xrightarrow{f'(1)f'(4)<0} 8(a+5)(2a-5) < 0$$

$$\Rightarrow -5 < a < 2/5$$

۱۰۸ | گزینه ۳

گام اول

الف) $f'(1)$ موجود است؛ یعنی در $x=1$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.

ب) تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

ج) تابع در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(1) = f'_-(1)$$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه $1-\sqrt{2}<1$ است، برای محاسبهٔ $f\left(1-\sqrt{2}\right)$ باید از ضابطهٔ مربوط به xهای کوچک‌تر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x-\dfrac{1}{x}\right) = 1-1=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+ax+b = a+b+1 \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)} a+b+1=0 \Rightarrow a+b=-1\,(\mathrm{I})$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطهٔ $x=1$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x^2} & ; x>1 \\ 2x+a & ; x<1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \quad\Rightarrow\quad 1+1=2+a \quad\Rightarrow\quad a+2=2 \quad\Rightarrow\quad a=0$$

با جایگذاری در رابطهٔ I مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$a+b=-1 \quad\Rightarrow\quad 0+b=-1 \quad\Rightarrow\quad b=-1$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به ازای $x<1$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$x<1 \ :\ f(x)=x^2-1$$

$$\Rightarrow\quad f\left(1-\sqrt{2}\right) = \left(1-\sqrt{2}\right)^2-1 = 1-2\sqrt{2}+2-1 = 2-2\sqrt{2}$$

۱۰۹ گزینه ۲

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱$ تا $x_۲$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

داریم:

$$f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۴$ تا $x=۱۲$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲۴+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{۸+۱}}}{۸}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲۵}}-\frac{۱}{\sqrt{۹}}}{۸}=\frac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=\frac{\frac{۳-۵}{۱۵}}{۸}=\frac{-\frac{۲}{۱۵}}{۸}=-\frac{۱}{۶۰}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(۴)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۰-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{۲x+۱}=-\frac{۱}{(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}}$$

$$x=۴ \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } =f'(۴)=-\frac{۱}{(۸+۱)\sqrt{۸+۱}}=-\frac{۱}{۹\times ۳}=-\frac{۱}{۲۷}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x)=-\frac{۱}{۶۰}-\left(-\frac{۱}{۲۷}\right)=-\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۲۷}=\frac{-۹+۲۰}{۵۴۰}=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

۱۱۰ گزینه ۲

وقتی $x \to ۲$، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \to ۲$، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = ۲$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۲a + b = ۰ \qquad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x - \sqrt{۳x - ۲}}{ax + b} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۱ - \frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a} = \frac{۱ - \frac{۳}{۲\times ۲}}{a} = \frac{۱ - \frac{۳}{۴}}{a} = \frac{۱}{۴a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ (I) مقدار b برابر است با:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + b = ۰ \Rightarrow b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

۱۱۱ گزینه ۴

گام اول

الف) برای این که تابع در $x = ۳$ پیوسته باشد، باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳)$$

ب) وقتی $x \to ۳^+$ حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ شده و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حاصل حد راست تابع را در نقطهٔ $x = ۳$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} ax - ۳a - \frac{۳}{۸} = ۳a - ۳a - \frac{۳}{۸} = -\frac{۳}{۸}$$

$$f(۳) = ۳a - ۳a - \frac{۳}{۸} = -\frac{۳}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱ - \sqrt{x - \sqrt{x + ۱}}}{x - ۳} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-\frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{۲\sqrt{x - \sqrt{x+۱}}}}{۱} = -\frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}{۲\sqrt{۳ - ۲}}$$

$$= -\frac{۱ - \frac{۱}{۴}}{۲} = -\frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = -\frac{۳}{۸}$$

مشاهده می‌شود فارغ از اینکه مقدار a چند باشد، حاصل حد راست، حد چپ و مقدار تابع در نقطهٔ $x = ۳$ برابر است. پس به ازای هر مقدار a، تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ پیوسته است.

۱۱۲ گزینه ۱

$$f'(x) = ۱ + \frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۲-x}{\sqrt{۴x-x^۲}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴x-x^۲} = x-۲ \quad (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x-۲ \geq ۰$ باشد، یعنی: $x \geq ۲$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴x - x^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۸ = ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۴+۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲+\sqrt{۲} & \text{قابل‌قبول} \\ x = \frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲-\sqrt{۲} & (x \geq ۲ \ \text{غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(۲+\sqrt{۲}) = ۲+\sqrt{۲} + \sqrt{۴(۲+\sqrt{۲}) - (۲+\sqrt{۲})^۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۲ + ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A(۲+\sqrt{۲}, ۲+۲\sqrt{۲}) \quad \text{ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = ۰$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|۲+\sqrt{۲}-۲-۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱$$

۱۱۳ گزینه ۳

گام اول

الف) مشتق تابع $y = \sqrt{u}$ از رابطهٔ $y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.

ب) مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^۲(x)}$$

گام دوم

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۳(۲x+۱)-۲(۳x-۱)}{(۲x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}} = \frac{\frac{۵}{(۲x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}} \Rightarrow f'(۲) = \frac{\frac{۵}{(۴+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۶-۱}{۴+۱}}} = \frac{\frac{۵}{۵^۲}}{۲\sqrt{\frac{۵}{۵}}} = \frac{\frac{۱}{۵}}{۲} = \frac{۱}{۱۰}$$

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x^2+x-2|$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$f(x)=(x-1)|x^2+x-2|=(x-1)|(x+2)(x-1)|$$

$x=-2$ و $x=1$ ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2(x+2) & ;x\geq 1 \text{ یا } x\leq -2\\ -(x-1)^2(x+2) & ;-2<x<1\end{cases}$$

تابع در نقاط $x=-2$ و $x=1$ پیوسته است پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases}(x-1)(3x+3) & ;x>1 \text{ یا } x<-2\\ -(x-1)(3x+3) & ;-2<x<1\end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ را به دست می‌آوریم:

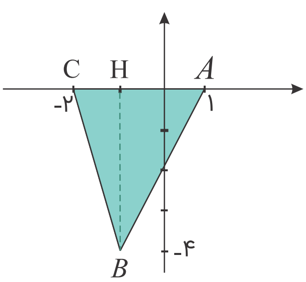
$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x>1,\ x<-2\ :\ (x-1)(3x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\ \text{غ ق ق}\\ -2<x<1\ :\ -(x-1)(3x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه $f'_{-}(1)=f'_{+}(1)=0$ است پس $x=1$ نیز نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است. داریم:

$$\left.\begin{matrix}f'_{+}(-2)=-(-2-1)(-3)=-9\\ f'_{-}(-2)=(-2-1)(-3)=9\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'_{+}(-2)\neq f'_{-}(-2)\Rightarrow f'(-2)\ \text{وجود ندارد}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطهٔ بحرانی $A(1,0)$، $B(-1,-4)$ و $C(-2,0)$ است. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}BH\times AC=\frac{1}{2}\times 4\times 3=\frac{12}{2}=6$$



۱۱۵ گزینه ۲

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

باتوجه‌به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x=۵ \text{ تا } x=۹ = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵} = \frac{\sqrt{۹^۲+۱۴۴}-\sqrt{۵^۲+۱۴۴}}{۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴} = \frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴} = \frac{۱۵-۱۳}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۱۱۶ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x+۱+(g(x))^۵ \Rightarrow f'(x) = ۱+۵g'(x)(g(x))^۴$$

$$\Rightarrow f'(۰) = ۱+۵g'(۰)(g(۰))^۴$$

باتوجه‌به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(۰)=g(۰)=۱} ۱ = ۱+۵g'(۰)(۱)^۴ \Rightarrow ۵g'(۰)=۰ \Rightarrow g'(۰)=۰$$

در محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $f''(x)$ با عبارت $g'(x)(g(x))^۴$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(۰)=۰$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفرشوندهٔ تابع $f'(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(۰) = ۰+۵g''(۰)(g(۰))^۴$$

$$\xrightarrow[g(۰)=۱]{x=۰} f''(۰) = ۵g''(۰)(۱)^۴ = ۵g''(۰)$$

۱۱۷ گزینه ۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)\,g(۲+\Delta x) - f(۲)\,g(۲)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(fg)(۲+\Delta x) - (fg)(۲)}{\Delta x} = (fg)'(۲)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x) = (۲x - ۱)\sqrt{۲x} + \left(x^۲ - x\right)\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(۲) = (۴ - ۱)\sqrt{۴} + \left(۲^۲ - ۲\right)\frac{۱}{\sqrt{۴}} = (۳ \times ۲) + \frac{۲}{۲} = ۶ + ۱ = ۷$$

۱۱۸ گزینه ۴

نقطهٔ $M(\alpha, \sqrt{۲\alpha + ۹})$ را بر روی منحنی $y = \sqrt{۲x + ۹}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - ۴)^۲ + \left(\sqrt{۲\alpha + ۹} - ۰\right)^۲} = \sqrt{\alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۶ + ۲\alpha + ۹} = \sqrt{\alpha^۲ - ۶\alpha + ۲۵}$$

برای یافتن کمترین فاصله، ابتدا معادلهٔ $(MA)'_\alpha = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$(MA)'_\alpha = \frac{۲\alpha - ۶}{۲\sqrt{\alpha^۲ - ۶\alpha + ۲۵}}$$

$$(MA)'_\alpha = ۰ \Rightarrow ۲\alpha - ۶ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۳$$

بنابراین کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y = \sqrt{۲x + ۹}$ برابر است با:

$$(MA)_{min} = \sqrt{۹ - ۶(۳) + ۲۵} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۱۱۹ گزینه ۲

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$$

ب) اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)$ در همسایگی نقطهٔ $x=-۱$ محاسبه می‌شود بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-۱}\ |x|=-x\ \Rightarrow\ f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)=f\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول می‌توان چنین نوشت:

$$y=f\left(\sqrt{۳-x}\right)\ \Rightarrow\ y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}f'\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

$$\Rightarrow\ y'(-۱)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳+۱}}f'\left(\sqrt{۳+۱}\right)=\frac{-۱}{۲\times ۲}f'(۲)$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=-\frac{۱}{۳}}\ y'(-۱)=\left(-\frac{۱}{۴}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۱۲}$$

گزینه ۴

روش اول:

تابع $y=[f(x)]$ به ازای مقادیری که عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است؛ بنابراین تابع روی بازه‌ای مشتق‌پذیر است که خروجی آن فقط یک مقدار باشد.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x\in[0,1] \Rightarrow 0\leq x\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x}\in[1,\infty)$$

$x=0$ ریشهٔ مخرج کسر است. به ازای $0<x\leq 1$، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع در این بازه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x\in(-1,0) \Rightarrow -1<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}\in(-\infty,-1)$$

در این بازه، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x\in[1,+\infty) \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow 0<\frac{1}{x}\leq 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases}0 & ;0<\frac{1}{x}<1\\ 1 & ;\frac{1}{x}=1\end{cases}$$

تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته است بنابراین روی بازهٔ $[1,+\infty)$ مشتق‌ناپذیر می‌شود.

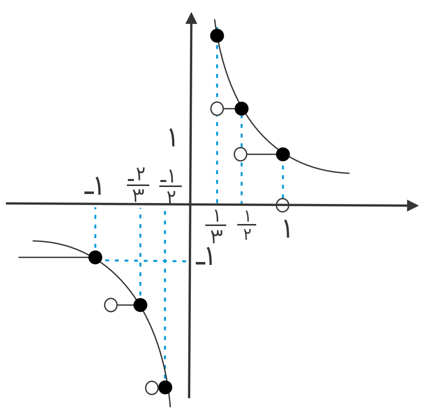
بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x\in(-\infty,-1) \Rightarrow x<-1 \Rightarrow -1<\frac{1}{x}<0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=-1$$

تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ روی بازهٔ $(-\infty,-1)$، یک تابع ثابت است پس روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

روش دوم:

با رسم نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$، بازهٔ مشتق‌پذیری آن را مشخص می‌کنیم:



همان‌طوری که مشاهده می‌کنید از میان گزینه‌ها، تابع تنها در بازه $(-\infty, -1)$ برابر تابع ثابت $f(x) = -1$ است، درنتیجه روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

۱۲۱

گزینه ۱

برای تعیین وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع در اطراف نقطهٔ $x = 0$، تابع y' را قبل و بعد از این نقطه تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}$$

باتوجه‌به اینکه $f'(0) = 0$ است پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = 0$ دارای مماس افقی است. داریم:

x		0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

نقطهٔ $x = 0$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است پس گزینهٔ ۱ صحیح می‌باشد.

۱۲۲

گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطهٔ $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > 0 \\ f(x) - f(c) \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطهٔ $x = c$ داریم:

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \xrightarrow{(*)} f'_{+}(c) \geq 0$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x = c$ الزاماً نامنفی است.

۱۲۳ گزینه ۲

گام اول

می‌دانیم $g(f(x)) = \text{gof}\,(x)$ و $(\text{gof})'\,(x) = g'(f(x))f'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y = \text{fogoh}\,(x)$ را در نقطهٔ $x = ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = \text{fogoh}\,(x) = f\,(g\,(h\,(x)))$$

$$\Rightarrow y' = (g\,(h\,(x)))' \times f'\,(g\,(h\,(x))) = h'\,(x) \times g'\,(h\,(x)) \times f'\,(g\,(h\,(x)))$$

$$\xrightarrow{x=۰} y'\,(۰) = h'\,(۰) \times g'\,(h\,(۰)) \times f'\,(g\,(h\,(۰)))$$

$$\xrightarrow{h(۰)=۱\ ,\ \ ۲h'(۰)=۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times g'\,(۱)\,f'\,(g\,(۱))$$

$$\xrightarrow{-g(۱)=۱\ ,\ \ -g'(۱)=۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times (-۱)\,f'\,(-۱)$$

$$\xrightarrow{f'(-۱)=۱} \quad y'(۰) = \frac{۱}{۲}\,(-۱)\,(۱) = -\frac{۱}{۲}$$

۱۲۴ گزینه ۱

نقطهٔ $B(x, \sqrt{۲x + ۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x - ۵)^۲ + (\sqrt{۲x + ۷} - ۰)^۲}$$
$$= \sqrt{x^۲ - ۱۰x + ۲۵ + ۲x + ۷} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{۲x - ۸}{۲\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}} = \frac{x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}}$$
$$(AB)' = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow B(۴, \sqrt{۱۵})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(۵, ۰), B(۴, \sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB = \sqrt{(۵ - ۴)^۲ + (۰ - \sqrt{۱۵})^۲} = ۴$$

گزینه ۴

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییرات مقادیر $f(x)$ بر روی بازهٔ مشخص‌شده است. مقادیر $f(x)$ بر روی یک بازه بین ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[-۳, ۱]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را بر روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌یابیم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x) = ۰$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^۳ - ۱۲x + ۸ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲ = ۳(x^۲ - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۲ \, , \, x = -۲ \xrightarrow{x \in [-۳,۱]} x = -۲$$

$$f(-۳) = (-۳)^۳ - ۱۲(-۳) + ۸ = -۲۷ + ۳۶ + ۸ = ۱۷$$

$$f(-۲) = (-۲)^۳ - ۱۲(-۲) + ۸ = -۸ + ۲۴ + ۸ = ۲۴ \Rightarrow \text{max مطلق}$$

$$f(۱) = ۱^۳ - ۱۲(۱) + ۸ = ۱ - ۱۲ + ۸ = -۳ \Rightarrow \text{min مطلق}$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به‌صورت $[-۳, ۲۴]$ است.

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
x^2-3	+	0	-	0	+

$$\Rightarrow |x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادلهٔ $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & ; x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} & : \ 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{غ‌قق} \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} & : \ -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطهٔ $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{3}) = 6 \quad , \quad f'_-(\sqrt{3}) = -6 \Rightarrow f'_+(\sqrt{3}) \neq f'_-(\sqrt{3})$$

$$f'_+(-\sqrt{3}) = -6 \quad , \quad f'_-(-\sqrt{3}) = 6 \Rightarrow f'_+(-\sqrt{3}) \neq f'_-(-\sqrt{3})$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

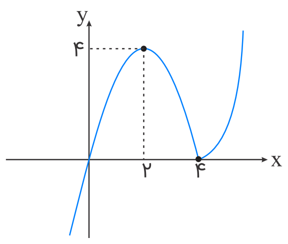
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	max	min	max	min		

بنابراین مجموعه نقاط ماکسیمم نسبی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-\sqrt{3}, 1\}$ است.

۱۲۷ گزینه ۴

$$f(x) = x|x-۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^۲ & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



این تابع در $(۴, ۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲-۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۱۲۸ گزینه ۲

$$g(x) = f(۴-x^۲) \Rightarrow g'(x) = -۲xf'(۴-x^۲)$$

$$\Rightarrow g''(x) = -۲(f'(۴-x^۲) + x(-۲x)f''(۴-x^۲))$$

$$\Rightarrow g''(\sqrt{۳}) = -۲(f'(۱) - ۶f''(۱)) = -۲(-۵ - ۶ \times (-۱)) = -۲$$

۱۲۹ گزینه ۴

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - x^۳ \geq -x^۳ \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq \sqrt[۳]{-x^۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq -x \Rightarrow x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq ۰$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

۱۳۰ گزینه ۴

$y = \sqrt{۲۱ - x^{۲} + ۴x}$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[۵, ۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶) - f(۵)}{۶ - ۵} = \frac{\sqrt{۲۱ - ۳۶ + ۲۴} - \sqrt{۲۱ - ۲۵ + ۲۰}}{۱} = \frac{\sqrt{۹} - \sqrt{۱۶}}{۱} = -۱$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y' = \frac{-۲x + ۴}{۲\sqrt{۲۱ - x^{۲} + ۴x}} = \frac{\cancel{۲}(-x + ۲)}{\cancel{۲}\sqrt{۲۱ - x^{۲} + ۴x}} = \frac{-x + ۲}{\sqrt{۲۱ - x^{۲} + ۴x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\frac{-x + ۲}{\sqrt{۲۱ - x^{۲} + ۴x}} = -۱ \Rightarrow x - ۲ = \sqrt{۲۱ - x^{۲} + ۴x} \ (*)$$
$$\xrightarrow{\text{به توان } ۲} x^{۲} - ۴x + ۴ = ۲۱ - x^{۲} + ۴x \Rightarrow ۲x^{۲} - ۸x - ۱۷ = ۰$$
$$\Rightarrow x = \frac{۸ \pm \sqrt{۲۰۰}}{۴} = ۲ \pm \frac{۵}{۲}\sqrt{۲} \xrightarrow[(*)]{x \geq ۲} x = ۲ + \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

۱۳۱ گزینه ۲

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

ج) مختصات نقطهٔ تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y = x^{۳} - x^{۲} \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۲x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(۱) = ۳ - ۲ = ۱$$
$$x = ۱ \Rightarrow y(۱) = (۱)^{۳} - (۱)^{۲} = ۱ - ۱ = ۰$$
$$y - y(۱) = y'(۱)(x - ۱) \Rightarrow y - ۰ = x - ۱ \Rightarrow y = x - ۱$$

سپس با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط $y = x - ۱$ و معادلهٔ منحنی، مختصات نقطهٔ تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x - ۱ = x^{۳} - x^{۲} \Rightarrow x - ۱ = x^{۲}(x - ۱) \Rightarrow (x - ۱)(۱ - x^{۲}) = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۱)(۱ - x)(۱ + x) = ۰ \xrightarrow{x \neq ۱} ۱ + x = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

بنابراین $x_A = -۱$ است و داریم:

$$y_A = (-۱)^{۳} - (-۱)^{۲} = -۱ - ۱ = -۲$$

۱۳۲ گزینه ۱

یکی از اعداد را x و دیگری را y می‌نامیم. داریم: $y = ۲x - ۶$
می‌خواهیم $x.y$ مینیمم شود پس این حاصل‌ضرب را به‌صورت تابعی برحسب x نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x.y = x(۲x - ۶) = ۲x^۲ - ۶x$$

$$\Rightarrow f'_x = ۴x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۴x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{y=۲x-۶} y = ۲(\frac{۳}{۲}) - ۶ = ۳ - ۶ = -۳$$

مجموع دو عدد برابر است با:

$$x + y = \frac{۳}{۲} - ۳ = -\frac{۳}{۲}$$

۱۳۳ گزینه ۱

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.
ب) مشتق تابع $gof(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع gof را در نقطهٔ $x = ۰$ به‌طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۴x \Rightarrow f'(x) = ۴ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_+(۰) = f'_+(۰)g'_+(f(۰)) = ۴(\frac{۳}{۴} + a) = ۳ + ۴a$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_-(۰) = f'_-(۰)g'_-(f(۰)) = ۲(\frac{۳}{۴} - a) = \frac{۳}{۲} - ۲a$$

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، تابع gof در $x = ۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \Rightarrow ۶a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۱۳۴ گزینه ۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف‌شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطهٔ مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطهٔ آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & ;\ \text{گویا } x \\ ۰ & ;\ \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow x^۲=۰ \Rightarrow x=۰$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & ;\ \text{گویا } x \\ ۰ & ;\ \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow ۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=۰$ مشتق دارد.

۱۳۵ گزینه ۱

به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲\geq ۰ \Rightarrow -x^۲\leq ۰ \Rightarrow x^۳-x^۲\leq x^۳ \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^۳-x^۲}\leq \sqrt[۳]{x^۳}$$
$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۳-x^۲}\leq x \Rightarrow -x+\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}\leq ۰$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y=-x+\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}$ روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

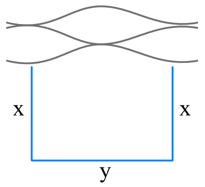
۱۳۶ گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$
$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}} \frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۱۳۷ گزینه ۲

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + ۲x = ۸۸ \Rightarrow y = ۸۸ - ۲x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول در عرض آن است پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(۸۸ - ۲x) = ۸۸x - ۲x^۲$$

برای محاسبهٔ بیشترین مساحت، معادلهٔ $S'_x = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = ۸۸ - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow ۴x = ۸۸ \Rightarrow x = ۲۲ \ , \ y = ۸۸ - ۴۴ = ۴۴$$

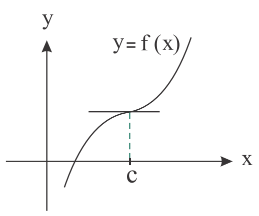
بنابراین:

$$S_{max} = xy = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

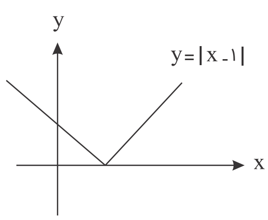
۱۳۸ گزینه ۲

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.

گزینهٔ اول: نقطهٔ $x = c$ در نمودار زیر، یک نقطهٔ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.



گزینهٔ سوم: نقطهٔ $x = ۱$ در تابع $y = |x - ۱|$ یک نقطهٔ بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف‌نشده است.



گزینهٔ چهارم: نقطهٔ $x = ۱$ اکسترمم نسبی تابع $y = |x - ۱|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.

بنابراین هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، قطعاً یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

۱۳۹ گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[-۴,۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x \Rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

x		-۳		۵	
f'	+	۰	−	۰	+
	↗	max	↘	min	↗

$[-۴,۳]$ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $=-۳,-۴,۳$

$$\left.\begin{aligned} f(-۴)&=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳}\\ f(-۳)&=\frac{(-۳)^{۳}}{۳}-۹+۴۵=۲۷\\ f(۳)&=\frac{۳^{۳}}{۳}-۹-۴۵=-۴۵\end{aligned}\right\}\xrightarrow{x\in[-۴,۳]}\begin{cases} y_{min}=-۴۵\\ y_{max}=۲۷\end{cases}$$

۱۴۰ گزینه ۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

$f'(\alpha)$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=$ آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1=2$ تا $x_2=5$

$$=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{\frac{5}{5-1}-\frac{2}{2-1}}{3}=\frac{\frac{5}{4}-2}{3}=\frac{\frac{5-8}{4}}{3}=\frac{-\frac{3}{4}}{3}=\frac{-1}{4}$$

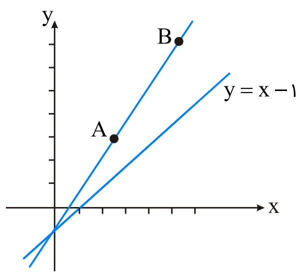
$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

آهنگ لحظه‌ای در $x=\alpha$ $=f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}$

$$\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{\Delta f}{\Delta x}\Rightarrow -\frac{1}{(\alpha-1)^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow(\alpha-1)^2=4\Rightarrow\begin{cases}\alpha-1=2\Rightarrow\alpha=3\\ \alpha-1=-2\Rightarrow\alpha=-1\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

گزینه ۲

دو نقطهٔ A و B و خط داده‌شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $y = x - ۱$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - ۱$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y - ۳ = \frac{۷ - ۳}{۴ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو خط، نقطهٔ برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۲x - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow M(۰, -۱)$$

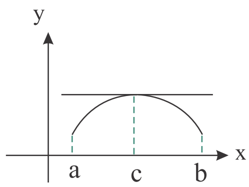
بنابراین طول نقطهٔ M برابر با صفر است.

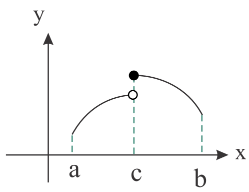
گزینه ۳

با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.

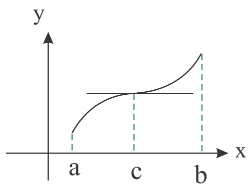
گزینهٔ اول: اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینهٔ دوم: اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد، باتوجه‌به اینکه f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد که در هر دو حالت c نقطهٔ بحرانی f نیز می‌باشد.





گزینهٔ سوم: فرض می‌کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، باتوجه‌به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:



گزینهٔ چهارم: باتوجه‌به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینهٔ دوم، این نقطه یک نقطهٔ بحرانی تابع f است.

۱۴۳ گزینه ۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m\left(x - x_۱\right)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطهٔ $A\left(\alpha, \dfrac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبهٔ مشتق تابع در این نقطه، معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{۲\left(x + ۱\right) - \left(۲x - ۱\right)}{\left(x + ۱\right)^۲}$$

$$\xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱}\right)} y'_A = \frac{۲\left(\alpha + ۱\right) - \left(۲\alpha - ۱\right)}{\left(\alpha + ۱\right)^۲} = \frac{۲\alpha + ۲ - ۲\alpha + ۱}{\left(\alpha + ۱\right)^۲} = \frac{۳}{\left(\alpha + ۱\right)^۲}$$

$$y - y_A = y'_A\left(x - x_A\right) \Rightarrow y - \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = \frac{۳}{\left(\alpha + ۱\right)^۲}\left(x - \alpha\right)$$

خط مماس از نقطهٔ $(-۱, ۰)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x = -۱, y = ۰} ۰ - \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = \frac{۳}{\left(\alpha + ۱\right)^۲}\left(-۱ - \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \ -\frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = -\frac{۳\left(\alpha + ۱\right)}{\left(\alpha + ۱\right)^۲} \ \Rightarrow \ \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = \frac{۳}{\alpha + ۱}$$

دقت کنید که نقطهٔ $x = -۱$ عضو دامنهٔ تابع $y = \dfrac{۲x - ۱}{x + ۱}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است بنابراین $\alpha \neq -۱$ است (زیرا نقطهٔ $A\left(\alpha, \dfrac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد) پس می‌توان عبارت $\alpha + ۱$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$۲\alpha - ۱ = ۳ \ \Rightarrow \ ۲\alpha = ۴ \ \Rightarrow \ \alpha = ۲$$

۱۴۴ گزینه ۴

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(-۲ + h) + ۳}{h} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} f(-۲) = -۳ \\ f'(-۲) = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\left(x^۲ f(x)\right)' = ۲xf(x) + x^۲ f'(x)$$

$$\xrightarrow{x = -۲} -۴f(-۲) + ۴f'(-۲) = -۴(-۳) + ۴\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱۲ + ۲ = ۱۴$$

۱۴۵ گزینه ۳

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \quad \Rightarrow \quad y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه‌به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \quad \Rightarrow \quad u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = (f(x) + xf'(x))\, f'(xf(x))$$

اکنون ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$$

بنابراین داریم:

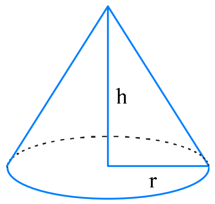
$$y' = \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{xf(x)+۲}}\right)$$

$$= \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۳}{۲}x - x\sqrt{x+۲} + ۲}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y'(۲) = \left(\frac{۳}{۲} - ۲ - \frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{۳ - ۴ + ۲}}\right) = (-۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

گزینه ۱

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = ۱ \Rightarrow r = ۱ - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h \xrightarrow{r=۱-h} V = \frac{۱}{۳}\pi (۱-h)^{۲} h = \frac{۱}{۳}\pi (h^{۳} - ۲h^{۲} + h)$$

برای ماکسیمم کردن حجم مخروط، ابتدا معادلهٔ $V'_h = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = \frac{۱}{۳}\pi (۳h^{۲} - ۴h + ۱)$$

$$V'_h = ۰ \Rightarrow ۳h^{۲} - ۴h + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h_۱ = ۱ & \text{غ ق ق } (\text{زیرا } r + h = ۱) \\ h_۲ = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

بنابراین به ازای $h = \frac{۱}{۳}$، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{max} = \frac{۱}{۳}\pi \left((\frac{۱}{۳})^{۳} - ۲(\frac{۱}{۳})^{۲} + \frac{۱}{۳} \right) = \frac{۴\pi}{۸۱}$$

۱۴۷ گزینه ۲

گام اول

می‌دانیم $gof\,(x)=g(f(x))$ و $(gof)'\,(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنهٔ تعریف تابع $gof\,(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، ابتدا ضابطهٔ $gof\,(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطهٔ $g\,(f\,(x))$ کافی است در ضابطهٔ $g\,(x)$ به‌جای متغیر x، ضابطهٔ $f\,(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f=(-۱,۱)\,,D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_{gof}=(-۱,۱)$$

$$f\,(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}},g\,(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$gof\,(x)=g\,(f\,(x))=\frac{f\,(x)}{\sqrt{۱+(f\,(x))^۲}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{\frac{۱-x^۲}{۱-x^۲}+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}}=x\quad;\ -۱<x<۱$$

$$\Rightarrow y=gof\,(x)=x\Rightarrow f'\,(x)\,g'\,(f\,(x))=y'=۱\ ;-۱<x<۱$$

۱۴۸ گزینه ۱

نقطهٔ $M\,(\alpha,\alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y=x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA=\sqrt{(\alpha-۸)^۲+(\alpha\sqrt{\alpha}-۰)^۲}=\sqrt{\alpha^۲-۱۶\alpha+۶۴+\alpha^۳}=\sqrt{\alpha^۳+\alpha^۲-۱۶\alpha+۶۴}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ MA، ابتدا معادلهٔ $(MA)'_\alpha=۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'_\alpha=\frac{۳\alpha^۲+۲\alpha-۱۶}{۲\sqrt{\alpha^۳+\alpha^۲-۱۶\alpha+۶۴}}$$

$$(MA)'_\alpha=۰\Rightarrow ۳\alpha^۲+۲\alpha-۱۶=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۲\\ \alpha=-\frac{۱۶}{۶}\quad (*)\text{غ ق ق}\end{cases}$$

* دامنهٔ تابع $y=x\sqrt{x}$ به‌صورت بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.

بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y=x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{min}=\sqrt{(۲-۸)^۲+(۲\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳۶+۸}=\sqrt{۴۴}=۲\sqrt{۱۱}$$

۱۴۹ گزینه ۳

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲} = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{\left(۲+h+\frac{۱}{۲+h}\right)-\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h} = \frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۹}h \xrightarrow{\times ۹} ۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲} = ۸h$$

$$\Rightarrow h+\frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h(h+۲)+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h^۲+۲h+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h^۲+۴h+۱۸ = ۹h+۱۸ \Rightarrow ۲h^۲-۵h = ۰ \Rightarrow h(۲h-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h=۰ & \text{غ ق ق} \\ h=\frac{۵}{۲}=۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h=۰$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

۱۵۰ گزینه ۱

گام اول

الف) دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+2)y = mx \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{m}{m+2}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+2}\right)$ است. کافی است ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{m}{m+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2}$$

می‌دانیم $-1 < \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} < 1$ همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m+2} > -1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{m+m+2}{m+2} > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -1 \\ \frac{m}{m+2} < 1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m-m-2}{m+2} < 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های دو معادلهٔ فوق داریم: $m > -1$

۱۵۱ گزینه ۱

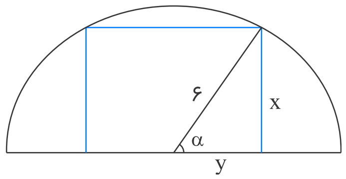
به ازای $x=1$ عبارت $(x-1)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x) = \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ نیز در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(1)$ کافی است مشتق عبارت $(x-1)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x=1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \xrightarrow[\text{در نقطهٔ } x=1]{\text{عبارت } (x-1) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$$

$$\Rightarrow \quad f'(1) = \frac{\sqrt[5]{3-2}}{(5-3)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{16}$$

۱۵۲ گزینه ۴

راه‌حل اول:

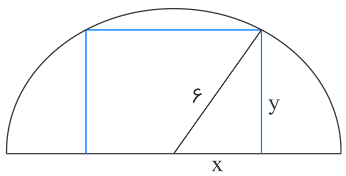


$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x\,(۲y) = ۲\,(۳۶)\sin\alpha\cos\alpha = ۳۶\sin ۲\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin ۲\alpha = ۱$ باشد. بنابراین: $S_{max} = ۳۶$

راه‌حل دوم:



$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S' = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{-۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶ - x^۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$S_{max} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

۱۵۳ گزینه ۴

$x = ۳$ آهنگ لحظه‌ای در $= f'(۳)$

$$f(x) = x^۳ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷ \qquad (۱)$$

آهنگ متوسط تغییر $= \dfrac{f(۳ + \Delta x) - f(۳)}{\Delta x} = \dfrac{f(۳/۱) - f(۳)}{۰/۱} = \dfrac{(۳/۱)^۳ - ۳^۳}{۰/۱} = ۲۷/۹۱ \qquad (۲)$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} ۲۷/۹۱ - ۲۷ = ۰/۹۱$$

۱۵۴ گزینه ۲

گام اول

الف) باتوجه‌به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $0 \leq x - [x] < 1$

ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x < y$ داریم: $f(x) < f(y)$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

$$gof(x) = g(f(x)) = 2^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-1 < f(x) \leq 0 \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } g} g(-1) < g(f(x)) \leq g(0)$$

$$\Rightarrow 2^{-1} < 2^{[x]-x} \leq 2^{0} \Rightarrow \frac{1}{2} < 2^{[x]-x} \leq 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{2} < gof \leq 1$$

بنابراین تابع gof دارای ماکسیمم و فاقد مینیمم است.

۱۵۵ | گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) منظور از نمو متغیر همان Δx است، پس داریم: $\Delta x = ۰/۲۱$

ج) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = ۱$ را به دست می‌آوریم:

$$x_۲ = ۱/۲۱ \text{ تا } x_۱ = ۱ \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۱/۲۱) - f(۱)}{۱/۲۱ - ۱}$$

$$= \frac{\sqrt{۱/۲۱} - \sqrt{۱}}{۰/۲۱} = \frac{۱/۱ - ۱}{۰/۲۱} = \frac{۰/۱}{۰/۲۱} = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = ۱$، ابتدا باید ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$x = ۱ \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } = f'(۱) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱}} = \frac{۱}{۲}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(۱) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱۰}{۲۱} = \frac{۲۱ - ۲۰}{۴۲} = \frac{۱}{۴۲}$$

۱۵۶ گزینه ۴

گام اول

الف) تابع $y=[f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

ب) هرکدام از دو تابع $\left[x+\frac{1}{3}\right]$ و $[x]$ روی بازهٔ $(0,3)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x)=\left[x+\frac{1}{3}\right]+[x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(0,3)$، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

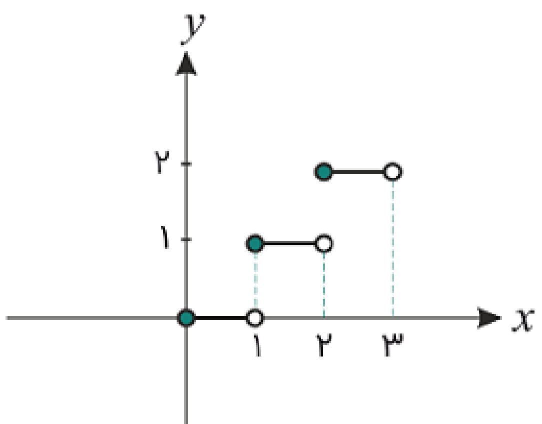
$$1)\quad y=[x]:\quad x\in\mathbb{Z}\,,\ x\in(0,3)\quad\Rightarrow\quad x=1\,,\ x=2$$

$$2)\quad y=\left[x+\frac{1}{3}\right]:\quad x+\frac{1}{3}\in\mathbb{Z}\,,\ x\in(0,3)\quad\Rightarrow x=\frac{2}{3}\,,\ x=\frac{5}{3}\,,\ x=\frac{8}{3}$$

بنابراین تابع $f(x)$ درمجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

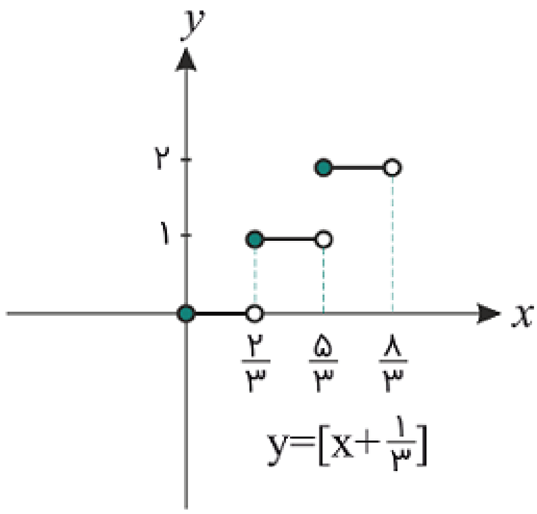
روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y=\left[x+\frac{1}{3}\right]$ و $y=[x]$، نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



y=[x]

نقاط ناپیوستگی: $x=1\,,\ x=2$



نقاط ناپیوستگی: $x=\frac{۸}{۳}$, $x=\frac{۵}{۳}$, $x=\frac{۲}{۳}$

بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

۱۵۷ گزینه ۱

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به‌جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.

ب) نقطهٔ $c\in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x)=\frac{x^۲-۲x}{x+a}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-a\}$$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۲)(x+a)-(x^۲-۲x)}{(x+a)^۲}=\frac{x^۲+۲ax-۲a}{(x+a)^۲}$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $f'(x)=۰$ دارای ریشهٔ ساده است.

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{x^۲+۲ax-۲a}{(x+a)^۲}=۰\Rightarrow x^۲+۲ax-۲a=۰$$

این معادلهٔ درجه‌دو ریشهٔ ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta>۰$ باشد، پس داریم:

$$(۲a)^۲-۴(۱)(-۲a)>۰\Rightarrow ۴a^۲+۸a=۴a(a+۲)>۰$$

a		-۲		۰	
$۴a(a+۲)$	+	۰	−	۰	+

بنابراین به‌ازای $a<-۲$ یا $a>۰$، تابع f دارای اکسترمم نسبی است.

۱۵۸ گزینه ۳

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

چون دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳} - x^۲ \Rightarrow f'(x) = x^۳ - x^۲ - ۲x = x(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x(x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازهٔ $[-۱, ۳]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $x = ۰, ۲, -۱, ۳$ به دست می‌آوریم:

$$f(-۱) = \frac{(-۱)^۴}{۴} - \frac{(-۱)^۳}{۳} - (-۱)^۲ = -\frac{۵}{۱۲}$$

$$f(۰) = ۰$$

$$f(۲) = \frac{۲^۴}{۴} - \frac{۲^۳}{۳} - ۲^۲ = -\frac{۸}{۳}$$

$$f(۳) = \frac{۳^۴}{۴} - \frac{۳^۳}{۳} - ۳^۲ = \frac{۹}{۴}$$

کمترین مقدار تابع روی بازهٔ $[-۱, ۳]$ برابر $y = -\frac{۸}{۳}$ است.

۱۵۹ گزینه ۱

$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲)) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(\frac{۴+۱}{۲-۱}) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(۵) \quad (۱)$$

$$g(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow g'(x) = \frac{۲(x-۱) - (۲x+۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow g'(۲) = -۳$$

$$(۱) : ۶ = -۳f'(۵) \Rightarrow f'(۵) = -۲$$

۱۶۰ گزینه ۳

گام اول

الف) $f'_+(\circ)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ و $f'_-(\circ)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ است.

ب) می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq \circ \\ -x & ; x < \circ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به ازای $x>\circ$ و $x<\circ$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطهٔ $x=\circ$ محاسبه می‌کنیم.

$$x > \circ : |x| = x \ , \ [x] = \circ \Rightarrow f(x) = x \times \circ = \circ \Rightarrow f'_+(\circ) = \circ$$
$$x < \circ : |x| = -x \ , \ [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = (-x)(-۱) = x \Rightarrow f'_-(\circ) = ۱$$

بنابراین:

$$f'_-(\circ) - f'_+(\circ) = ۱ - \circ = ۱$$

۱۶۱ گزینه ۴

چون خط $y = ۳x - ۵$ در $x=۲$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(۲)=۳$ و $A(۲,۱)\in g$ خواهد بود.

ازطرفی چون $\frac{۲}{۳} = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{۲(x-۱)}$ است، پس:

$$\frac{۱}{۲}f'(۱) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۴}{۳}$$
$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲))$$
$$\Rightarrow y'(۲) = ۳f'(۱) = ۳ \times \frac{۴}{۳} = ۴$$

۱۶۲ گزینه ۴

$$\begin{cases} f(۲) = \dfrac{۲+۲}{۲-۱} = ۴ \\ g(۲) = ۴a + ۲b \end{cases} \xrightarrow{f(۲)=g(۲)} ۴a + ۲b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x-۱-(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \dfrac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(۲) = -۳ \\ g'(x) = ۲ax + b \Rightarrow g'(۲) = ۴a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)} ۴a + b = -۳ \quad (۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۴ \\ ۴a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۷$$

۱۶۳ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{|x|\,|x^۲ - ۲|}{x}$$

دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R} - \{۰\}$ است. تابع f در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{۲}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشهٔ مخرج یعنی $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی $\mathbb{R}$ سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی $\mathbb{R}$ است.

۱۶۴ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم مشتق تابع $y = u^n$ که u تابعی برحسب x است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = nu'u^{n-۱}$$

گام دوم

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{۱۶}{x} - \sqrt[۳]{x^۲}\right)^۲ \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{۱۶}{x} - x^{\frac{۲}{۳}}\right)^۲$$

$$\Rightarrow y' = ۲ \times \left(-\frac{۱۶}{x^۲} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}\right)\left(\frac{۱۶}{x} - x^{\frac{۲}{۳}}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = ۲\left(-\frac{۱۶}{x^۲} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\right)\left(\frac{۱۶}{x} - x^{\frac{۲}{۳}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=-۸} y' = ۲\left(-\frac{۱۶}{۶۴} - \frac{۲}{۳ \times (-۲)}\right)\left(\frac{۱۶}{-۸} - ۴\right) = ۲\left(-\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳}\right)(-۲ - ۴) = ۲\left(\frac{۱}{۱۲}\right)(-۶) = -\frac{۱۲}{۱۲} = -۱$$

۱۶۵ گزینه ۲

برای تعیین ماکزیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x)=\frac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۰-(۴x^۳-۱۲x^۲+۸x)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}=\frac{-۴x(x-۲)(x-۱)}{(x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۴x(x-۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ هستند. همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس داریم:

$$f(۰)=\frac{۱}{۰+۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$f(۱)=\frac{۱}{۱-۴+۴+۵}=\frac{۱}{۶}$$

$$f(۲)=\frac{۱}{۱۶-۳۲+۱۶+۵}=\frac{۱}{۵}$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

۱۶۶ گزینه ۱

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow (۲x+۲)\,(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳}+۲x+۲x^۲+۲-\cancel{۲x^۳}-۴x^۲+۶x=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲+۸x+۲=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۲۰\Rightarrow x=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
f'		−		+		−	
f		↘	min	↗	$-۱+\sqrt{۵}$ max	↘	

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}$$

$$=\frac{۹+۴\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+۱}{۹+۴\sqrt{۵}+۱}=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۱۰+۴\sqrt{۵}}=\frac{۵+۳\sqrt{۵}}{۵+۲\sqrt{۵}}\times\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۵-۲\sqrt{۵}}=-۱+\sqrt{۵}$$

۱۶۷ گزینه ۱

برای آنکه نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس باشد، باید معادلهٔ تقاطع تابع را با خط $y=x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y=x \\ y=2x^2+(m+1)x+m+6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2x^2+(m+1)x+m+6 \Rightarrow 2x^2+mx+m+6=0$$

$$\Delta=0 \;\Rightarrow\; m^2-8(m+6)=0 \Rightarrow m^2-8m-48=0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ m=-4 \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطهٔ برخورد برابر ۱ است. از معادلهٔ کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y'=4x+m+1 \xrightarrow{y'=1} 1=4x+m+1 \Rightarrow x=-\frac{m}{4}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس می‌باشد، بنابراین $x>0$ لذا $m=-4$ قابل‌قبول است.

۱۶۸ گزینه ۴

$$f(x)=\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{-1}{3}}\left(\frac{(2-2x)(3x+5)-3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-2)=\frac{2}{3}\left(\frac{-4-4}{-6+5}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{6(-1)-3(-4-4)}{(-6+5)^2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(8)^{\frac{-1}{3}}(-6+24)=\frac{2\times 18}{3\sqrt[3]{8}}=6$$

۱۶۹ گزینه ۱

برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادلهٔ $f'(x)=۰$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x^{۴}-۶x^{۲}+۸x \Rightarrow f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x+۸$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۴(x^{۳}-۳x+۲)=۰ \Rightarrow ۴(x-۱)(x^{۲}+x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۴(x-۱)(x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow ۴(x-۱)^{۲}(x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$، اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$+\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		-	۰	+	۰	+	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	

باتوجه‌به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطهٔ $x=-۲$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x=۱$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=۰$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

۱۷۰ گزینه ۳

گام اول

تابع f در $x=۴$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow f'(۴)=-\frac{۳}{۲}\ ,\ f(۴)=-۷$$

گام دوم

$$\left(\frac{f(۲x)}{x}\right)'=\frac{۲f'(۲x)x-f(۲x)}{x^{۲}}$$

$$\xrightarrow{x=۲}\frac{۲f'(۴)\times ۲-f(۴)}{۴}=\frac{۲(-\frac{۳}{۲})(۲)-(-۷)}{۴}$$

$$=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۱۷۱ گزینه ۳

گام اول

توابع شامل قدر مطلق در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{۱+|x|}$ در $x = ۰$ مشتق ندارد پس $\alpha = ۰$ است.

گام دوم

به ازای $x > ۰$ و $x < ۰$ ضابطهٔ مشتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ را تعیین می‌کنیم سپس حاصل عبارت $f'_{+}(۰) - f'_{-}(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$x > ۰ \ : \ |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{۱+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}$$

$$\Rightarrow f'_{+}(۰) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱+۰}} = \frac{۱}{۲\times ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$x < ۰ \ : \ |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{۱-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}$$

$$\Rightarrow f'_{-}(۰) = \frac{-۱}{۲\sqrt{۱-۰}} = \frac{-۱}{۲\times ۱} = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f'_{+}(۰) - f'_{-}(۰) = \frac{۱}{۲} - \left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

۱۷۲ گزینه ۲

گام اول

الف) تابع $f\,(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f\,(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f\,(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f\,(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۲\sqrt{۴x - ۳} = ۲\sqrt{۴ - ۳} = ۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f\,(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۳ + bx = a + b\\ f\,(۱) = ۲\sqrt{۴ - ۳} = ۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)} a + b = ۲ \qquad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'\,(x) = \begin{cases} ۳ax^۲ + b & ; \quad x < ۱\\ ۲ \times \frac{۴}{۲\sqrt{۴x-۳}} & ; \quad x > ۱\end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که $f'_{-}\,(۱)$ و $f'_{+}\,(۱)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_{-}\,(۱) = f'_{+}\,(۱) \quad \Rightarrow \quad ۳a + b = \frac{۴}{\sqrt{۴ - ۳}} \quad \Rightarrow \quad ۳a + b = ۴ \qquad (II)$$

دو معادلهٔ I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۳a + b = ۴\\ a + b = ۲\end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲a = ۲ \quad \Rightarrow \quad a = ۱ \xrightarrow{(I)} ۱ + b = ۲ \quad \Rightarrow \quad b = ۱$$

۱۷۳ گزینه ۴

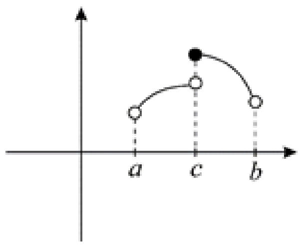
گام اول

الف) نقطه‌ای از دامنهٔ تعریف تابع f که به ازای آن تابع بیشترین (کمترین) مقدارش را می‌پذیرد، اکسترمم مطلق این تابع نامیده می‌شود.

ب) وقتی تابع f در همسایگی یک نقطه از دامنه تعریف شود آنگاه آن نقطه، یک نقطهٔ درونی دامنه است.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار زیر، نقطهٔ $x = c$ اکسترمم مطلق تابع f است و تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تابع f در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، همچنین مماس افقی ندارد.



بنابراین نقطهٔ $x = c$ تنها می‌تواند یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد.

۱۷۴ گزینه ۲

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}\quad:\quad \frac{۲-x}{x}\geq ۰\Rightarrow ۰<x\leq ۲\Rightarrow D_f=(۰,۲]$$

به ازای $۰<x\leq ۲$، $|x|=x$ است پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=(x+x)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}}\overset{(*)}{=}۲\sqrt{\frac{x^۲(۲-x)}{x}}=۲\sqrt{۲x-x^۲}$$

(*) چون $x>۰$ است پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطهٔ $x=۲$ محاسبه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=۲\sqrt{۲x-x^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲-۲x}{\sqrt{۲x-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲-۲x=۰\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow x=۱$$

$$f(۱)=۲\sqrt{۲-۱}=۲$$

$$f(۲)=۲\sqrt{۴-۴}=۰$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازهٔ $[۰,۲]$ است.

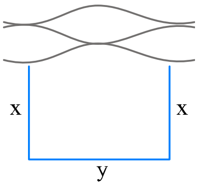
۱۷۵ گزینه ۲

$$f(x)=x\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}\Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳(x+۲)-(۳x+۱)}{(x+۲)^۲}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۱}{x+۲})^۲}}\times x$$

$$=\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}+\frac{۵x}{۳(x+۲)^۲\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۱}{x+۲})^۲}}\xrightarrow{x=-۳}=۲-\frac{۵}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۱۷۶ گزینه ۴

طول و عرض زمین را به ترتیب y و x و طول طناب را l می‌نامیم، در این صورت داریم:



$$l = ۲x + y \Rightarrow y = l - ۲x$$

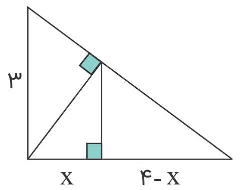
بیشترین مساحت این زمین مستطیلی‌شکل ۶۴۸ متر مربع است پس:

$$S_{max} = xy = ۶۴۸ \xrightarrow{y=l-۲x} S = x(l - ۲x) = xl - ۲x^۲$$

$$\Rightarrow S'_x = l - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow l - ۴x = ۰ \Rightarrow x = \frac{l}{۴}$$

$$S_{max} = x(l - ۲x) = \frac{l}{۴}(l - \frac{l}{۲}) = ۶۴۸ \Rightarrow \frac{l^۲}{۸} = ۶۴۸ \Rightarrow l^۲ = ۵۱۸۴ \Rightarrow l = ۷۲$$

۱ در شکل زیر، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟



۱) ۱/۹۶

۲) ۱/۵۶

۳) ۱/۶۴

۴) ۱/۴۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

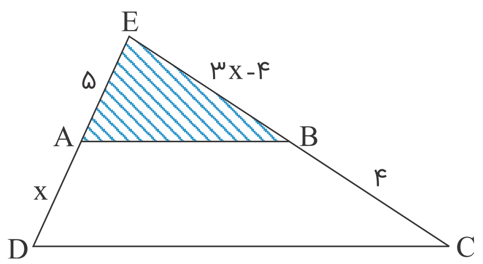
۲ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۱/۶

۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ در شکل زیر، مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$، چندبرابر مساحت مثلث EAB است؟



۱) $\frac{۹}{۴}$

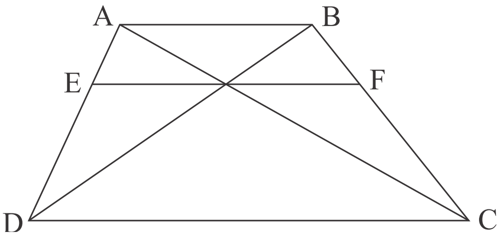
۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$

۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ در شکل زیر، $DC \parallel EF \parallel AB$ و اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و DC، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازهٔ پاره‌خط EF، کدام است؟



۱) $\frac{۴۵}{۷}$

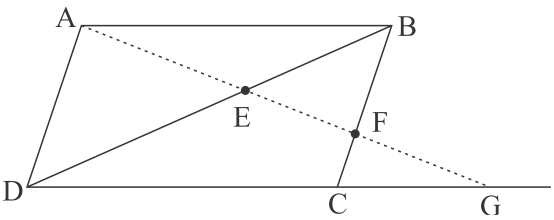
۲) $\frac{۴۵}{۶}$

۳) $۳\sqrt{۵}$

۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟



۱) $EA^۲$

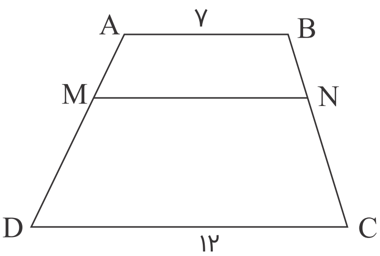
۲) $ED^۲$

۳) $EB \times ED$

۴) $FB \times FC$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است. اندازهٔ MN، کدام است؟



۱) ۸

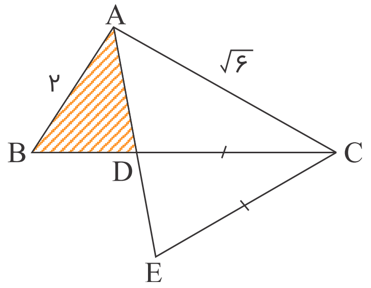
۲) ۸/۷۵

۳) ۹

۴) ۹/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و $CD = CE$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

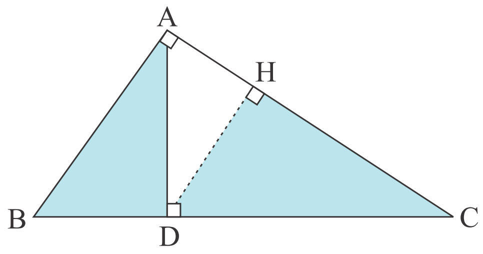
۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{۳}$ و $AC = ۲$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD و ABD، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۷}$

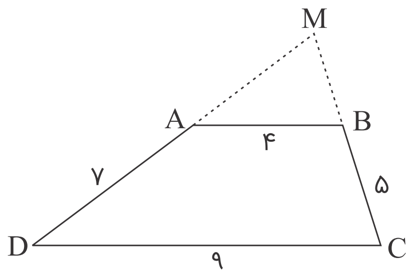
۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$

۴) $\frac{۸}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ اندازهٔ اضلاع ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



۱) ۱۳/۲

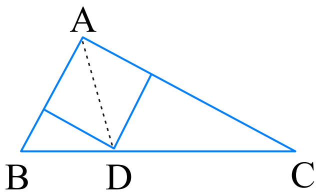
۲) ۱۳/۶

۳) ۱۴/۴

۴) ۱۴/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰ در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه کدام است؟



۱) $۱/۴\sqrt{۲}$

۲) $۲/۱$

۳) $۲/۸$

۴) $۲/۱\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

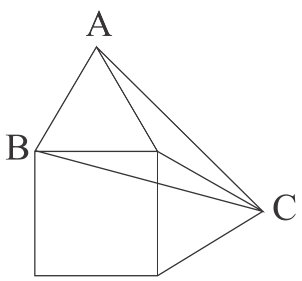
۱۱ در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، اگر از نقطهٔ O محل تلاقی قطرها، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

۱) کوچک‌تر از ۱ ۲) مساوی ۱

۳) بزرگ‌تر از ۱ ۴) متغیر نسبت به اضلاع

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۲ در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۴

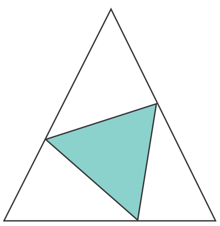
۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۲+\sqrt{۳}$

۴) $۱+\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۳ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم‌شده است. مساحت مثلث رنگی، چندبرابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

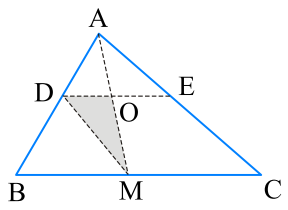
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۴ در شکل زیر، نقطهٔ M وسط BC و $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $DE \| BC$ است، مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۱۲

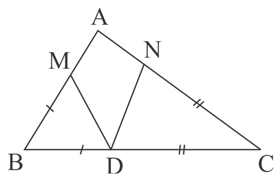
۲) ۱۵

۳) ۱۶

۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵ در شکل زیر $\hat{A}=۵۸^\circ$، $BM=BD$ و $CN=CD$، زاویه $M\hat{D}N$ چند درجه است؟



۱) ۵۸

۲) ۵۹

۳) ۶۱

۴) ۶۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

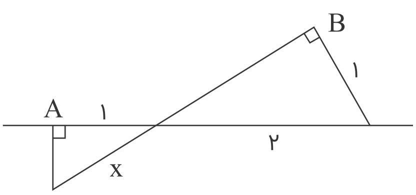
۱۶ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲

۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۷ در شکل زیر دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ قائمه‌اند، مقدار x چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۸ در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۹ درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۰/۷۵

۲) ۱

۳) ۱/۲۵

۴) ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۰ طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

۱) ۳۲

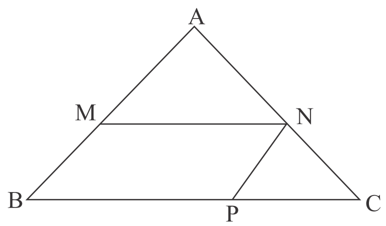
۲) $۲۴\sqrt{۲}$

۳) $۲۴+۸\sqrt{۲}$

۴) $۱۶+۱۶\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۱ در شکل زیر $\frac{۳}{۲} = \frac{MA}{MB}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است؟



۱) ۴۸

۲) ۵۲

۳) ۵۴

۴) ۵۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۲ مثلثی به اضلاع ۵ و ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۷ و b متشابه است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۷}$

۲) $\frac{۴۵}{۷}$

۳) $\frac{۳۶}{۵}$

۴) $\frac{۳۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۳ مثلثی به اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) ۷/۲
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۳/۵

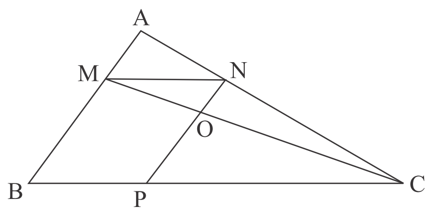
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۴ در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم مثلث مفروض کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۵ در شکل زیر $\frac{۳}{۷} = \frac{MA}{MB}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



۱) ۶۳
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۴

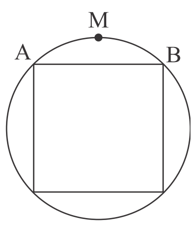
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۶ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB = AC = ۴$ و $BC = ۲\sqrt{۷}$ است. ضلع AC را به‌اندازهٔ خود تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم $(AD = AC)$. اندازهٔ BD کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۷ در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$
۲) $\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ۵

۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) ۶

۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۹ در مثلث ABC $\left(\hat{A} = ۹۰^\circ\right)$، ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی ۶/۷۶ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۸}$

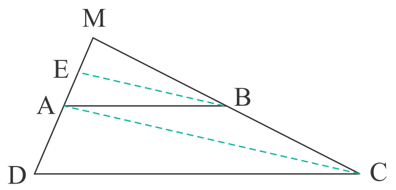
۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۷}{۱۲}$

۴) $\frac{۳}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۰ در ذوزنقهٔ ABCD، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۲/۲۵

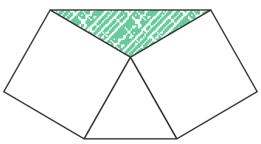
۳) ۱۲/۵

۴) ۱۲/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۳۱ در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی می‌باشد؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

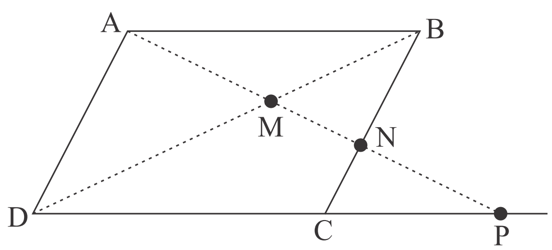
۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۳۲ در شکل زیر، ABCD متوازی‌الاضلاع می‌باشد. حاصل $MN \times MP$ برابر کدام است؟



۱) $AB^۲$

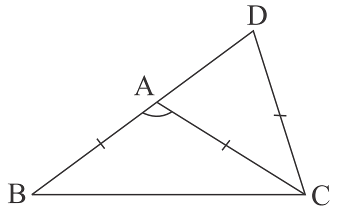
۲) $AD^۲$

۳) $MD^۳$

۴) $MA^۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۳ در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، ساق BA را از نقطهٔ B به‌اندازهٔ قاعدهٔ BC تا نقطهٔ D، امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۱۰۲

۲) ۱۰۵

۳) ۱۰۸

۴) ۱۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۴ مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع متوسط چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

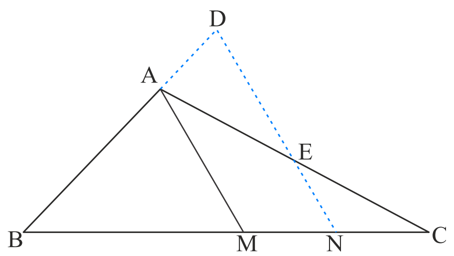
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۵ در مثلث ABC که $AB = \frac{۲}{۳}AC$، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۵}{۹}$

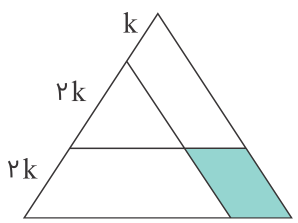
۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

۳۶ در شکل زیر، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



۱) ۱۶

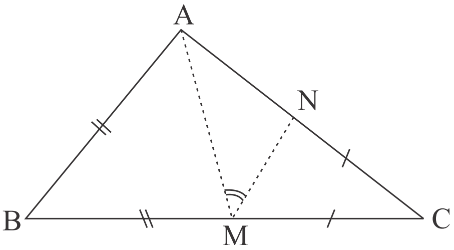
۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۷ در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\hat{M} = ۴۳^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۹۳

۲) ۹۴

۳) ۹۶

۴) ۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۸ در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

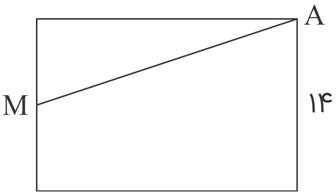
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳۹ در یک مکعب به طول یال $۴\sqrt{۲}$، فاصلهٔ وسط هریک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۳
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۴
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۰ در شکل زیر، پاره‌خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{۵}{۹}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره‌خط AM چند واحد است؟



۱) ۲۱

۲) ۲۳

۳) $۹\sqrt{۷}$

۴) $۱۰\sqrt{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

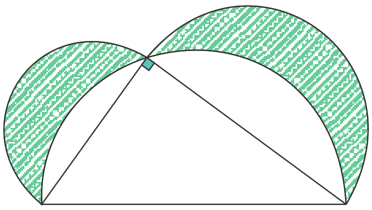
۴۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیهٔ سایه‌زده، کدام است؟

۱) ۲π

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۳π



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۲ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، قاعدهٔ BC را از دو طرف به‌اندازهٔ ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است؟

۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۳ در چهار ضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۱۱}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{A}}{۴}$، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$، چند درجه است؟

۱) ۵۰

۲) ۶۰

۳) ۷۰

۴) ۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۴ در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۵ در مثلث ABC، اضلاع $AB=۴$ و $AC=۶$ و $BC=۷$ است. از رأس C خطی موازی میانهٔ AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD، کدام است؟

۱) ۷/۵

۲) ۸

۳) ۸/۵

۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۶ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $۲/۵$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

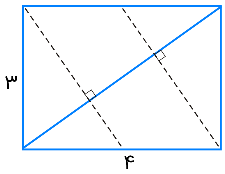
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴۷ در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدام است؟



۱) ۵/۲۵

۲) ۵/۷۵

۳) ۶

۴) ۷/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۴۸ در مستطیلی به طول اضلاع $۲\sqrt{۷}$ و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. فاصلهٔ این دو خط عمود کدام است؟

۱) ۱

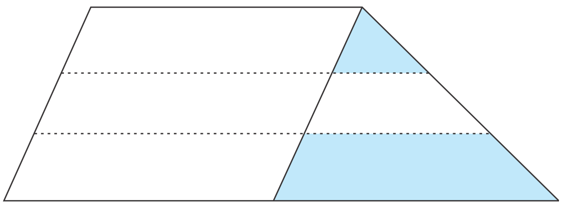
۲) ۱/۵

۳) ۱/۷۵

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۹ یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیهٔ رنگی، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$

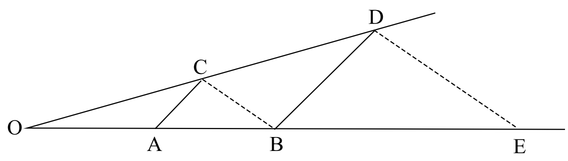
۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۰ در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$، اندازهٔ BE، کدام است؟



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$

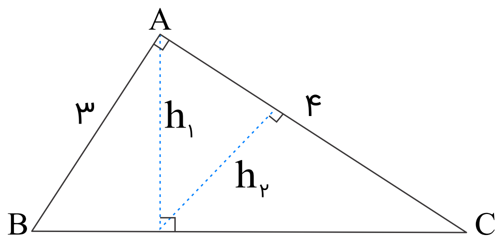
۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$

۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$

۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۵۱ در شکل زیر، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۲ در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰

۳) ۲۴ ۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۳ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

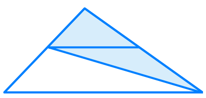
۱) ۱۱/۴ ۲) ۱۱/۶

۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

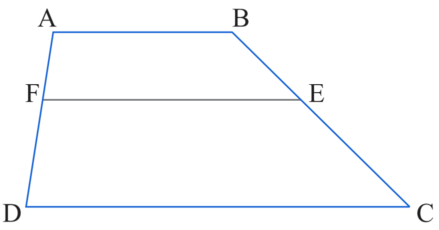
۵۴ در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۷}{۸}$
۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$
۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۵ در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعدهٔ کوچک است و $AF = \frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$
۲) $\frac{۷}{۱۵}$
۳) $\frac{۸}{۱۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۶ در مثلث ABC، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به‌اندازهٔ خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

۱) کمتر از ۱
۲) بیشتر از ۱
۳) مساوی ۱
۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۷ در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ و $AC = ۶$، ارتفاع AH و میانهٔ AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چندبرابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۸

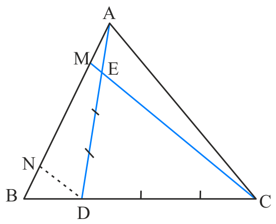
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۹ در مستطیل $ABCD$ به طول $AB = ۱۷$، از نقطهٔ A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۱۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۰ در شکل زیر، $BD = \frac{۱}{۴}BC$ و $AE = \frac{۱}{۴}AD$ و $DN || CM$. اندازهٔ AB چندبرابر AM است؟



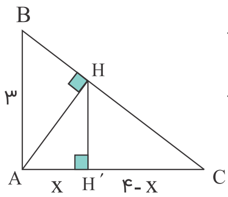
۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱

گزینه ۴

شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم و داریم:



$$AC = AH' + CH' = ۴ - x + x = ۴$$

$$AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲} \Rightarrow ۹ + ۱۶ = BC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

اندازهٔ AH را با استفاده از رابطهٔ $AB \times AC = AH \times BC$ به دست می‌آوریم. سپس اندازهٔ AH' یا همان x را با استفاده از رابطهٔ $AH^{۲} = AH' \times AC$ در مثلث $\overset{\Delta}{AHC}$، به دست می‌آوریم.

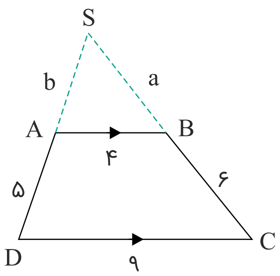
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵AH = ۱۲ \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵}$$

$$AH^{۲} = AH' \times AC \Rightarrow \frac{۱۴۴}{۲۵} = x \times ۴ \Rightarrow x = \frac{۱۴۴}{۱۰۰} = ۱/۴۴$$

۲

گزینه ۴

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD به طول اضلاع $AB = ۴$، $CD = ۹$، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



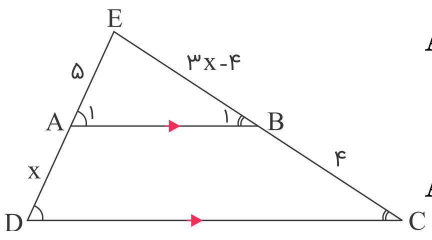
$$AB||CD \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{b}{b+۵} = \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b = ۴b + ۲۰ \Rightarrow b = ۴ \\ \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a = ۴a + ۲۴ \Rightarrow a = ۴/۸ \end{cases}$$

$$\text{محیط مثلث } SAB = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

۳ گزینه ۲

طبق فرض، داریم:



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۳x-۴}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۴x - ۲۰ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \frac{۱۰}{۳} \quad (*)$$

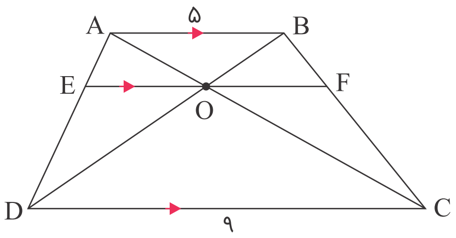
$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D} \ , \ \hat{B}_۱ = \hat{C} \Rightarrow E\overset{\Delta}{A}B \sim E\overset{\Delta}{D}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_{E\overset{\Delta}{A}B}}{S_{E\overset{\Delta}{D}C}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^۲ \underset{(*)}{\overset{\downarrow}{=}} \left(\frac{۵}{۵+\frac{۱۰}{۳}}\right)^۲ = \left(\frac{۱۵}{۲۵}\right)^۲ = \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow S_{E\overset{\Delta}{A}B} = ۹S \ , \ S_{E\overset{\Delta}{D}C} = ۲۵S \Rightarrow S_{ABCD} = ۲۵S - ۹S = ۱۶S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{E\overset{\Delta}{A}B}} = \frac{۱۶S}{۹S} = \frac{۱۶}{۹}$$

۴ گزینه ۱



$$\begin{cases} A\overset{\Delta}{D}C \ : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۹} = \frac{AE}{AD} \\ D\overset{\Delta}{A}B \ : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۵} = \frac{DE}{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{۹} + \frac{EO}{۵} = \frac{\overbrace{AE+DE}^{AD}}{AD} = ۱ \xrightarrow{\times ۴۵} ۵EO + ۹EO = ۴۵$$

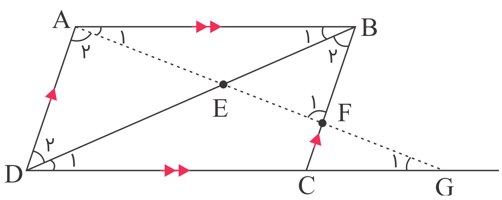
$$\Rightarrow ۱۴EO = ۴۵ \Rightarrow EO = \frac{۴۵}{۱۴}$$

به روش مشابه $\Rightarrow OF = \frac{۴۵}{۱۴} \Rightarrow EF = \frac{۴۵}{۱۴} + \frac{۴۵}{۱۴} = \frac{۴۵}{۷}$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \dfrac{۲}{\dfrac{۱}{AB} + \dfrac{۱}{DC}}$. (طول EF واسطهٔ توافقی طول قاعده‌ها است)

۵ گزینه ۱

چون $DG \parallel AB$ و $AD \parallel BC$ است، داریم:



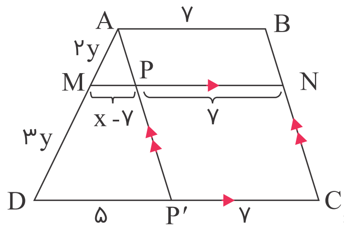
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{G}_۱ \ , \ \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow E\overset{\Delta}{A}B \sim E\overset{\Delta}{G}D \Rightarrow \dfrac{EA}{EG} = \dfrac{EB}{ED} \\ \hat{B}_۲ = \hat{D}_۲ \ , \ \hat{F}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow E\overset{\Delta}{B}F \sim E\overset{\Delta}{A}D \Rightarrow \dfrac{EF}{EA} = \dfrac{EB}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$$

$$\Rightarrow EF.EG = EA^۲$$

۶ گزینه ۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.

با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

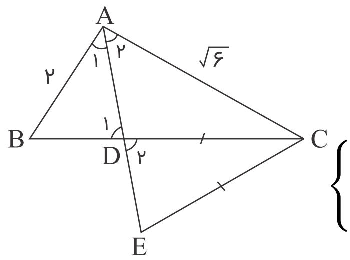


$$\frac{AM}{AD}=\frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y+۳y}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow x=۹=MN$$

۷ گزینه ۲

طبق شکل داریم:



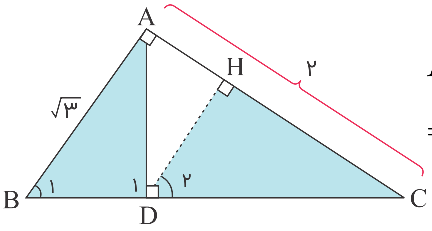
$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ & \text{نیمساز } AD\\ \hat{D}_۱=\hat{D}_۲ & \text{متقابل به رأس}\end{cases}\xrightarrow{DC=CE}\hat{D}_۱=\hat{E}$$

$$\xrightarrow{\text{زز}} A\overset{\Delta}{B}D\sim A\overset{\Delta}{E}C\qquad (k=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{\sqrt{۶}})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{B}D}}{S_{A\overset{\Delta}{C}E}}=k^۲=\left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^۲=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۸ گزینه ۳

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ داریم:



$$AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲}$$

$$\Rightarrow ۳ + ۴ = BC^{۲} \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DH\,,\ \text{مورب}\ BC \Rightarrow \widehat{D}_{۲} = \widehat{B}_{۱} \\ \hat{D}_{۱} = \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}D \sim H\overset{\triangle}{C}D$$

طبق روابط طولی در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^{۲} = BC \times CD$$

$$\Rightarrow ۴ = \sqrt{۷} \times CD \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

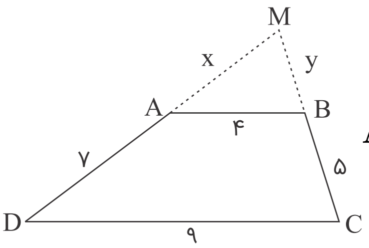
$$K = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{H\overset{\triangle}{C}D}}{S_{A\overset{\triangle}{B}D}} = K^{۲} = \left(\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\right)^{۲} = \frac{۱۶}{۲۱}$$

۹ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.



بنابراین داریم:

$$\overset{\triangle}{AMB} \sim \overset{\triangle}{MDC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۷} = \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۸ \Rightarrow ۵x = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۵} \\ \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۰ \Rightarrow ۵y = ۲۰ \Rightarrow y = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \end{cases}$$

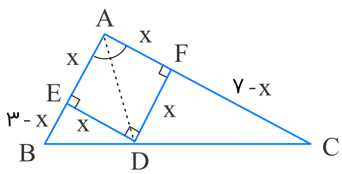
حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \overset{\triangle}{AMB} = x + y + ۴ = \frac{۲۸}{۵} + ۴ + ۴ = ۸ + \frac{۲۸}{۵} = \frac{۴۰+۲۸}{۵} = \frac{۶۸}{۵} = ۱۳/۶$$

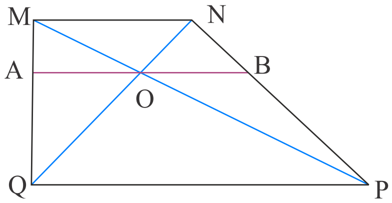
۱۰ گزینه ۴

نقطهٔ D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE = DF$
$\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $DE = DF$، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE || FD$
طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۷-x}{۷} \Rightarrow ۷x = ۲۱ - ۳x \Rightarrow ۱۰x = ۲۱ \Rightarrow x = ۲/۱$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{۲}x = ۲/۱\sqrt{۲}$$



۱۱ گزینه ۲



نکته: طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم $\frac{BP}{BN}=\frac{AQ}{AM}$، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم: $\frac{BP}{PN}=\frac{AQ}{QM}$

باتوجه‌به تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{OA}{MN}=\frac{AQ}{QM}\\ \frac{OB}{MN}=\frac{BP}{PN}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\frac{OA}{OB}=\underbrace{\frac{AQ}{QM}\times\frac{PN}{BP}}_{۱}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=۱$$

۱۲

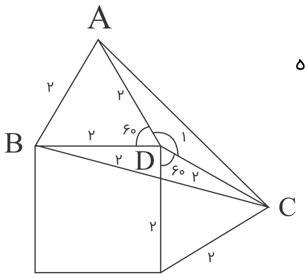
گزینه ۳

گام اول

الف) زوایای داخلی هر مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° است.

ب) مثلث $A\overset{\Delta}{D}C$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{D}_۱$ برابر است با:

$$\hat{D}_۱ = ۳۶۰ - (۹۰ + ۶۰ + ۶۰) = ۳۶۰ - ۲۱۰ = ۱۵۰^\circ$$



ج) برای به دست آوردن مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$، مساحت سه مثلث $A\overset{\Delta}{C}D$، $A\overset{\Delta}{B}D$ و $B\overset{\Delta}{D}C$ را به دست آورده و باهم جمع می‌کنیم.

د) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a از رابطهٔ $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می آید.

گام دوم

$$A\overset{\Delta}{D}C \underset{(\text{ض ز ض})}{\cong} B\overset{\Delta}{D}C \Rightarrow S_{A\overset{\Delta}{D}C} = S_{B\overset{\Delta}{D}C}$$

با استفاده از مبحث کاربرد مثلثات مساحت دو مثلث $A\overset{\Delta}{D}C$ و $B\overset{\Delta}{D}C$ را تعیین می‌کنیم:

$$S_{A\overset{\Delta}{D}C} = S_{B\overset{\Delta}{D}C} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

مثلث $A\overset{\Delta}{B}D$ متساوی الاضلاع است و داریم:

$$S_{A\overset{\Delta}{B}D} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴ = \sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ برابر است با:

$$S_{A\overset{\Delta}{B}C} = S_{B\overset{\Delta}{D}C} + S_{A\overset{\Delta}{D}C} + S_{A\overset{\Delta}{B}D} = ۱ + ۱ + \sqrt{۳} = ۲ + \sqrt{۳}$$

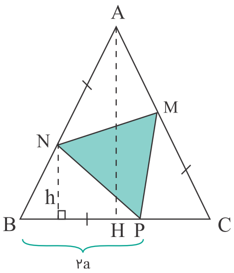
۱۳

گزینه ۴

گام اول

الف) اندازهٔ هر یک از سه قسمت مشخص‌شده بر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر a و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر $۳a$ در نظر می‌گیریم. همچنین در مثلث‌های رنگ‌نشده ارتفاع وارد بر ضلع های با اندازهٔ $۲a$ را h فرض می‌کنیم.

ب) اگر ارتفاع مثلث اصلی را رسم کنیم طبق قضیهٔ تالس اندازهٔ آن برابر $۳h$ به دست می آید (چون ارتفاع دو مثلث ABC و NBP موازی‌اند پس $\frac{a}{۳a} = \frac{h}{AH}$ درنتیجه $AH = ۳h$). پس می‌توان اندازهٔ مساحت مثلث رنگی و مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را برحسب a و h تعیین و درنهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنیم.



گام دوم

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۳h \times ۳a}{۲} = \frac{۹ha}{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{BNP}} = \frac{۱}{۲} \times h \times ۲a = ha$$

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - ۳S_{\overset{\Delta}{BNP}} = \frac{۹ha}{۲} - ۳ha = \frac{۳ha}{۲}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MNP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۳ha}{۲}}{\frac{۹ha}{۲}} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴

گزینه ۱

$$\frac{DA}{DB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{۳}{۵}, \frac{DA}{AB} = \frac{۲}{۵}$$

چون AM میانهٔ نظیر ضلع BC است، پس: $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۲}$

در دو مثلث ABM و AMD، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس M یکسان هستند، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} = \frac{DA}{AB} = \frac{۲}{۵}$$

در دو مثلث ODM و ADM، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس D یکسان هستند؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{OM}{AM} = \frac{DB}{AB} = \frac{۳}{۵}$$

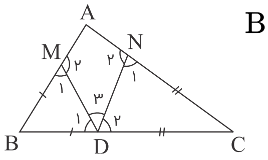
با ضرب کردن سه رابطهٔ فوق داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} \times \frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} \times \frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ODM}}{S_{ABC}} = \frac{۳}{۲۵} = \frac{۱۲}{۱۰۰}$$

۱۵ گزینه ۳

گام اول

الف) شکل را با جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:



$$BM = BD \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{M}_۱ = \alpha,\ CN = CD \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{N}_۱ = \beta$$

ب) $\hat{A} = ۵۸^\circ$ است، بنابراین در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۵۸} ۵۸ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ - ۵۸ = ۱۲۲^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۲۲^\circ \qquad (I)$$

گام دوم

دو مثلث $\overset{\Delta}{CND}$ و $\overset{\Delta}{BMD}$ را در نظر گرفته و مجموع زوایای این دو مثلث را به دست می‌آوریم. مجموع زوایای این دو مثلث باید ۳۶۰° باشد. با تعیین $\alpha + \beta$ اندازهٔ $\hat{D}_۳$ یا همان $M\hat{D}N$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{CND}: \hat{C} + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{BMD}: B + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} \hat{B} + \hat{C} + ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{(I)} ۱۲۲^\circ + ۲(\alpha+\beta) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta) = ۳۶۰^\circ - ۱۲۲^\circ$$
$$\Rightarrow ۲(\alpha+\beta) = ۲۳۸^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۲۳۸^\circ}{۲} = ۱۱۹^\circ \qquad (II)$$

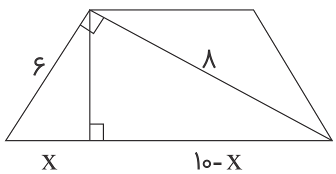
ازطرفی:

$$\hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ + \hat{D}_۳ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + M\hat{D}N = ۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow{(II)} ۱۱۹^\circ + M\hat{D}N = ۱۸۰^\circ \Rightarrow M\hat{D}N = ۶۱^\circ$$

۱۶ گزینه ۱

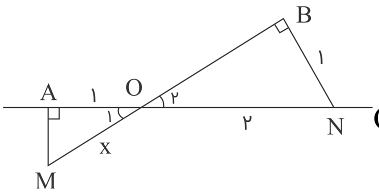
در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

$$۶^۲ = ۱۰x \Rightarrow x = ۳/۶$$
$$\text{طول قاعدهٔ کوچک} = ۱۰ - ۲x = ۱۰ - ۷/۲ = ۲/۸$$



۱۷ گزینه ۲

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBN داریم:



$$OB = \sqrt{ON^{۲} - BN^{۲}} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

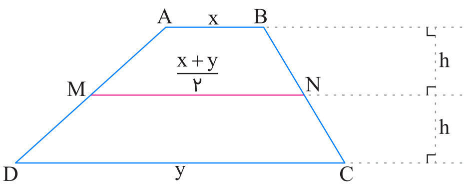
دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند $(\hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}, \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ)$. داریم:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۸ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.

باتوجه‌به شکل و فرض سؤال، داریم:

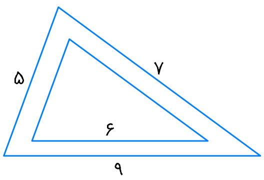


$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(x + \frac{x+y}{۲})(h)}{\frac{۱}{۲}(\frac{x+y}{۲} + y)(h)} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۳x+y}{۲}}{\frac{x+۳y}{۲}} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۳x+y}{x+۳y} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱۵x + ۵y = ۳x + ۹y \Rightarrow ۱۲x = ۴y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۱}{۳}$$

۱۹ گزینه ۳

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

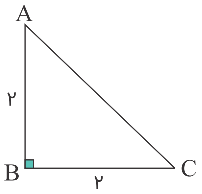
$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{۹}{۶}\right)^{۲} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - ۱ = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

۲۰ گزینه ۴

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.



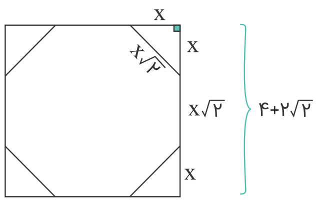
محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ ضلع AC و سپس محیط مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط مثلث } \overset{\triangle}{ABC} = ۲ + ۲ + ۲\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲}$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است.

می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازهٔ اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را x در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برابر $x\sqrt{۲}$ می‌شود.



باتوجه‌به اینکه طول ضلع مربع برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲$$

برای محاسبهٔ مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$$

پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (۴ \times S_{\text{مثلث}}) = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲ - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲} + ۸ - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

۲۱

گزینه ۱

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN || BP \Rightarrow MN || BC \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

$$NP || MB \Rightarrow NP || AB \Rightarrow \overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA+MB} = \frac{۱}{\frac{MA+MB}{MA}} = \frac{۱}{۱+\frac{MA}{MB}} = \frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۳}{۵})^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

چون $MN || BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN+NC} = \frac{۱}{\frac{AN+NC}{NC}} = \frac{۱}{\frac{NC}{AN}+۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۱} = \frac{۱}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۵}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NPC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NPC}} = \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را برحسب مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AMN}} + S_{\overset{\triangle}{NPC}} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} + \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{۱۲}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۴۸}{۱۰۰} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۲۲ گزینه ۲

گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{۵}{۹} \neq \frac{۴}{۷}$ و $\frac{۴}{۹} \neq \frac{۵}{۷}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلعِ به طول a از مثلث اول یا با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر است یا با ضلعِ به طول ۹. هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۹ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۹} = \frac{۴}{b} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow a = \frac{۴۵}{۷} \text{ یا } \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۶}{۷}$$

حالت دوم: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow a = \frac{۲۸}{۹} \text{ یا } \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow a = \frac{۳۵}{۹}$$

از بین مقادیر به‌دست‌آمده، بیشترین مقدار $a = \frac{۴۵}{۷}$ است.

۲۳ گزینه ۲

گام اول

الف) دو مثلث قابل‌انطباق نیستند یعنی دو مثلث باهم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچک‌ترین ضلع مثلث با اضلاع b و a و ۳ را برابر ۳ در نظر بگیریم (اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث اول را ۳ در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر $۱ = \frac{۳}{۳}$ می‌شود و باید مقدار a و b برابر ۴ و ۵ باشد که دراین‌صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچک‌ترین ضلع این مثلث a یا b است.

ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند $\frac{۳}{۴}$ یا $\frac{۳}{۵}$ باشد. اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۴} = ۳ \times ۳ = ۹$$

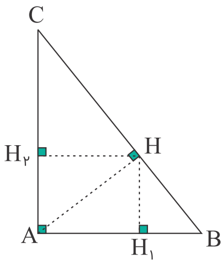
و اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد، داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۵} = ۷/۲$$

بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

۲۴ گزینه ۱

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند؛ یعنی مثلث‌های ABH و ACH باهم متشابه‌اند.



$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC})} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{ABH})} = \frac{۱}{۵ - ۱} \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ACH})} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۱}{۴}$ و نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۱}{۲}$ است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است.

درنتیجه داریم: $\frac{HH_۱}{HH_۲} = \frac{۱}{۲}$

۲۵ گزینه ۳

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $MN||PB$ است. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

$$MN||BP \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{NC}{AC}=\frac{۷}{۱۰}$$

همچنین $NO||AM$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{NOC}$ و $\overset{\triangle}{AMC}$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}=\frac{۴۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NOC}}=\frac{۴۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{AMC}} \qquad (I)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot \sin\hat{A}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۱}{۲}AM\cdot AC\cdot \sin\hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۱۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۳}{۱۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (II)$$

با استفاده از دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{NOC}}=\frac{۴۹}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (III)$$

از طرفی چون $MN||BP$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\frac{۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}}=\frac{۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (IV)$$

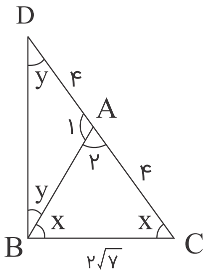
اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}-S_{\overset{\triangle}{AMN}}-S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{(\frac{۳}{۱۰}-\frac{۹}{۱۰۰}-\frac{۱۴۷}{۱۰۰۰})S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\frac{۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\frac{۶۳}{۱۰۰۰}}{\frac{۹}{۱۰۰}}=\frac{۶۳}{۹۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

پس مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OMN}$، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ است.

۲۶ گزینه ۳

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین هستند پس:

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = x \quad , \quad A\hat{B}D = A\hat{D}B = y$$

زاویهٔ $\hat{A}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است و اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_۱ = x + x = ۲x$$

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است، داریم:

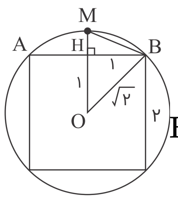
$$\hat{A}_۱ + y + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۲y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲(x+y) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{DBC}$ در رأس B قائمه است و می‌توان اندازهٔ ضلع BD را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کرد.

$$CD = AD + AC = ۴ + ۴ = ۸ \ , \ BC = ۲\sqrt{۷}$$

$$CD^۲ = BD^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۸^۲ = BD^۲ + (۲\sqrt{۷})^۲ \Rightarrow ۶۴ = BD^۲ + ۲۸$$
$$\Rightarrow BD^۲ = ۶۴ - ۲۸ = ۳۶ \Rightarrow BD = \sqrt{۳۶} = ۶$$

۲۷ گزینه ۲



هدف محاسبهٔ اندازهٔ MB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{MHB}$ داریم:

$$HB = ۱ \ , \ MH = OM - OH$$

برای محاسبهٔ MH، ابتدا لازم است با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$OB = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow OM = OB = \sqrt{۲} \Rightarrow MH = \sqrt{۲} - ۱$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ MB را محاسبه می‌کنیم:

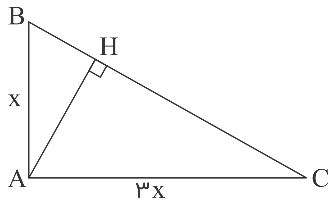
$$MB^۲ = MH^۲ + HB^۲ \Rightarrow MB^۲ = (\sqrt{۲} - ۱)^۲ + ۱^۲ = ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۱ + ۱ = ۴ - ۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow MB = \sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$$

۲۸ گزینه ۳

گام اول

الف) طول اضلاع قائمهٔ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را x و $3x$ در نظر می‌گیریم.

ب) می‌دانیم: "ارتفاع × قاعده × $\frac{1}{2}$ = مساحت مثلث"



گام دوم

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ BC را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۶۰ واحد مربع است، مقدار x را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2}x(3x) = 60 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

می‌توان مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را با تعریف BC و AH به ترتیب به‌عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}AH \times BC = 60$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}AH \times \sqrt{10}(2\sqrt{10}) = 60 \Rightarrow 10AH = 60 \Rightarrow AH = 6$$

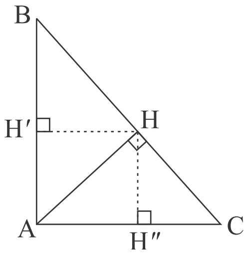
۲۹ گزینه ۲

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

ب) با فرض اینکه $HC < HB$ باشد داریم: $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۶/۷۶\, S_{\overset{\triangle}{AHC}}$

ج) $HH' = ?$ و $HH'' = ?$



گام دوم

سه مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{AHC}$، $\overset{\triangle}{AHB}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ باهم متشابه‌اند. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسبت تشابه برابر جذر نسبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}} + S_{\overset{\triangle}{AHC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} + ۱ = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۵/۷۶$$

همچنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است. چون دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ACH}$ باهم متشابه‌اند، داریم:

$$\frac{HH'}{HH''} = \sqrt{۵/۷۶} = ۲/۴ \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{۲۴}{۱۰} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{۵}{۱۲}$$

۳۰ گزینه ۲

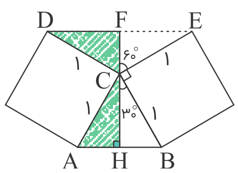
طبق قضیهٔ تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

$$\left.\begin{array}{l} BE||AC \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ AB||DC \Rightarrow \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

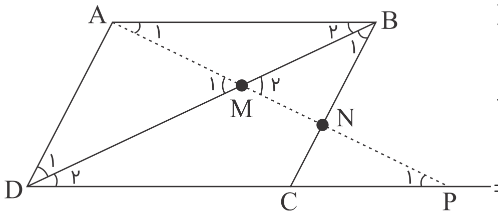
$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$$

۳۱ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل واضح است که مثلث‌های ACH و CDF همنهشت هستند؛ بنابراین مساحت مثلث ABC دو برابر مساحت مثلث DCF و مساوی با مساحت مثلث DCE است.



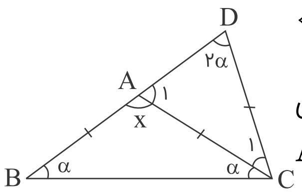
۳۲ گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_1=\hat{B}_1\,,\,\hat{M}_1=\hat{M}_2\Rightarrow \overset{\Delta}{AMD}\sim\overset{\Delta}{MBN}\Rightarrow\dfrac{MD}{MB}=\dfrac{AM}{MN}\\ \hat{A}_1=\hat{P}_1,\hat{B}_2=\hat{D}_2\Rightarrow\overset{\Delta}{AMB}\sim\overset{\Delta}{MDP}\Rightarrow\dfrac{MD}{MB}=\dfrac{MP}{AM}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{MN}=\frac{MP}{AM}\Rightarrow MN\times MP=AM^2$$

۳۳ گزینه ۳



$$\begin{cases}BD=BC\\AB=AC=DC\end{cases}$$

زاویه‌های خارجی $\hat{A}_1=2\alpha$

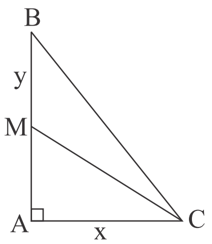
$$AC=DC\Rightarrow\hat{D}=\hat{A}_1=2\alpha\quad,\quad BD=BC\Rightarrow\hat{D}=D\hat{C}B=2\alpha\Rightarrow\hat{C}_1=\alpha$$

$$\overset{\Delta}{ADC}\,:\,\hat{A}_1+\hat{C}_1+\hat{D}=180^\circ\Rightarrow2\alpha+\alpha+2\alpha=180^\circ\Rightarrow\alpha=36^\circ$$

$$\hat{x}=180^\circ-\hat{A}_1=180^\circ-2\hat{\alpha}=180^\circ-72^\circ=108^\circ$$

۳۴ گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش x و y $(x<y)$ باشد، رسم می‌کنیم. AB ضلع متوسط این مثلث و CM میانهٔ وارد بر آن است. هدف محاسبهٔ نسبت $\frac{CM}{AB}$ است.



مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر مساحت مربعی به طول ضلع x است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{2}=x^2\quad\Rightarrow\quad xy=2x^2\xrightarrow{x,y>0}y=2x\quad\Rightarrow\quad AB=2x$$

$$AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(2x)=x$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{AMC}$، اندازهٔ CM را به دست می‌آوریم:

$$CM^2=AM^2+AC^2\Rightarrow CM^2=x^2+x^2=2x^2\Rightarrow CM=\sqrt{2}x$$

پس نسبت $\frac{CM}{AB}$ برابر است با:

$$\frac{CM}{AB}=\frac{\sqrt{2}x}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad CM=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

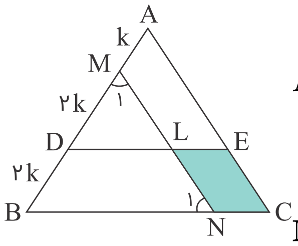
۳۵ گزینه ۳

$$\overset{\triangle}{BDN}: AM||DN \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{MN}{BM}$$
$$\overset{\triangle}{ACM}: EN||AM \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{MN}{CM}$$
$$\xrightarrow{BM=CM} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$$

۳۶ گزینه ۱

شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$$

چون $NLEC$ متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$MN||AC \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{A}=۶۰^\circ , \hat{N}_۱=\hat{C}=۶۰^\circ \Rightarrow$ متساوی الاضلاع است $\overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow BN=۴k$

هردو مثلث $\overset{\triangle}{MBN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع هستند درنتیجه باهم متشابه‌اند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\overset{\triangle}{MBN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۴k}{۵k})^۲=(\frac{۴}{۵})^۲=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MBN}}=\frac{۱۶}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

همچنین

$DL||BN \Rightarrow \hat{D}=\hat{B}=۶۰^\circ , \hat{L}=\hat{N}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow$ متساوی الاضلاع است $\overset{\triangle}{MDL} \Rightarrow ML=۲k$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\overset{\triangle}{ADE}$ نیز متساوی‌الاضلاع و $AE=۳k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{MBN}$ و دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ باهم متشابه‌اند و داریم:

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}=(\frac{۲k}{۴k})^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\triangle}{MBN}}=\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}=(\frac{۲k}{۳k})^۲=\frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}}=\frac{۹}{۴}S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با استفاده از نسبت‌های بالا، نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{AMLE}=S_{\overset{\triangle}{ADE}}-S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}-\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{LECN}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-(S_{\overset{\triangle}{BMN}}+S_{AMLE})=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-(\frac{۱۶}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}})=\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\%۱۶S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۳۷ گزینه ۲

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{MNC}$ متساوی‌الساقین است، پس $N\hat{M}C = M\hat{N}C$.

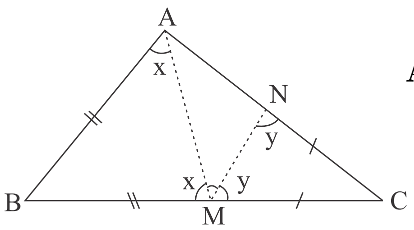
ب) مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{M}B = B\hat{A}M$.

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:

می‌دانیم $\hat{M}$ یک زاویهٔ نیم‌صفحه است، داریم:



$$A\hat{M}B + A\hat{M}N + N\hat{M}C = x + 43^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ \quad (I)$$

ازطرفی:

$$\left.\begin{array}{lll} \overset{\triangle}{ABM} & : & \hat{B} + 2x = 180^\circ \\ \overset{\triangle}{CNM} & : & \hat{C} + 2y = 180^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{B} + 2x + \hat{C} + 2y = \hat{B} + \hat{C} + 2(x+y) = 360^\circ$$

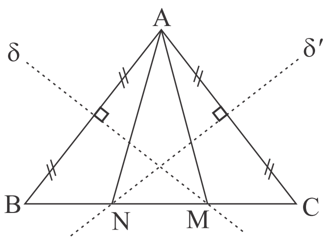
$$\xrightarrow{(I)} \hat{B} + \hat{C} + 274^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - 274^\circ = 86^\circ$$

همچنین در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} + B\hat{A}C = 180^\circ \Rightarrow 86^\circ + B\hat{A}C = 180^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

۳۸ گزینه ۲

$$\hat{A} = 80^\circ, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 50^\circ$$



هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} = 50^\circ \Rightarrow A\hat{M}B = 80^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow C\hat{A}N = \hat{C} = 50^\circ \Rightarrow A\hat{N}C = 80^\circ \end{cases}$$

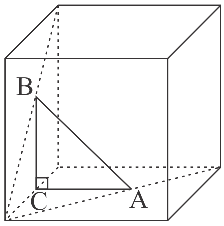
$$\Rightarrow M\hat{A}N = 180^\circ - (A\hat{M}B + A\hat{N}C) = 20^\circ$$

بنابراین، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN، زاویهٔ $M\hat{A}N = 20^\circ$ است.

۳۹

گزینه ۳

مکعبی به طول یال $۴\sqrt{۲}$ به‌صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبهٔ اندازهٔ AB است.



اندازهٔ AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$AC = BC = \frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ AB را تعیین می‌کنیم:

$$BC^۲ + AC^۲ = AB^۲ \Rightarrow ۲(۲\sqrt{۲})^۲ = AB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۲ \times ۸ = ۱۶ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۴۰

گزینه ۲

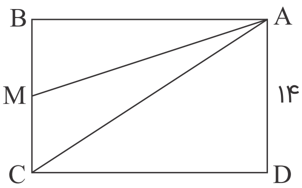
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

ب) $\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{۵}{۹}$

ج) $AM = ?$

گام دوم



با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ \xrightarrow[AD=۱۴]{AC=۲۵} ۲۵^۲ = ۱۴^۲ + CD^۲$$
$$\Rightarrow ۶۲۵ = ۱۹۶ + CD^۲ \Rightarrow CD^۲ = ۶۲۵ - ۱۹۶ = ۴۲۹ \Rightarrow AB^۲ = ۴۲۹$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABM}} + S_{AMCD}} = \frac{۵}{۵+۹} = \frac{۵}{۱۴}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{۲AD} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow \frac{BM}{۲۸} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow BM = ۱۰$$

رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ نوشته و اندازهٔ AM را تعیین می‌کنیم:

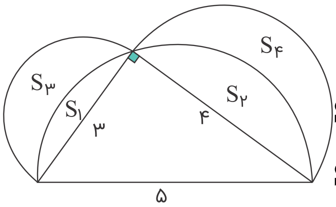
$$AB^۲ + BM^۲ = AM^۲ \Rightarrow ۴۲۹ + ۱۰۰ = AM^۲ \Rightarrow AM^۲ = ۵۲۹ \Rightarrow AM = \sqrt{۵۲۹} = ۲۳$$

۴۱

گزینه ۲

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبهٔ $S_۳ + S_۴$ است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$



داریم:

$$S_۱ + S_۲ = \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۵} - \text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه}$$

$$S_۳ + S_۴ = (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۴} + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۳}) - (S_۱ + S_۲)$$

بنابراین:

$$S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times \pi \times \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = \frac{\pi}{۲}\left(\frac{۲۵}{۴}\right) - ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - ۶$$

$$S_۳ + S_۴ = \frac{۱}{۲} \times \pi\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۲} \times \pi\left(\frac{۴}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{۲۵\pi}{۸} - ۶\right)$$

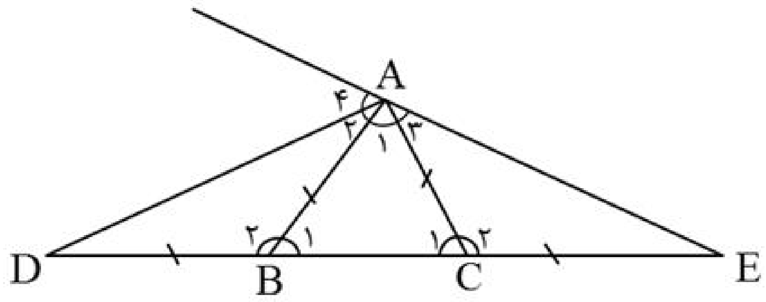
$$= \frac{\pi}{۲}\left(\frac{۹}{۴}\right) + \frac{\pi}{۲}(۴) - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = ۶$$

۴۲

گزینه ۳

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



ب) $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی است.

گام دوم

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱$، درنتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی $\hat{B}_۲ = \hat{C}_۲$ است. ازطرفی طبق قسمت (ب) از گام اول، $CE = BD$ و $AB = AC$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{ACE}$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{matrix} CE = BD \\ \hat{B}_۲ = \hat{C}_۲ \\ AB = AC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACE}$$

درنتیجه زوایای $\hat{D}$ و $\hat{E}$ باهم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ محسوب می‌شوند.

$$\overset{\triangle}{ABD}\text{متساوی الساقین} \quad \Rightarrow \quad \hat{A}_۲ = \hat{D} = \alpha \quad \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \quad \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

$\hat{A}_۴$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ است پس اندازهٔ آن با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

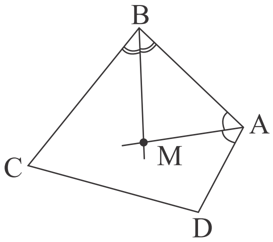
$$\hat{A}_۴ = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = ۲\alpha$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است.

۴۳ گزینه ۳

$$\hat{A} = \frac{۴}{۳}\hat{B}\ ,\ \hat{C} + \hat{D} = \frac{۱۱}{۳}\hat{B}\ ,\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}\hat{B} + \hat{B} + \frac{۱۱}{۳}\hat{B} = ۳۶۰^{\circ} \Rightarrow ۶\hat{B} = ۳۶۰^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = ۸۰^{\circ}$$



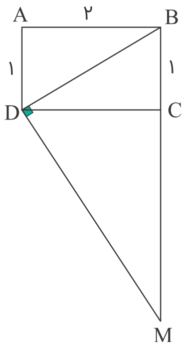
اگر M زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ A و B باشد، داریم:

$$\hat{M} = ۱۸۰ - \frac{\hat{A}}{۲} - \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰ - ۳۰ - ۴۰ = ۱۱۰$$

$$\Rightarrow \text{زاویهٔ حاده} = ۱۸۰^{\circ} - ۱۱۰^{\circ} = ۷۰^{\circ}$$

۴۴ گزینه ۳

راه‌حل اول: باتوجه‌به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



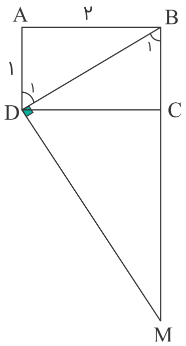
هدف محاسبهٔ MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۴ + ۱ = ۵ \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{۵}$$

با استفاده از رابطهٔ طولی در مثلث BDM داریم:

$$BD^۲ = MB^۲.BC^۲ \Rightarrow (\sqrt{۵})^۲ = MB^۲ \times ۱ \Rightarrow MB = ۵$$

راه‌حل دوم:



هدف محاسبهٔ MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۴ + ۱ = ۵ \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{۵}$$

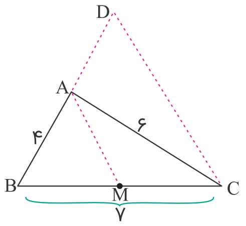
دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $B\overset{\triangle}{A}D$ و $B\overset{\triangle}{D}M$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = B\hat{D}M = ۹۰^\circ \\ \left.\begin{array}{l} AD||BC \\ \text{مورب}BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{A}D \sim B\overset{\triangle}{D}M$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{MB} \quad \Rightarrow \quad MB = (\sqrt{۵})^۲ = ۵$$

۴۵ گزینه ۲

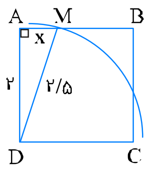


در مثلث BDC می‌دانیم $AM || CD$ است. به کمک رابطهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{BD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BD = ۸$$

۴۶ گزینه ۲

مربع $ABCD$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع $۲/۵$ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



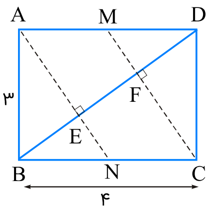
با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $D\overset{\Delta}{A}M$، فاصلهٔ نقطهٔ M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^۲ + ۲^۲ = (۲/۵)^۲ \quad \Rightarrow \quad AM^۲ + ۴ = ۶/۲۵ \quad \Rightarrow \quad AM^۲ = ۲/۲۵$$

$$\Rightarrow \quad AM = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵ \qquad , \qquad MB = ۲ - ۱/۵ = ۰/۵$$

بنابراین فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $\frac{۱}{۲} = ۰/۵$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD} : BD^۲ = AB^۲ + AD^۲$$
$$\Rightarrow BD^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow BD = ۵$$

کاملا واضح است که مثلث‌های ABN و CDM همنهشت‌اند، لذا $DF = EB$. همچنین ABD قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$AB^۲ = BE \times BD \Rightarrow ۹ = BE \times ۵ \Rightarrow BE = DF = \frac{۹}{۵}$$
$$\Rightarrow EF = ۵ - ۲ \times \frac{۹}{۵} = \frac{۷}{۵}$$

همچنین در مثلث BFC داریم:

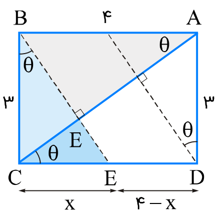
$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۹}{۵}+\frac{۷}{۵}} = \frac{BN}{۴} \Rightarrow BN = \frac{۳۶}{۱۶} = \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow NC = ۴ - \frac{۹}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

$$S_{ANCM} = AB \times NC = ۳ \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

راه‌حل دوم:

در شکل زیر تمام زوایای مشخص‌شده با یکدیگر برابرند که آن‌ها را θ می‌نامیم.



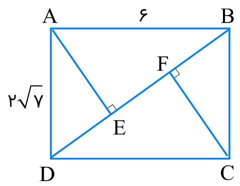
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$ و همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE داریم $\tan\theta = \frac{x}{۳}$، درنتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = (۴ - x) \times ۳ = (۴ - ۲/۲۵) \times ۳$$
$$= ۱/۷۵ \times ۳ = ۵/۲۵$$

۴۸ گزینه ۱

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{ABD}: BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۳۶ + ۲۸ = ۶۴ \Rightarrow BD = ۸$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

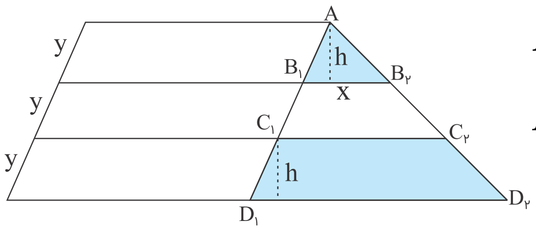
$$\overset{\Delta}{ABD}: AD^۲ = DE.BD \Rightarrow ۲۸ = DE \times ۸ \Rightarrow DE = \frac{۲۸}{۸} = ۳/۵$$

به طور مشابه $BF = ۳/۵$ است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = ۸ - ۷ = ۱$$

۴۹ گزینه ۲

فرض کنید $B_۱B_۲ = x$ باشد. در این صورت داریم:



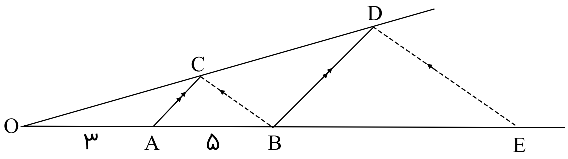
$$\overset{\Delta}{AC_۱C_۲}: \frac{AB_۱}{AC_۱} = \frac{x}{C_۱C_۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{C_۱C_۲} \Rightarrow C_۱C_۲ = ۲x$$

$$\overset{\Delta}{AD_۱D_۲}: \frac{AB_۱}{AD_۱} = \frac{x}{D_۱D_۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{D_۱D_۲} \Rightarrow D_۱D_۲ = ۳x$$

$$\frac{S_{AB_۱B_۲}}{S_{C_۱C_۲D_۲D_۱}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times x \times h}{\frac{۱}{۲}(۲x + ۳x)h} = \frac{۱}{۵}$$

۵۰ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل و با کمک قضیهٔ تالس داریم:

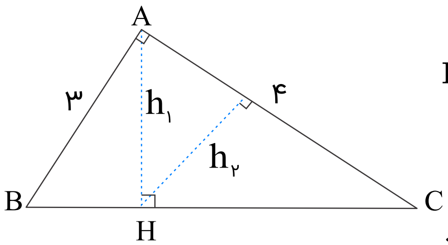


$$\begin{cases} AC||BD \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OC}{CD} \\ BC||DE \Rightarrow \dfrac{OB}{BE} = \dfrac{OC}{CD} \end{cases}$$

طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

۵۱ گزینه ۲



$$BC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

راه‌حل اول:

$$\begin{cases} \hat{C} \quad \text{مشترک} \\ A\hat{H}C = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

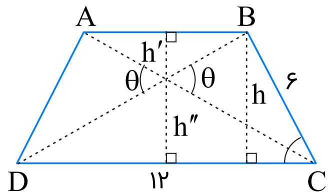
راه‌حل دوم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : \begin{cases} h_۱ \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵h_۱ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_۱ = \dfrac{۱۲}{۵} \\ AC^۲ = HC \times BC \Rightarrow ۱۶ = ۵HC \Rightarrow HC = \dfrac{۱۶}{۵} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : h_۲ \times AC = h_۱ \times HC \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

۵۲ گزینه ۳

دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OCD}$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{h'}{h''}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow h''=\frac{۳}{۲}h'$$

$$h'+h''=۱۰\Rightarrow h'+\frac{۳}{۲}h'=۱۰\Rightarrow h'=۴\Rightarrow h''=۶$$

$$\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow OB\times OC=OA\times OD\ (*)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases}S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{۱}{۲}OB\times OC\times\sin\theta\\ S_{\overset{\Delta}{OAD}}=\frac{۱}{۲}OA\times OD\times\sin\theta\end{cases}\xrightarrow{(*)}S_{\overset{\Delta}{OBC}}=S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

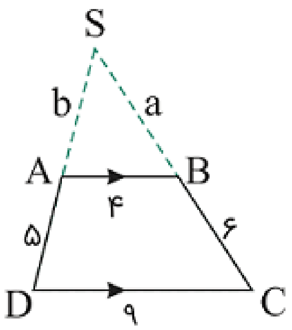
$$S_{\overset{\Delta}{ABCD}}=S_{\overset{\Delta}{ODC}}+S_{\overset{\Delta}{OBC}}+S_{\overset{\Delta}{OAB}}+S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

$$\Rightarrow\frac{(۸+۱۲)\times۱۰}{۲}=\frac{۶\times۱۲}{۲}+\frac{۴\times۸}{۲}+۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}$$

$$\Rightarrow۱۰۰=۳۶+۱۶+۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴$$

۵۳ گزینه ۴

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقه ABCD به طول اضلاع $AB = ۴$، $CD = ۹$، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



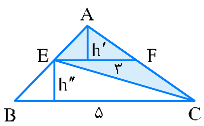
$$AB || CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+۵} = \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b = ۴b + ۲۰ \Rightarrow b = ۴ \\ \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a = ۴a + ۲۴ \Rightarrow a = ۴/۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow SAB \text{ محیط مثلث} = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

۵۴ گزینه ۴



$$\frac{EF}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BEC}}}{S_{BCFE}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۵ \times h''}{\frac{۱}{۲} \times (۳+۵) \times h''} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{BCFE}} = ۱ - \frac{۵}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

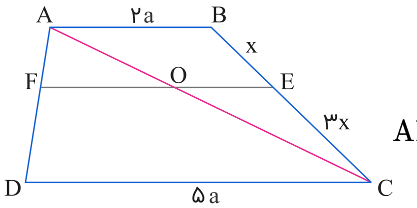
$$\text{نسبت تشابه} : \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{BCFE}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{AEF}}}$$

$$= \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{\frac{۲۵}{۹}S_{\overset{\triangle}{AEF}} - S_{\overset{\triangle}{AEF}}} = \frac{۱}{\frac{۲۵}{۹} - ۱} = \frac{۱}{\frac{۱۶}{۹}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}} + \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{BCFE}}} = \frac{۳}{۸} + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۵۵ گزینه ۱

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



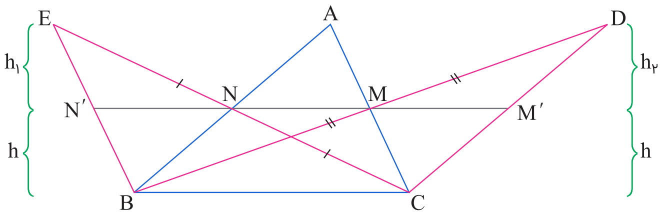
$$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AF}{AD}=\frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{OF}{۵a} \Rightarrow OF=\frac{۵}{۴}a$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: \frac{CE}{CB}=\frac{OE}{۲a} \Rightarrow \frac{۳x}{۴x}=\frac{OE}{۲a} \Rightarrow OE=\frac{۳}{۲}a$$

$$EF=OF+OE=\frac{۵}{۴}a+\frac{۳}{۲}a=\frac{۱۱}{۴}a$$

$$\frac{EF}{CD}=\frac{\frac{۱۱}{۴}a}{۵a}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

۵۶ گزینه ۳



مثلث‌های DBC و EBC دارای قاعده‌های یکسان BC هستند.پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

$$\overset{\Delta}{EBC}: \frac{EN}{EC}=\frac{NN'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{h_۱}{h+h_۱} \Rightarrow ۲h_۱=h+h_۱ \Rightarrow h_۱=h$$

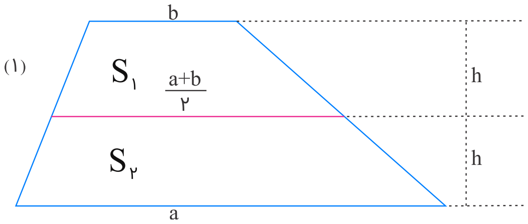
$$\overset{\Delta}{DBC}: \frac{DM}{DB}=\frac{MM'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{h_۲}{h+h_۲} \Rightarrow ۲h_۲=h+h_۲ \Rightarrow h_۲=h$$

$$\Rightarrow h_۱=h_۲$$

پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

۵۷ گزینه ۲

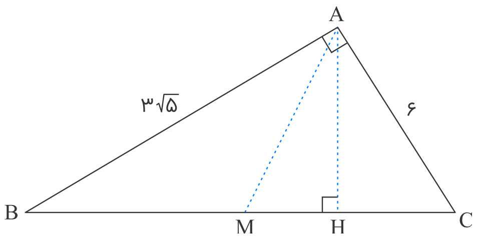
پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.



$$S_۲ = ۲S_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}h(a+\frac{a+b}{۲}) = ۲\times\frac{۱}{۲}h(b+\frac{a+b}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b+a \Rightarrow ۳a+b = ۶b+۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۵}$$

۵۸ گزینه ۴



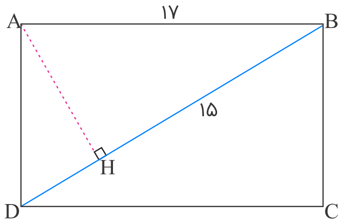
$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۶^۲+(۳\sqrt{۵})^۲} = ۹ \Rightarrow MC = MB = ۴/۵$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : AB^۲ = BH\times BC \Rightarrow ۴۵ = BH\times ۹$$

$$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = BH - MB = ۵ - ۴/۵ = ۰/۵$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{\frac{AH\times BC}{۲}}{\frac{AH\times HM}{۲}} = \frac{\frac{AH\times ۹}{۲}}{\frac{AH\times\frac{۱}{۲}}{۲}} = ۱۸$$

۵۹ گزینه ۱



$$AB^{۲} = BH \times BD$$

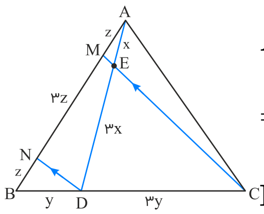
$$۱۷^{۲} = ۱۵ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷^{۲}}{۱۵}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{۱۷^{۲}}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۱۷^{۲} - ۱۵ \times ۱۹}{۱۵} = \frac{۲۸۹ - ۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

۶۰ گزینه ۳

فرض کنیم $AE = x$، $ED = ۳x$، $BD = y$ و $DC = ۳y$. داریم:



$$\overset{\Delta}{AND} : ME || DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow AM = z \text{ و } MN = ۳z$$

$$\overset{\Delta}{BCM} : DN || CM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BN}{۳z} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow BN = z$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{z + ۳z + z}{z} = \frac{۵z}{z} = ۵$$

۱ به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-۲)x^۲-۳x+m+۲$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۲ در معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+ax+۹=۰$، یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است، مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴

۳) ۴/۵ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴
قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

۳ فاصلهٔ دو خط به معادلات $y=\sqrt{۳}x+۲$ و $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$

۳) $\sqrt{۳}+۱$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر دو نقطهٔ $A(۲\,,\,۵)$ و $B(-۴\,,\,۱)$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۱\,,\,-۳$ ۲) $۰\,,\,-۳$

۳) $۲\,,\,-۱$ ۴) $۳\,,\,-۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، از معادلهٔ $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

۱) $m\geq ۱$ ۲) $m<۲$

۳) $۱\leq m<۲$ ۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۶ نمودارهای دو تابع $y=|x-۲|+|x+۱|$ و $y=x+۷$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ دایره‌ای به مرکز $(۱,۳)$ بر روی خط راست $۵x+۱۲y=۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$
۲) ۶
۳) $۲\sqrt{۱۵}$
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+mx+m+۶=۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟

۱) $(-۴,۰)$
۲) $(-۴,-۲)$
۳) $(-۶,۰)$
۴) $(-۶,-۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+۲x=۱۶$، $۲y-x=۲$ و $y=۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) ۵
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $۲\sqrt{۶}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

۱) ۶۰π
۲) ۷۰π
۳) ۷۵π
۴) ۸۰π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۱ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۲ مثلثی با رأس‌های $A(۱,۵)$، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

۱) ۴
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۵
۴) $۴\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳ معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) ۳
۳) -۱
۴) $-\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+۴x+a-۳$ از طرف بالا بر محور xها مماس شده است، طول نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) -۲
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۵ به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ عددی بین دو ریشهٔ معادلهٔ $(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰$ است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) ۴
۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۱۶ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ چقدر است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷ به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور xهاست؟

۱) $m<-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۱$
۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$
۴) $m>\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۱۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

۱) $m>2$

۲) $-1<m<2$

۳) هر مقدار m

۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۹ فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y=4$ از خط به معادلهٔ $3x+4y=15$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰ در یک مکعب به طول یال a، صفحهٔ قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر a^2 است؟

۱) $5+\sqrt{2}$

۲) $4+2\sqrt{2}$

۳) $5+2\sqrt{2}$

۴) $3+4\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۱ دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y+x=6$ و $2x-y=7$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(8,5)$ است. مساحت این مستطیل کدام می‌باشد؟

۱) ۷/۲

۲) ۹/۶

۳) ۱۱/۴

۴) ۱۲/۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۲ به ازای کدام مقدار a زاویهٔ بین خط مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x+y=1$ و خط به معادلهٔ $3x+2y=a$ در نقطهٔ تلاقی آن‌ها ۹۰ درجه است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۳ نقطهٔ $(a,2a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) $2\sqrt{2}$

۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۴ در معادلهٔ $x^۲ - ۸x + m = ۰$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $۲x^۲ + (a^۲ - ۷)y^۲ + ۴y + a = ۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$
۲) $\{۳\}$
۳) $\{-۳, ۳\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۶ در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۷ بهروز یک مجلّه را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو باهم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۲
۲) ۳۳
۳) ۳۵
۴) ۳۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۸ منحنی توابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۲ + bx + ۳$ بر خط به معادلهٔ $y = ۷$ مماس اند، فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۹ به ازای کدام مقدار a دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + a = ۰$ بر خط به معادلهٔ $x + ۳y = ۰$ مماس است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۰ اگر $۲ = \sqrt{۲a^۲ + ۴a} + ۳a$ باشد، عدد $\frac{a+۱}{a}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵

۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱ سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵

۳) ۲۰ ۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۲ در یک بیضی به کانون‌های $(۲, -۱)$ و $(۲, ۷)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴

۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۳ اگر هر یک از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشد، a کدام است؟

۱) -۱۴ ۲) -۱۲

۳) -۸ ۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۴ دایرهٔ به مرکز $(۲, ۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادلهٔ $y = ۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱ و ۳ ۲) ۰ و ۴

۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ ۴) $۲ - \sqrt{۲}$ و $۲ + \sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۵ شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $(۰, ۰)$ و $(۳, ۱)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y = ۲x$ باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۶ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸$ و $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج
۲) مماس داخل
۳) متقاطع
۴) متخارج

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + (a + ۳)x - ۱$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a < -۹$
۲) $a < -۳$
۳) $a > -۱$
۴) $-۳ < a < ۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۸ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۲, ۰)$ و $(-۲, ۰)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۹ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطهٔ $(-۲, ۱)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۰ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۰, ۱)$ و $(۳, ۰)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x - y = ۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۱ نقطهٔ $A(۷, ۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

۱) $(۱, ۵)$
۲) $(۳, ۴)$
۳) $(۳, ۵)$
۴) $(۴, ۳)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۲ دایره‌ای از نقطهٔ $(-۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایرهٔ بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۳ ظرفی است به شکل نیمکره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانهٔ آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۱) ۲۰۸
۲) ۲۱۲
۳) ۲۱۵
۴) ۲۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۴ به ازای کدام مقدار m، خط به معادلهٔ $y = mx + ۲$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۳$ مماس است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ و ۰
۲) $\frac{۴}{۳}$ و ۰
۳) $-\frac{۴}{۳}$ و ۱
۴) $\frac{۲}{۳}$ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a-۳)x^۲ + ax - ۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی گذرد؟

۱) $a \leq ۲$
۲) $۰ < a \leq ۲$
۳) $۲ < a < ۳$
۴) $۰ < a < ۳$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۶ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲,۱)$ و $(-۲,۴)$ و $(۰,۰)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۷ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم و دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۱) $۲ + \sqrt{۳}$
۲) $۵ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۵ + ۴\sqrt{۳}$
۴) $۷ + ۴\sqrt{۳}$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۸ اگر معادلهٔ $x^۴ - (m+۲)x^۲ + m + ۵ = ۰$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m < -۴$
۲) $m > ۴$
۳) $-۴ < m < ۴$
۴) $۴ < m < ۹$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴۹ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$
۲) $\frac{۹}{۴}$
۳) $\frac{۲۵}{۸}$
۴) $\frac{۲۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۵۰ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^۲ - ۳x - ۱۰$ را حداقل چند واحد به‌طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۱ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m+۲)x^۲ + ۳x + ۱ - m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

۱) $m > ۱$ یا $m < -۲$
۲) $-۲ < m < ۱$
۳) فقط $m < -۲$
۴) فقط $m > ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۲ شعاع دایره به مرکز $(-۲, ۲)$ و مماس خارج بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۳ از داخل یک استوانهٔ قائم توپُر، به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط به فاصلهٔ ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$
۲) $۱۱/۲۸\pi$
۳) $۱۲/۵۶\pi$
۴) $۱۳/۴۴\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۴ شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(۰, ۰)$، $(۲, ۱)$ و $(۱, -۲)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵۵ معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x + y = ۱$ و $y = ۲x$ و $x = ۱$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y = \frac{۲}{۳}$
۲) $x = \frac{۲}{۳}$
۳) $y + x = \frac{۲}{۳}$
۴) $y + x = \frac{۱}{۳}$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۵۶ نقطهٔ $A(۳, -۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $۲y - x = ۵$ می‌باشد. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۷۵
۴) ۸۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۷ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲, ۵)$، $B(۳, ۰)$ و $C(۰, ۲)$، کدام است؟

۱) ۶
۲) ۶/۵
۳) ۷
۴) ۷/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۸ یک خط از دسته خطوط به معادلهٔ $(k + ۱)y + ۲kx - k + ۱ = ۰$ بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲, -۱)$ و $B(۸, ۳)$ عمود است، معادلهٔ آن خط کدام است؟

۱) $۲y + ۳x = ۴$
۲) $۲y + ۳x = ۱$
۳) $۲y - ۳x = -۵$
۴) $۳y - ۲x = -۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵۹ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ ۳۰ درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند، حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟

۱) ۲۴
۲) ۳۲
۳) ۳۶
۴) ۴۰

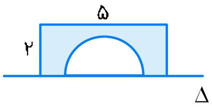
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۰ یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

۱) ۳۶π
۲) ۳۸π
۳) ۳۹π
۴) ۴۰π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۶۱ سطح محدود به مستطیل ۵×۲ و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۵/۵
۳) ۱۶/۵
۴) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۲ حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^۲ + ۴x + ۵} = x^۲ + ۴x + ۳$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۶۳ مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ $(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰$، کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۶۴ دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۵ مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر $۹\sqrt{۲}$ است، اندازهٔ قطر مکعب کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۶ به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ - (m+۱)x + \frac{۱}{۸} = ۰$ برابر با ۲ است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۷ به ازای کدام مقدار a معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲(a-۲)x + ۱۴ - a = ۰$، دارای دو ریشهٔ مثبت است؟

۱) $-۲ < a < ۲$ ۲) $۲ < a < ۵$

۳) $۲ < a < ۱۴$ ۴) $۵ < a < ۱۴$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۸ دایره‌ای به مرکز $(۲, -۱)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $x - y = ۱$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱

۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۹ دایرهٔ گذرا بر نقطهٔ $(۱, -۲)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۱) ۴ و ۱ ۲) ۵ و ۱

۳) ۴ و ۲ ۴) ۵ و ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۰ فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ از نقطهٔ $A(۳, ۶)$، دو برابر فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$

۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۷۱ نقطهٔ $A(-۱, ۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = ۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۳ ، -۵$ ۲) $۲ ، -۴$

۳) $-۱ \pm \sqrt{۲}$ ۴) $-۱ \pm \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + (m-۲)x + m + ۱ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است؟

۱) $-۱ < m < ۰$ ۲) $m < ۰$

۳) $۲ < m < ۸$ ۴) $m > ۸$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۳ معادلهٔ $(x^۲ - ۲x)^۲ - (x^۲ - ۲x) = ۲$، چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۴ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\{\frac{۱}{\alpha} + ۱, \frac{۱}{\beta} + ۱\}$ است؟

۱) $۴x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$
۲) $۴x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$
۳) $۴x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$
۴) $۴x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۷۵ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x(۵x + ۳) = ۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادلهٔ $۴x^۲ - kx + ۲۵ = ۰$ به صورت $\{\frac{۱}{\alpha^۲}, \frac{۱}{\beta^۲}\}$ است؟

۱) ۲۷
۲) ۲۸
۳) ۲۹
۴) ۳۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۷۶ اگر $۲a + \sqrt{۳a + ۱۶} = ۱$ باشد، عدد $۴a + ۹$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۱۵
۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۷ پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت‌وبرگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۳/۵
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۸ به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲$، معکوس یکدیگرند؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷۹ نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $x = ۲y$ مماس است. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵

۳) ۲ ۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۸۰ مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیهٔ اوّل است. اگر این دایره از نقطهٔ $A(۶, ۳)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۶}$

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸۱ دایرهٔ گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$، مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

۱) $(-۳, ۲)$ ۲) $(-۳, ۱)$

۳) $(-۲, ۱)$ ۴) $(-۱, ۲)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۲ دو دایرهٔ C و C' در نقطهٔ $(۰, ۱)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایرهٔ C همواره از نقطهٔ $(۲, -۳)$ بگذرد، مرکز دایرهٔ C' با شعاع $\sqrt{۵}$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۳)$ ۲) $(-۱, ۲)$

۳) $(۱, -۲)$ ۴) $(۱, -۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۸۳ به ازای کدام مقدار a، دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + a = ۰$ مماس خارج یکدیگرند؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸۴ دایرهٔ C بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(۸, ۷)$ می‌گذرد. شعاع دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۸۵ دو دایره گذرا بر نقطهٔ $(۲, -۹)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک چهارم داخل ۱۳۹۵

۸۶ در یک مکعب صفحهٔ گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۷ دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۵$، برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام می‌باشد؟

۱) ۹ و ۱۵-
۲) ۱۱ و ۱۵-
۳) ۱۵ و ۱۱-
۴) ۹- و ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹
قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۸۸ دایره‌ای بر محور xها و خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۰$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیهٔ اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطهٔ مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۹ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(-۱, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ و $C(۰, -۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۹۰ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۱۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس داخل
۲) مماس خارج
۳) متقاطع
۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۹۱ دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲-۴x+۴y=۱$ و $x^۲+y^۲-۴x+۸y+۱۹=۰$، نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارجی
۲) مماس داخلی
۳) متقاطع در دو نقطه
۴) یکی خارج دیگری

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۹۲ به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-۶)x^۲-۲mx-۳=۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است؟

۱) $m<-۶$
۲) $m>۳$
۳) $۰<m<۳$
۴) $۳<m<۶$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹۳ یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

۱) $۰/۴$
۲) $۰/۵$
۳) $۰/۶$
۴) $۰/۸$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۹۴ ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$
۲) $x^۲+۳x+۱=۰$
۳) $x^۲-۵x+۲=۰$
۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۹۵ اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x)=(K+۳)x^۲-۴x+K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۹۶ در معادلهٔ $۳x^۲-۱۷x+m=۰$ یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۹۷ به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ - ۵x + m^۲ - ۳ = ۰$ است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۳ ۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۹۸ به ازای کدام مقدار m، هریک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۸x^۲ - mx - ۸ = ۰$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱

۳) ۱۳ ۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۹ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x = ۱$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $۸x^۲ + kx - ۱ = ۰$ به‌صورت $\{\alpha^۲\beta, \alpha\beta^۲\}$ است؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۰۰ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ - (m + ۳)x + ۵ = ۰$ برابر ۶ است؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱

۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$ و -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۰۱ ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$، از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ یک واحد بیشتر است، b کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۰۲ ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + ax + b = ۰$، یک واحد از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ بیشتر است، b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۰۳ اگر یکی از منحنی های تابع درجهٔ دوم $y = (a - ۱)x^۲ + x + ۳$ نسبت به خط $x = ۲$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۴   ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰۴ اگر منحنی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$، محور xها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m > ۳$ ۲) $۳ < m < ۴$

۳) $۳ < m < ۵$ ۴) $۴ < m < ۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۰۵ به ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

۱) $\frac{-۳}{۲} < m < ۲$ ۲) $۰ < m < ۲$

۳) $\frac{۳}{۲} < m < \frac{۵}{۲}$ ۴) $۲ < m < ۳$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱ گزینه ۳

گام اول

الف) نمودار تابع درجهٔ دو در صورتی بر محور xها مماس می‌شود که ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در این صورت $\Delta = ۰$ خواهد بود.
ب) چون نمودار تابع بالای محور xها قرار دارد و بر محور xها مماس شده است، پس ضریب $x^۲$ مثبت در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$y = (m-۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$$

$$۱)\ \ m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ \ \Delta = ۰ \Rightarrow (-۳)^۲ - ۴(m-۲)(m+۲) = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴(m^۲ - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۴ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow m^۲ = ۴ + \frac{۹}{۴} = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow m = \pm\frac{۵}{۲} \quad (II)$$

اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) مقدار $m = \frac{۵}{۲}$ را به ما می‌دهد.

۲ گزینه ۳

گام اول

اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 + ax + 9 = 0$ را برابر α در نظر بگیریم، ریشهٔ دیگر برابر 2α می‌شود.

گام دوم

روش اول:

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{9}{2} = \frac{c}{a}$ است. هریک از ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\alpha(2\alpha) = \frac{9}{2} \Rightarrow 2\alpha^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها مثبت}} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\alpha = 2(\frac{3}{2}) = 3$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{3}{2}$ و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه‌ها برابر ۴/۵ می‌شود.

روش دوم:

یکی از ریشه‌ها α و دیگری 2α است، پس داریم:

$$2x^2 + ax + 9 = (x-\alpha)(x-2\alpha) = x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$$
$$\Rightarrow x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{9}{2} = x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$$
$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -3\alpha\,,\ 2\alpha^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4}$$
$$\xrightarrow{\alpha>0} \alpha = \frac{3}{2}\,,\ 2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha + 2\alpha = \frac{3}{2} + 3 = 4/5$$

۳

گزینه ۳

گام اول

نکته: فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{3}x+2 \Rightarrow m_1=\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}y-3x+6=0 \Rightarrow m_2=-\frac{-3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

شیب دو خط برابر با $\sqrt{3}$ است؛ بنابراین دو خط موازی‌اند. اکنون باتوجه‌به گام اول، معادلهٔ دو خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.

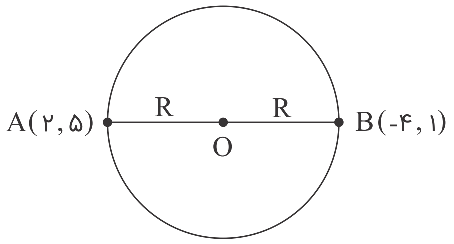
$$y=\sqrt{3}x+2 \Rightarrow y-\sqrt{3}x-2=0$$
$$\sqrt{3}y-3x+6=0 \xrightarrow{\div\sqrt{3}} y-\frac{3}{\sqrt{3}}x+\frac{6}{\sqrt{3}}=0 \Rightarrow y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=0$$

فاصلهٔ این دو خط موازی برابر است با:

$$d=\frac{\left|-2-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\frac{\left|-2\left(1+\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{4}}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}=1+\sqrt{3}$$

۴ گزینه ۱

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

$$O = \frac{A+B}{۲} = (-۱,\ ۳) \Leftarrow O$$ وسط AB است.

$$R = |OA| = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محورx ها}} (x+۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x+۱ = \pm ۲ \Rightarrow x = ۱\ ,\ \ x = -۳$$

۵ گزینه ۳

گام اول

الف) معادله را با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل می‌کنیم.

ب) برای این که معادلهٔ اولیه دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادلهٔ جدید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. پس سه شرط $\Delta > ۰$، $t_۱ + t_۲ > ۰$ و $t_۱t_۲ > ۰$ را برای معادلهٔ جدید بررسی می‌کنیم.

گام دوم

$$x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{x})^۲ - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲ - ۲t + m - ۱ = ۰$$

$$۱)\ \ \Delta > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(m-۱) > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow ۴m < ۸ \Rightarrow m < ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ \ t_۱t_۲ > ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{۱} > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (II)$$

$$۳)\ \ t_۱ + t_۲ > ۰ \Rightarrow -(-\frac{۲}{۱}) > ۰ \Rightarrow ۲ > ۰ \Rightarrow \ \text{همواره برقرار است}$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = ۱$، معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ به معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} = ۰$ تبدیل می‌شود که دارای دو جواب $x = ۰$ و $x = ۴$ است. پس $m = ۱$ نیز قابل‌قبول است:

$$(I) \cap (II) \cup m = ۱ \Rightarrow ۱ \le m < ۲$$

۶ گزینه ۴

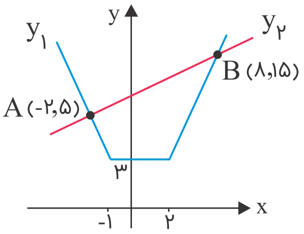
$$y_1 = |x-2| + |x+1| \quad , \quad y_2 = x+7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x+2-x-1 & ; x \le -1 \\ -x+2+x+1 & ; -1 < x \le 2 \\ x-2+x+1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x+1 & ; x \le -1 \\ 3 & ; -1 < x \le 2 \\ 2x-1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$x > 2 : 2x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

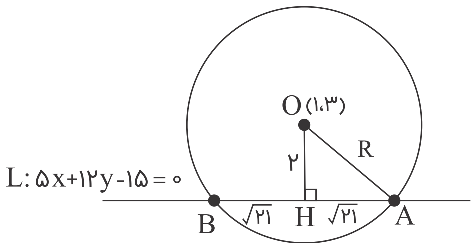
$$x < -1 : -2x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8-(-2))^2 + (15-5)^2}$$
$$= \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2}$$

۷ گزینه ۴

از مرکز دایره بر خط $L: ۵x+۱۲y-۱۵=۰$ عمود می‌کنیم، پس $AH=HB=\sqrt{۲۱}$ و داریم:



$$|OH|=\frac{|۵(۱)+۱۲(۳)-۱۵|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$

$$\overset{\triangle}{OHA}: \text{فیثاغورس} \Rightarrow R^۲=۲^۲+(\sqrt{۲۱})^۲=۲۵$$
$$\Rightarrow \text{دایره}: (x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۲۵$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور xها، مقدار y را در معادلهٔ دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲+(۰-۳)^۲=۲۵\Rightarrow(x-۱)^۲+۹=۲۵\Rightarrow(x-۱)^۲=۱۶$$
$$\Rightarrow x-۱=\pm۴\Rightarrow x=-۳\,,\ x=۵$$
$$\Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور } x \text{ ها}: (-۳\,,۰)\,,\ (۵\,,۰)$$
$$\Rightarrow \text{طول پاره‌خط حاصل}=۵-(-۳)=۸$$

۸ گزینه ۴

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ مثبت باشد باید $\Delta>۰$، $p>۰$ و $s>۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱)\ \Delta>۰\Rightarrow m^۲-۴\times۲\times(m+۶)=m^۲-۸m-۴۸>۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m-۱۲)(m+۴)}_{p}>۰$$

x	$-\infty$		-۴		۱۲		$+\infty$
p(x)		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow m<-۴ \quad \text{یا} \quad m>۱۲$$

$$۲)p>۰\Rightarrow p=-\frac{b}{a}=\frac{-m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰$$

$$۳)s>۰\Rightarrow s=\frac{c}{a}=\frac{m+۶}{۲}>۰\Rightarrow m>-۶$$

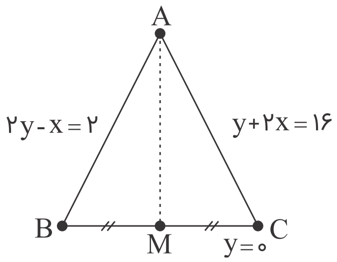
حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، درنتیجه داریم:

$$m\in(-۶,-۴)$$

۹

گزینه ۲

مثلث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ M را به دست آوریم:

از تقاطع دو خط $y+۲x=۱۶$ و $۲y-x=۲$ مختصات نقطهٔ A به دست می‌آید.

$$۲\times\begin{cases}۲y-x=۲\\y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴y-۲x=۴\\y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow y=۴\ ,\ \ x=۶\Rightarrow A(۶,۴)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$۲y-x=۲\xrightarrow{y=۰}x=-۲\Rightarrow B(-۲\,,۰)$$

$$y+۲x=۱۶\xrightarrow{y=۰}x=۸\ \ \Rightarrow C\,(۸\,,\,۰)$$

سپس مختصات نقطهٔ M را حساب می‌کنیم:

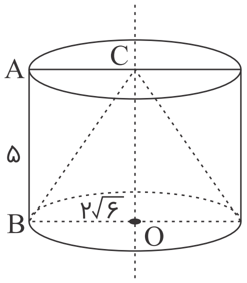
$$M\,(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲})\Rightarrow M\,(۳,۰)$$

اکنون فاصلهٔ دو نقطهٔ M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM=\sqrt{(۳-۶)^{۲}+(۰-۴)^{۲}}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

۱۰ گزینه ۴

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:

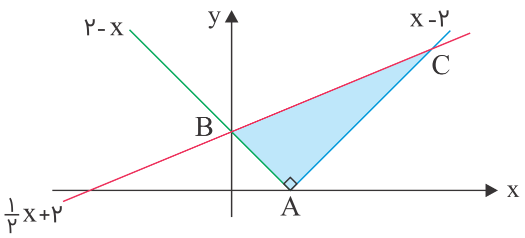


$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) - \frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) = \frac{۲}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)$$
$$= \frac{۲}{۳}\pi(۲۴)(۵) = ۸۰\pi$$

۱۱ گزینه ۴

$$y_۱ = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} = \sqrt{(x-۲)^۲} = |x-۲|$$
$$y_۲ = \frac{۱}{۲}x + ۲$$

$$|x-۲| = \begin{cases} x-۲ & ;x \geq ۲ \\ -x+۲ & ;x < ۲ \end{cases}$$

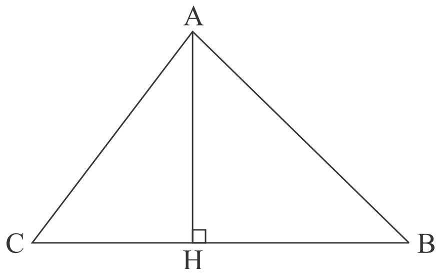


$$\begin{cases} A = (۲\,,\,۰) \\ x-۲ = \frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۴ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow C = (۸\,,\,۶) \\ ۲-x = \frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow B = (۰\,,\,۲) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۲-۰)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-۲)^۲ + (۶-۰)^۲} = ۶\sqrt{۲}$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۶\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲$$

۱۲ گزینه ۴

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصلهٔ رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادلهٔ خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(۷,۳), C(۲,-۲) \Rightarrow m = \frac{۳+۲}{۷-۲} = \frac{۵}{۵} = ۱$$
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۲ = x - ۲ \Rightarrow x - y - ۴ = ۰$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۵)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - ۵ - ۴|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

۱۳ گزینه ۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad , \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{۱}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۱}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲m - ۱}{۳} = \frac{۱}{\frac{(۲ - m)}{۳}} \Rightarrow \frac{-۲m + ۱}{۳} = \frac{۳}{۲ - m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -۴m + ۲m^۲ + ۲ - m = ۹ \Rightarrow ۲m^۲ - ۵m - ۷ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -۱ \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{۷}{۲} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادلهٔ داده‌شده دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta > ۰$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -۱ \Rightarrow ۳x^۲ + (-۲ - ۱)x + ۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ m = \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۳x^۲ + (۲ \times \frac{۷}{۲} - ۱)x + ۲ - \frac{۷}{۲} = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۶x - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰ \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{۷}{۲}$ است.

۱۴

گزینه ۲

گام اول

الف) چون نمودار از طرف بالا بر محور xها مماس شده است، ضریب $x^۲$ مثبت است.

ب) نمودار منحنی درجه دو بر محور xها مماس است. بنابراین معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته و $\Delta=۰$ است.

گام دوم

با مشخص شدن مقدار a، معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کرده و طول نقطهٔ تماس یا همان ریشهٔ مضاعف تابع را مشخص می کنیم:

$$f(x)=ax^۲+۴x+a-۳$$

$$۱)\ \ a>۰ \quad (I)$$

$$۲)\ \ \Delta=۰ \Rightarrow ۴^۲-۴\,(a)(a-۳)=۰ \Rightarrow ۱۶-۴\,(a^۲-۳a)=۰$$
$$\Rightarrow ۴\,(a^۲-۳a)=۱۶ \Rightarrow a^۲-۳a=۴$$
$$\Rightarrow a^۲-۳a-۴=۰ \Rightarrow (a-۴)(a+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ a=-۱ \end{cases} \quad (II)$$

$$(I)\ \cap\ (II): a=۴$$

با در نظر گرفتن $a=۴$، ضابطهٔ $f(x)$ را بازنویسی کرده و معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل می کنیم:

$$f(x)=ax^۲+۴x+a-۳ \xrightarrow{a=۴} f(x)=۴x^۲+۴x+۱=۰$$
$$\Rightarrow (۲x+۱)^۲=۰ \Rightarrow ۲x+۱=۰ \Rightarrow ۲x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

۱۵

گزینه ۴

گام اول

ریشه های معادلهٔ درجه دو را α و β در نظر می گیریم. چون $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ عددی بین α و β است، داریم:

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، در این صورت $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ است.

$$(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های}} \alpha+\beta=-(-\frac{۳}{m^۲-۴})$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۳}{m^۲-۴} \text{ و } \frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{۳}{m^۲-۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow m^۲-۴=۱۲ \Rightarrow m^۲=۱۶ \Rightarrow m=\pm۴$$

به ازای $m=۴$ مقدار Δ برای معادله منفی شده و درنتیجه معادله فاقد ریشه می‌شود، پس فقط $m=-۴$ قابل‌قبول است.

۱۶ گزینه ۳

اول عبارت $\frac{۱}{\sqrt{\beta}} + \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ را ساده می‌کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله است و به‌راحتی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^{۲} = \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A = \sqrt{\alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$۴x^{۲} - ۱۲x + ۱ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{۱۲}{۴}) = ۳ \\ \alpha\beta = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{۳ + ۱} = \sqrt{۴} = ۲$$

پس حاصل $\frac{۱}{\sqrt{\beta}} + \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = \frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

برای اینکه نمودار تابع درجه دوم به فرم $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور xها باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$1)\ a < 0\ ,\ \ 2)\ \Delta < 0$$

مجموعه جواب های این دو نامعادله را به دست آورده و بین آن ها اشتراک می گیریم.

$$y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$$

$$1)\ a < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (I)$$

$$2)\ \Delta < 0 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 - 4(m-1)m < 0 \Rightarrow 3 - 4m^2 + 4m < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0$$

جدول تعیین علامت عبارت $4m^2 - 4m - 3$ را تشکیل می دهیم:

$$4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{4 + \sqrt{64}}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \\ m_2 = \dfrac{4 - \sqrt{64}}{8} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادلهٔ دوم به صورت زیر درمی آید:

$$m \in (-\infty\,,\ -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}\,,\ +\infty) \quad (II)$$

بنابراین مجموعه جواب قابل‌قبول برای m برابر است با:

$$(I)\ \cap\ (II) : m < -\frac{1}{2}$$

۱۸

گزینه ۴

گام اول

الف) منحنی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار Δ بزرگ‌تر از صفر است.

ب) منحنی در دو نقطهٔ منفی محور xها را قطع می‌کند بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها (S) منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) مثبت است.

ج) در هر معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^{2}+bx+c=0$ داریم:

$$\Delta=b^{2}-4ac \quad , \quad S=-\frac{b}{a} \quad , \quad P=\frac{c}{a}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده داریم:

$$a=(m-2)\ ,\ b=-2(m+1)\ ,\ c=12$$

حال هر سه شرط گفته‌شده را بررسی می‌کنیم:

$$\mathrm{I})\Delta>0\Rightarrow 4(m+1)^{2}-4(m-2)(12)>0\Rightarrow 4m^{2}+8m+4-48m+96>0$$

$$\Rightarrow 4m^{2}-40m+100>0\xrightarrow{\div 4}m^{2}-10m+25>0\Rightarrow (m-5)^{2}>0\Rightarrow m\neq 5$$

$$\mathrm{II})S<0\Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2}<0\Rightarrow -1<m<2$$

$$\mathrm{III})P>0\Rightarrow \frac{12}{m-2}>0\Rightarrow m-2>0\Rightarrow m>2$$

اشتراک بین دو مجموعهٔ جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی موردنظر به ازای هیچ مقدار m، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

۱۹ گزینه ۲

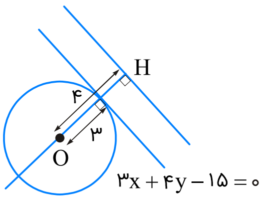
در آغاز معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴ \Rightarrow (x^۲-۲x+۱-۱)+(y^۲+۴y+۴-۴)=۴$$
$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱+۴+۴=۹$$
$$\Rightarrow R_{\text{شعاع}}=\sqrt{۹}=۳,\quad O_{\text{مرکز}}=(۱,-۲)$$

فاصلهٔ هر نقطه مانند $(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ که $a^۲+b^۲\neq ۰$، برابر است با $d=\dfrac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$، پس فاصلهٔ مرکز دایره $O=(۱,-۲)$ تا خط $۳x+۴y-۱۵=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|۳(۱)+۴(-۲)-۱۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

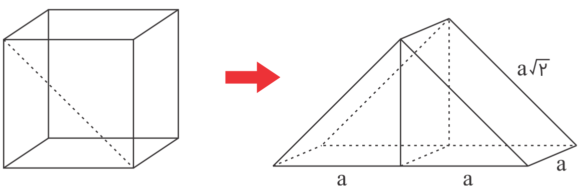
فاصلهٔ یک نقطه تا یک خط برابر با اندازهٔ عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصلهٔ مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. ازآنجاکه هر قطر دایره، در نقطهٔ تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط موردنظر (شکل زیر) برابر می‌شود با $d_{min}=۴-۳=۱$.



۲۰ گزینه ۲

مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S=۲(a\times a\sqrt{۲}+a\times a+۲\times\frac{a^۲}{۲})=۲(a^۲\sqrt{۲}+۲a^۲)=a^۲(۴+۲\sqrt{۲})$$



۲۱

گزینه ۲

گام اول

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0 , y_0)$ از خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = 0$ برابر است با:

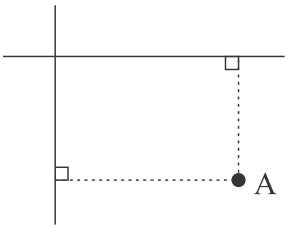
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(8 , 5)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند.

$$2(5) + 8 \neq 6 \quad , \quad 2(8) - 5 \neq 7$$

بنابراین نقطهٔ A روی دو خط قرار ندارد و نقطهٔ برخورد دو خط، رأس روبه‌رو به رأس A خواهد بود. اکنون با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ A از هریک از خطوط، می‌توان طول و عرض مستطیل را به دست آورد.



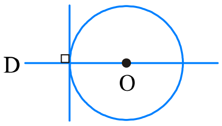
$$2y + x = 6 \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$
$$d_1 = \frac{|2(5) + 8 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$
$$2x - y = 7 \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$$
$$d_2 = \frac{|2(8) - 5 - 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین $d_1 = \frac{12}{\sqrt{5}}$ طول مستطیل و $d_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ عرض مستطیل است و مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$S_{\text{مستطیل}} = d_1 \times d_2 = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9/6$$

۲۲ گزینه ۱

باتوجه‌به آنکه خط به معادلهٔ $۳x + ۲y = a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس این خط قائم بر دایره بوده و درنتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند.



پس مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + y = ۱ \xrightarrow{\text{مرکز}} O(۱, -\frac{۱}{۲})$$

$$۳(۱) + ۲(-\frac{۱}{۲}) = a \Rightarrow a = ۲$$

۲۳ گزینه ۱

طبق تعریف دایره، فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $(a\,,\,۲a)$ از هریک از نقاط $(۲\,,\,۱)$ و $(-۱\,,\,۴)$، ابتدا مقدار a و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} \\ R = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲ = (a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + ۴a^۲ - ۴a + ۱ = a^۲ + ۲a + ۱ + ۴a^۲ - ۱۶a + ۱۶$$

$$\Rightarrow -۸a + ۵ = -۱۴a + ۱۷ \Rightarrow ۶a = ۱۲ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۳^۲} = ۳$$

پس دایره‌ای به مرکز $(۲\,,\,۴)$ و شعاع ۳ داریم.

۲۴ گزینه ۲

یک ریشه را α و ریشهٔ دیگر را $\frac{\alpha}{۲} + ۵$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطهٔ مجموع ریشه‌ها مقدار α و با استفاده از رابطهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌ها m را تعیین می‌کنیم.

$$x^۲ - ۸x + m = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه‌های } (\frac{\alpha}{۲}+۵) \text{ و } \alpha} \alpha + \frac{\alpha}{۲} + ۵ = -(-\frac{۸}{۱}) = ۸ \Rightarrow \frac{۳\alpha}{۲} + ۵ = ۸$$

$$\Rightarrow \frac{۳\alpha}{۲} = ۳ \Rightarrow \alpha = ۲$$

مقدار m را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha(\frac{\alpha}{۲} + ۵) = \frac{m}{۱} = m \Rightarrow ۲(۱ + ۵) = m \Rightarrow m = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

۲۵

گزینه ۱

گام اول

الف) معادلهٔ استاندارد یک دایره به مرکز (α , β) و شعاع R به‌صورت $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$ است.

ب) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ است.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ گستردهٔ نوشته‌شده در گام اول، ضریب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به‌گونه‌ای می‌یابیم که ضریب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ باهم برابر شوند؛ درنتیجه:

$$a^{۲}-۷=۲ \Rightarrow a^{۲}=۹ \Rightarrow a=\pm ۳$$

ازطرفی معادلهٔ این دایره را باید بتوان به‌صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a=+۳$ و $a=-۳$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a=۳ \;:\; ۲x^{۲}+(۹-۷)y^{۲}+۴y+۳=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}+۴y+۳=۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^{۲}+۲(y^{۲}+۲y+۱)+۱=۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^{۲}+۲(y+۱)^{۲}+۱=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow (x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}=-\frac{۱}{۲} \quad \text{غ ق ق}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a=-۳ \;:\; ۲x^{۲}+(۹-۷)y^{۲}+۴y-۳=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}+۴y-۳=۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^{۲}+۲(y^{۲}+۲y+۱)-۵=۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^{۲}+۲(y+۱)^{۲}-۵=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}-\frac{۵}{۲}=۰ \Rightarrow (x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}=\frac{۵}{۲}$$

به ازای $a=-۳$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۰ , -۱)$ و شعاع $R=\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ داریم.

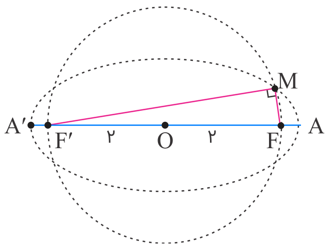
۲۶ گزینه ۲

باتوجه‌به معلومات سؤال، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{طول قطر بزرگ} = ۲a = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = \sqrt{۵} \\ \text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱\end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} c = ۲$$

پس $OF = OF' = ۲$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\overset{\Delta}{MFF'} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$



۲۷ گزینه ۴

اگر زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کند x ساعت فرض شود، آنگاه زمانی که فرهاد برای تایپ مجله صرف می‌کند $x + ۹$ ساعت خواهد بود.

بهروز در یک ساعت $\frac{۱}{x}$ کل کار را انجام می‌دهد و فرهاد در یک ساعت $\frac{۱}{x+۹}$ کل کار و هر دو باهم در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کل کار را انجام می‌دهند.

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۹} = \frac{۱}{۲۰} \xrightarrow{\times ۲۰x(x+۹)} ۲۰(x+۹) + ۲۰x = x(x+۹)$$
$$\Rightarrow ۲۰x + ۱۸۰ + ۲۰x = x^۲ + ۹x \Rightarrow x^۲ - ۳۱x - ۱۸۰ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۳۶)(x+۵) = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۳۶$$

۲۸

گزینه ۲

روش اول:

گام اول

وقتی منحنی یک تابع درجه‌دو بر یک خط مماس باشد، معادلهٔ تلاقی خط و منحنی ریشهٔ مضاعف دارد. پس معادلهٔ خط و منحنی را تلاقی داده، آن را به یک معادلهٔ درجه‌دو استاندارد تبدیل می کنیم و سپس Δ را برابر صفر قرار می دهیم.

گام دوم

$$-x^۲+bx+۳=۷ \Rightarrow -x^۲+bx-۴=۰ \Rightarrow x^۲-bx+۴=۰$$
$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ مضاعف}} \Delta=۰ \Rightarrow b^۲-۱۶=۰ \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm۴$$

به ازای هر کدام از مقادیر b، نقطهٔ تماس خط و منحنی را تعیین می کنیم:

$$b=۴ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲ \xrightarrow{y=۷} A(۲\,,\,۷)$$
$$b=-۴ \Rightarrow x^۲+۴x+۴=۰ \Rightarrow (x+۲)^۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \xrightarrow{y=۷} A(-۲\,,\,۷)$$

بنابراین فاصله دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB=|۲-(-۲)|=۴$$

روش دوم:

بر اساس صورت مسئله، تابع $f(x)=-x^۲+bx+۳$ در نقطه $x=\frac{b}{۲}$ یک ماکزیمم دارد و چون بر خط $y=۷$ مماس است پس $f(\frac{b}{۲})=۷$.

فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس همان فاصله بین ماکزیمم توابع به معادله $y=-x^۲+bx+۳$ است (دو مقدار برای b داریم).

$$f(\frac{b}{۲})=۷ \Rightarrow -\frac{b^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۲}+۳=۷ \Rightarrow \frac{b^۲}{۴}=۴ \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm۴$$

ماکزیمم دو تابع به معادلهٔ $y=-x^۲+۴x+۳$ و $y=-x^۲-۴x+۳$، به ترتیب نقاط $(+۲\,,\,۷)$ و $(-۲\,,\,۷)$ است که فاصله بین آن ها برابر است با:

$$|+۲-(-۲)|=+۴$$

۲۹

گزینه ۲

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) اگر معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای را به‌صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن برابر با $R = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c}$ است.

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه‌به گام اول، مرکز این دایره نقطهٔ $(1, -2)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 + (\frac{4}{2})^2 - a} = \sqrt{1 + 4 - a} = \sqrt{5 - a}$$

ازطرفی فاصلهٔ نقطهٔ $(1, -2)$ از خط $x + 3y = 0$ برابر است با:

$$R = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{5 - a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5 - a = \frac{25}{10} \Rightarrow 50 - 10a = 25$$
$$\Rightarrow 10a = 25 \Rightarrow a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

روش دوم:

باتوجه‌به قسمت (ج) از گام اول، باید معادلهٔ تلاقی خط و دایره، ریشهٔ مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \qquad \text{(I)}$$

با جایگذاری رابطهٔ I در معادلهٔ دایره، به یک معادلهٔ درجه دو برحسب y می‌رسیم که ریشهٔ مضاعف دارد.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \xrightarrow{I} (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0$$
$$\Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a = 0 \Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 100 - 4(10)a = 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow 40a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۳۰ گزینه ۴

$$۳a+\sqrt{۲a^{۲}+۴a}=۲\Rightarrow\sqrt{۲a^{۲}+۴a}=۲-۳a$$

$$\begin{cases}۲-۳a\geq ۰\Rightarrow a\leq\frac{۲}{۳}\\ ۲a^{۲}+۴a\geq ۰\Rightarrow ۲a(a+۲)\geq ۰\Rightarrow a\in[۰,+\infty)\cup(-\infty,-۲]\end{cases}\xrightarrow{\cap}(-\infty,-۲]\cup[۰,\frac{۲}{۳}]$$

$$\sqrt{۲a^{۲}+۴a}=۲-۳a\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲a^{۲}+۴a=۴-۱۲a+۹a^{۲}\Rightarrow ۷a^{۲}-۱۶a+۴=۰$$
$$\Delta=۱۶^{۲}-۴\times۷\times۴=۱۶(۱۶-۷)=۱۶\times۹$$

$$a=\frac{۱۶\pm۱۲}{۱۴}\Rightarrow\begin{cases}a_{۱}=\frac{۱۶+۱۲}{۱۴}=۲\\ a_{۲}=\frac{۱۶-۱۲}{۱۴}=\frac{۲}{۷}\end{cases}$$

بنابراین $a=\frac{۲}{۷}$ قابل‌قبول است.

$$\frac{a+۱}{a}=\frac{\frac{۲}{۷}+۱}{\frac{۲}{۷}}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۳۱ گزینه ۳

در مسیر رفت و برگشت، به خاطر حرکت آب رودخانه به اندازهٔ سرعت آب (v) از سرعت قایق کم و به آن اضافه می‌شود، پس زمان رفت $\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}$ و زمان برگشت $\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}$ است و اختلاف آن‌ها باید ۵ باشد.

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}=۵\xrightarrow{\div۵}۲۴۰(\frac{۱}{۱۰۰-v}-\frac{۱}{۱۰۰+v})=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲۴۰\times۲v}{(۱۰۰-v)(۱۰۰+v)}=۱\Rightarrow ۱۰۰^{۲}-v^{۲}=۴۸۰v$$

$$\Rightarrow v^{۲}+۴۸۰v-۱۰۰۰۰=۰\Rightarrow(v-۲۰)(v+۵۰۰)=۰\xrightarrow{v>۰}v=۲۰$$

۳۲

گزینه ۴

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲, -۱)$ و $F\,(۲, ۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷ - (-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

۳۳

گزینه ۱

گام اول

الف) اگر ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، برابر با $\frac{۲}{\alpha}$ و $\frac{۲}{\beta}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادلهٔ دوم مشخص می کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند. داریم:

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۷}{۴} \\ \alpha\beta = \frac{۳}{۴} \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

برای تعیین مقدار a باید حاصل‌جمع ریشه های معادلهٔ دوم را به دست آوریم:

$$۳x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } \frac{۲}{\alpha} \text{ و } \frac{۲}{\beta}} \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۲\alpha + ۲\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳} \xrightarrow{(\mathrm{I})} \frac{۲(\frac{۷}{۴})}{\frac{۳}{۴}} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{۳} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow a = -۱۴$$

۳۴

گزینه ۱

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α , β) و شعاع R به‌صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$$

گام دوم

طبق قسمت (الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $(۲ , ۰)$ از خط $y = x$، پس داریم:

$$y = x \Rightarrow -x + y = ۰$$
$$R = \frac{|-۲+۰|}{\sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

معادلهٔ این دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲ + (y-۰)^۲ = (\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + y^۲ = ۲$$

اکنون نقطهٔ تلاقی دایره با خط $y = ۱$ را به دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۱} (x-۲)^۲ + ۱ = ۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x-۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

پس این دایره، خط $y = ۱$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

۳۵

گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادلهٔ $y = ۲x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha , ۲\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از هریک از نقاط $(۰ , ۰)$ و $(۱ , ۳)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(\alpha-۰)^۲ + (۲\alpha-۰)^۲} \\ R = \sqrt{(\alpha-۳)^۲ + (۲\alpha-۱)^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^۲ + ۴\alpha^۲} = \sqrt{(\alpha-۳)^۲ + (۲\alpha-۱)^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵\alpha^۲ = (\alpha-۳)^۲ + (۲\alpha-۱)^۲ \Rightarrow ۵\alpha^۲ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ + ۴\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱$$
$$\Rightarrow ۵\alpha^۲ = ۵\alpha^۲ - ۱۰\alpha + ۱۰ \Rightarrow ۱۰\alpha = ۱۰ \Rightarrow \alpha = ۱$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۲-۰)^۲} = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(۱ , ۲)$ و شعاع $\sqrt{۵}$ داریم.

۳۶

گزینه ۱

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$، نقطهٔ $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار R_1+R_2 و $|R_1-R_2|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2+y^2-2x+6y=8 \Rightarrow x^2+y^2-2x+6y-8=0$$

مرکز دایره : $O_1(-\frac{-2}{2}, -\frac{6}{2}) \Rightarrow O_1(1, -3)$

شعاع دایره : $R_1=\sqrt{(-\frac{2}{2})^2+(\frac{6}{2})^2+8}=\sqrt{1+9+8}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$$x^2+y^2+8x-4y+12=0$$

مرکز دایره : $O_2(-\frac{8}{2}, -\frac{-4}{2}) \Rightarrow O_2(-4, 2)$

شعاع دایره : $R_2=\sqrt{(\frac{8}{2})^2+(\frac{-4}{2})^2-12}=\sqrt{16+4-12}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2=\sqrt{(-4-1)^2+(2+3)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$
$$R_1+R_2=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

چون $O_1O_2=R_1+R_2$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

۳۷

گزینه ۱

گام اول

الف) نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله منفی است، بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.

ج) مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a، اشتراک بین سه مجموعه جواب به‌دست‌آمده است.

گام دوم

$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$

۱) $\Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) > 0 \Rightarrow (a+3)^2 + 4a > 0$

$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$

$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -9$ یا $a > -1 \quad (I)$

۲) $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{a+3}{a} < 0$

$\Rightarrow \dfrac{a+3}{a} > 0 \Rightarrow a < -3$ یا $a > 0 \quad (II)$

۳) $P = x_1 . x_2 = -\dfrac{1}{a} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (III)$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a عبارت است از:

$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -9$

۳۸ گزینه ۳

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطهٔ $A(۲\,,\,۰)$ و $B(-۲\,,\,۰)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط AB وتری از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x = ۰$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطهٔ $O(۰\,,\,\alpha)$، مرکز دایره است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y = ۱$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R = OA = \sqrt{(۲-۰)^{۲} + (۰-\alpha)^{۲}} = \sqrt{۴+\alpha^{۲}}$$

$$y = ۱ \Rightarrow y - ۱ = ۰ \Rightarrow R = \frac{|\alpha - ۱|}{\sqrt{۱^{۲}}} = |\alpha - ۱|$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴+\alpha^{۲}} = |\alpha - ۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴ + \alpha^{۲} = (\alpha - ۱)^{۲}$$

$$\Rightarrow ۴ + \alpha^{۲} = \alpha^{۲} - ۲\alpha + ۱ \Rightarrow -۲\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = -\frac{۳}{۲}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = |\alpha - ۱| = \left|-\frac{۳}{۲} - ۱\right| = \left|-\frac{۵}{۲}\right| = \frac{۵}{۲}$$

۳۹ گزینه ۲

گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطهٔ $(-۲\,,\,۱)$ عبور می‌کند و باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، نقطهٔ $(-۲\,,\,۱)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت (ب) از گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲\,,\,۱)$ از خط $y = x - ۱$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y = x - ۱ \Rightarrow x - y - ۱ = ۰$$

$$R = \frac{|-۲ - ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^{۲} + (-۱)^{۲}}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

۴۰ گزینه ۳

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادلهٔ $x - y = ۲$، قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را به‌صورت $\omega(\beta + ۲, \beta)$ در نظر بگیریم. فاصلهٔ مرکز دایره از هر نقطهٔ دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطهٔ $A(۰, ۱)$ و $B(۳, ۰)$ بر این دایره واقع‌اند، پس:

$$R = \omega A = \omega B$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(\beta + ۲ - ۰)^۲ + (\beta - ۱)^۲} = \sqrt{(\beta + ۲ - ۳)^۲ + (\beta - ۰)^۲}$$

$$\Rightarrow (\beta + ۲)^۲ + (\beta - ۱)^۲ = (\beta - ۱)^۲ + \beta^۲ \Rightarrow (\beta + ۲)^۲ = \beta^۲$$

$$\Rightarrow \beta^۲ + ۴\beta + ۴ = \beta^۲ \Rightarrow ۴\beta + ۴ = ۰ \Rightarrow \beta = -۱$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(-۱ + ۲)^۲ + (-۱ - ۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

۴۱

گزینه ۳

گام اول

اگر M، نقطهٔ وسط دو نقطهٔ $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ باشد آنگاه داریم:

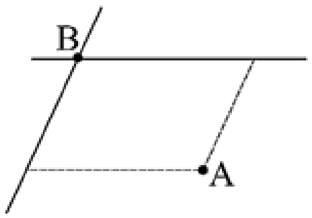
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_۱ + x_۲}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_۱ + y_۲}{۲} \end{cases}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(۷ , ۶)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند:

$$۲(۶) - ۳(۷) \neq ۱۱ \qquad , \qquad ۳(۶) + ۴(۷) \neq ۸$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو خط قطعاً رأس روبه‌رو به رأس A در متوازی‌الاضلاع است.



مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲y - ۳x = ۱۱ \\ ۳y + ۴x = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸y - ۱۲x = ۴۴ \\ ۹y + ۱۲x = ۲۴ \end{cases} \xrightarrow{+} ۱۷y = ۶۸ \Rightarrow y = ۴$$

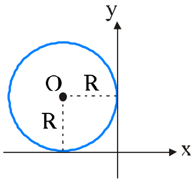
$$۲y - ۳x = ۱۱ \xrightarrow{y=۴} ۸ - ۳x = ۱۱ \Rightarrow -۳x = ۳ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow B(-۱, ۴)$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مختصات وسط قطر AB برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{۷ + (-۱)}{۲} = \dfrac{۶}{۲} = ۳ \\ y_M = \dfrac{۶ + ۴}{۲} = \dfrac{۱۰}{۲} = ۵ \end{array}\right. \Rightarrow M(۳ , ۵)$$

۴۲ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به‌طور کامل در یکی از چهار ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطهٔ $(-۱\,,\,۲)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس دایرهٔ موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R\,,\,R)$ داریم. معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

چون دایره از نقطهٔ $(-۱\,,\,۲)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱\,,\,y=۲}(-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲\Rightarrow ۱-۲R+R^۲+۴-۴R+R^۲=R^۲$$

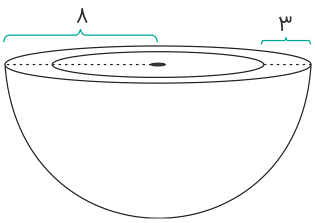
$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰\Rightarrow(R-۵)(R-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}R-۵=۰\Rightarrow R=۵\\R-۱=۰\Rightarrow R=۱\end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$۲R=۲(۵)=۱۰$$

۴۳ گزینه ۴

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیمکرهٔ درونی، نیمکرهٔ بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایرهٔ دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}}=\frac{۱}{۲}(۴\pi\times۶۴)=۲\pi\times۶۴=۱۲۸\pi$$

$$S_{\text{نیمکرهٔ درونی}}=\frac{۱}{۲}(۴\pi\times۲۵)=۲\pi\times۲۵=۵۰\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}}=\pi(۶۴-۲۵)=۳۹\pi$$

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}}+S_{\text{نیمکرهٔ درونی}}+S_{\text{سطح مقطع}}=۱۲۸\pi+۵۰\pi+۳۹\pi=۲۱۷\pi$$

۴۴

گزینه ۲

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x=۳ \xrightarrow{y=mx+۲} x^{۲}+(mx+۲)^{۲}-۲x=۳ \Rightarrow x^{۲}+m^{۲}x^{۲}+۴mx+۴-۲x=۳$$
$$\Rightarrow (m^{۲}+۱)x^{۲}+(۴m-۲)x+۱=۰$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (۴m-۲)^{۲}-۴(m^{۲}+۱)(۱)=۰ \Rightarrow ۱۶m^{۲}-۱۶m+۴-۴m^{۲}-۴=۰$$
$$\Rightarrow ۱۲m^{۲}-۱۶m=۰ \Rightarrow m(۱۲m-۱۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ ۱۲m-۱۶=۰ \Rightarrow m=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۴۵ گزینه ۱

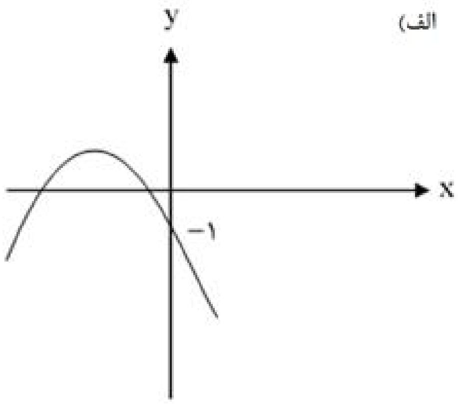
اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^۲ + bx + c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند این است که ضریب $x^۲$ یا همان a منفی باشد. که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳$$

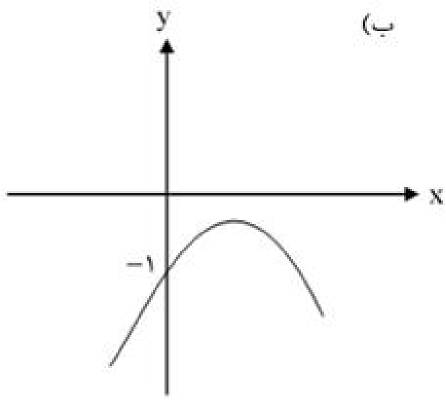
روش اول:

تابع صورت سؤال را می توان در دو حالت زیر فرض کرد:

الف)



ب)



$$f(x) = (a - ۳)x^۲ + ax - ۱ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -۱$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > ۰ \quad , \quad S < ۰ \quad , \quad \Delta > ۰$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq ۰$ باشد.

برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴(a - ۳) > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow a > ۲ \ \text{ یا } \ a < -۶ \quad (I)$$

$$S < ۰ \Rightarrow -\frac{a}{a - ۳} < ۰ \xrightarrow{a-۳<۰} -a > ۰ \Rightarrow a < ۰ \quad (II)$$

$$P > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a-۳} > ۰ \ (III)$$

(با توجه به اینکه $a - ۳ < ۰$، همواره برقرار است.)

$$(I) \ \cap \ (II) \ \cap \ (III) \Rightarrow a < -۶$$

برای حالت (ب):

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴(a-۳) \leq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ \leq ۰ \Rightarrow -۶ \leq a \leq ۲$$

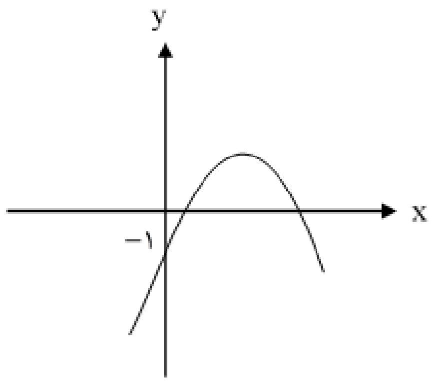
چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی گذرد داریم:

$$(-\infty \ , \ -۶) \cup [-۶\,,\,۲] = (-\infty\,,\,۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

روش دوم:

با توجه به اینکه $a < ۳$ است حالتی را در نظر می گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به‌دست‌آمده را از $a < ۳$ کم می کنیم.

چون عرض از مبدأ -۱ است و $a < ۳$؛ پس تابع ماکزیمم دارد.



و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

۱) باید دو ریشه داشته باشد $\Rightarrow \Delta > ۰$

۲) جمع ریشه ها > ۰

۳) ضرب ریشه ها > ۰

$$\Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴(a-۳)(-۱) > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۶) > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶ \ \ (I)$$

$$\text{جمع ریشه ها} > ۰ \Rightarrow \frac{-a}{a-۳} > ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۳ \quad (II)$$

$$\text{ضرب ریشه ها} > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a-۳} > ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (III)$$

$$(I) \ \cap \ (II) \ \cap \ (III) \Rightarrow ۲ < a < ۳$$

به ازای بازهٔ به دست آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می کند. پس با کم کردن این بازه از $a < ۳$ خواسته سؤال محقق می شود.

$$(-\infty\,,\,-۳) - (۲\,,\,۳) = (-\infty\,,\,۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

درنتیجه به ازای بازهٔ فوق برای a نمودار تابع از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی دذرد.

۴۶

گزینه ۲

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ $(۲, ۱)$، $(-۲, ۴)$ و $(۰, ۰)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$
$$\xrightarrow{(۲,۱)} ۲^۲ + ۱^۲ + a(۲) + b(۱) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱ + ۲a + b + c = ۰ \Rightarrow ۲a + b + c = -۵ \qquad (I)$$
$$\xrightarrow{(-۲,۴)} (-۲)^۲ + ۴^۲ + a(-۲) + b(۴) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱۶ - ۲a + ۴b + c = ۰ \Rightarrow -۲a + ۴b + c = -۲۰ \qquad (II)$$
$$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰^۲ + ۰^۲ + a(۰) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \qquad (III)$$

با جایگذاری $c = ۰$ در دو معادلهٔ I و II، به یک دستگاه دومعادله و دومجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲a + b = -۵ \\ -۲a + ۴b = -۲۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۵b = -۲۵ \Rightarrow b = -۵$$
$$۲a + b = -۵ \xrightarrow{b=-۵} ۲a - ۵ = -۵ \Rightarrow ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{۰}{۲})^۲ + (\frac{-۵}{۲})^۲ - ۰} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۴۷ گزینه ۴

$a_2, 2a_5, a_8$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس:

$$2a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2}$$
$$\Rightarrow 2a_1q^4 = \frac{a_1q + a_1q^7}{2} \Rightarrow 4q^3 = 1 + q^6$$
$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3 = t} t^2 - 4t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}\ ,\ \ q = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جملهٔ هشتم بزرگ‌ترین جمله است و درنتیجه $q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$، پس:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1q^7}{a_1q} = q^6 = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

۴۸ گزینه ۲

گام اول

الف) معادلهٔ درجه چهار را با تغییر متغیر $x^2 = y$ به معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل می‌کنیم.

ب) اگر قرار باشد معادلهٔ درجهٔ چهار داده‌شده دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، باید برای معادلهٔ درجهٔ دو تشکیل‌شده داشته باشیم $\Delta > 0$.

ج) نکتهٔ دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل‌ضرب و هم حاصل‌جمع ریشه‌ها مثبت است.

گام دوم

$$x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - (m+2)y + m + 5 = 0$$
$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m^2 > 16 \Rightarrow |m| > 4 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad (\mathrm{I})$$

حاصل‌جمع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$-(-\frac{(m+2)}{1}) > 0 \Rightarrow m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (\mathrm{II})$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها نیز مثبت است، پس:

$$\frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m + 5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad (\mathrm{III})$$

برای اینکه هر سه شرط فوق برقرار باشد، بین مجموعهٔ جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(\mathrm{I}) \cap (\mathrm{II}) \cap (\mathrm{III}) : m > 4$$

۴۹ گزینه ۳

گام اول

فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c''=0$ برابر است با:

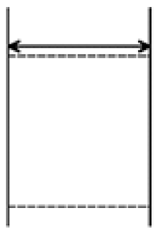
$$d=\frac{|c-c''|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$2x-2y=3 \Rightarrow m_1=-\frac{2}{-2}=+1$$
$$y=x+1 \Rightarrow m_2=+1$$

دو خط داده‌شده باهم موازی‌اند؛ بنابراین فاصلهٔ این دو خط از هم برابر با طول ضلع مربع خواهد بود.
برای محاسبهٔ فاصلهٔ میان دو خط موازی، لازم است معادلات دو خط را به فرم استاندارد بنویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.



$$2x-2y=3 \Rightarrow 2x-2y-3=0 \xrightarrow{\div(-2)} -x+y+\frac{3}{2}=0$$
$$y=x+1 \Rightarrow y-x-1=0$$
$$d=\frac{\left|\frac{3}{2}-(-1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|\frac{3}{2}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

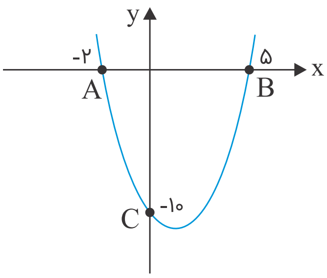
$$S_{\text{مربع}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}\times\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{25}{4\times 2}=\frac{25}{8}$$

۵۰ گزینه ۳

$$y = x^۲ - ۳x - ۱۰ \Rightarrow y = (x - ۵)(x + ۲)$$
$$\xrightarrow{y=۰} x = -۲\ ,\ x = ۵$$

باتوجه‌به صفرهای تابع، نمودار تابع محور xها را در نقاط $A(-۲, ۰)$ و $B(۵, ۰)$ قطع می‌کند. همچنین محور yها را در نقطهٔ $C(۰, -۱۰)$ قطع می‌کند.

همچنین به علت مثبت بودن ضریب $x^۲$، دهانهٔ این سهمی روبه‌بالا باز می‌شود؛ بنابراین نمودار آن به شکل زیر است:

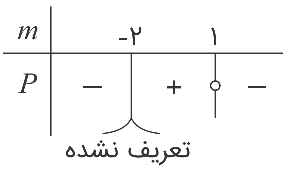


همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای آنکه طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور xها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به‌سمت xهای مثبت انتقال دهیم.

۵۱ گزینه ۱

این منحنی باید دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد؛ درنتیجه کافی است حاصل‌ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{۱ - m}{m + ۲} < ۰$$



$\Rightarrow m > ۱$ یا $m < -۲$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < ۰$ باشد، $\Delta > ۰$ می‌شود.

۵۲ گزینه ۲

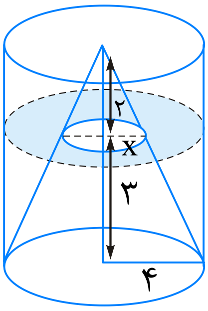
ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ - ۱ - ۴ + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O_۱ : (۱, -۲),\ R_۱ = ۲$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصلهٔ مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲ \Rightarrow \sqrt{(۱ - (-۲))^۲ + (-۲ - ۲)^۲} = ۲ + R_۲ \Rightarrow ۵ = ۲ + R_۲ \Rightarrow R_۲ = ۳$$

۵۳ گزینه ۴



نسبت تشابه : $\frac{x}{۴} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{۸}{۵}$

$$S = \pi(۴)^۲ - \pi(\frac{۸}{۵})^۲ = ۱۶\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۳۶}{۲۵}\pi = ۱۳/۴۴\pi$$

۵۴ گزینه ۱

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۰,۰) را صدق می‌دهیم}} c = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۲,۱) را صدق می‌دهیم}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۱,−۲) را صدق می‌دهیم}} ۱ + ۴ + a - ۲b = ۰$$

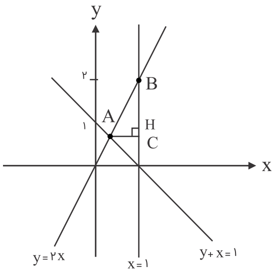
اکنون با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\times ۲} ۴a + ۲b = -۱۰ \\ \quad a - ۲b = -۵ \end{array} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳, b = ۱$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

۵۵ گزینه ۱

با رسم خطوط در یک دستگاه، مطابق شکل کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH است.



مختصات نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = ۲x \\ x + y = ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ y = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ارتفاع مثلث یعنی AH روی خط $y = \frac{۲}{۳}$ قرار دارد.

۵۶ گزینه ۴

فاصلهٔ نقطهٔ A را از خط راست به دست می‌آوریم. فاصلهٔ به‌دست‌آمده نصف اندازهٔ ضلع مربع است.

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \Rightarrow d = \frac{۲ + ۳ + ۵}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

$$d = \frac{a}{۲} \Rightarrow a = ۲d = \frac{۲۰}{\sqrt{۵}} \Rightarrow s = a^۲ = (\frac{۲۰}{\sqrt{۵}})^۲ = ۸۰$$

۵۷ گزینه ۲

سه رأس داده‌شده مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{۳}{۲} \\ m_{BC} = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$S = \frac{(AC) \times (BC)}{۲} \xrightarrow{AC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳},BC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}} S = \frac{\sqrt{۱۳} \times \sqrt{۱۳}}{۲} = ۶/۵$$

۵۸ گزینه ۲

گام اول

الف) دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمودند، هرگاه داشته باشیم:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ب) شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ج) شیب خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$m = -\frac{a}{b}$$

گام دوم

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(2 , -1)$ و $B(8 , 3)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{3 + 1}{6} = \frac{2}{3}$$

شیب خط انتخاب‌شده از میان دسته خطوط با معادلهٔ $(k + 1)y + 2kx - k + 1 = 0$ برابر است با:

$$m' = -\frac{2k}{k + 1}$$

این دو خط بر هم عمود هستند، بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، باید داشته باشیم:

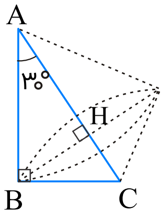
$$m_{AB} \cdot m' = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times (-\frac{2k}{k+1}) = -1 \Rightarrow \frac{-4k}{3k + 3} = -1 \Rightarrow -4k = -3k - 3$$
$$\Rightarrow k = 3$$

به ازای $k = 3$، معادلهٔ خط انتخاب‌شده به دست می‌آید.

$$(k + 1)y + 2kx - k + 1 = 0 \xrightarrow{k=3} 4y + 6x - 3 + 1 = 0 \Rightarrow 4y + 6x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow 2(2y + 3x - 1) = 0 \Rightarrow 2y + 3x - 1 = 0 \Rightarrow 2y + 3x = 1$$

۵۹ گزینه ۲

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول وتر AC، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH)،شعاع قاعدهٔ این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = ۸ \Rightarrow BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$$
$$BC^۲ = AC.CH \Rightarrow ۱۶ = ۸ \times CH$$
$$\Rightarrow CH = ۲ \Rightarrow AH = ۸ - ۲ = ۶$$
$$BH^۲ = AH.CH = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times AH + \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times CH$$
$$= \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۶ + \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۲$$
$$= ۲۴\pi + ۸\pi = ۳۲\pi$$

۶۰

گزینه ۳

گام اول

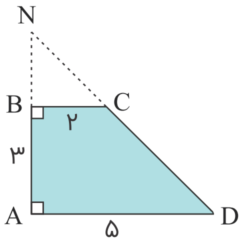
الف) در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.

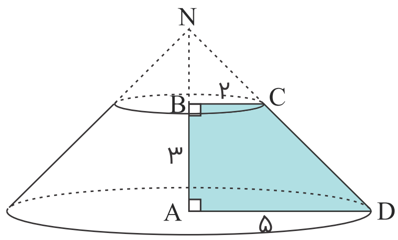
ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ج) حجم مخروط از رابطهٔ $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

ذوزنقهٔ $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $N\overset{\Delta}{B}C$ و $N\overset{\Delta}{A}D$ قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران ذوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $N\overset{\Delta}{B}C$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $N\overset{\Delta}{A}D$ حول ضلع NA کم کنیم.





باتوجه‌به اینکه $BC||AD$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN+۳} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow ۵BN = ۲BN + ۶ \Rightarrow ۳BN = ۶ \Rightarrow BN = ۲$$

بنابراین:

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } N\overset{\Delta}{A}D} - V_{\text{دوران مثلث } N\overset{\Delta}{B}C}$$

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲ \times ۵ - \frac{۱}{۳}\pi(۲)^۲ \times ۲ = \frac{۱}{۳}\pi\,(۱۲۵ - ۸) = \frac{۱۱۷}{۳}\pi = ۳۹\pi$$

۶۱

گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکتهٔ ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکتهٔ ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین باتوجه‌به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{۳}{۲}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(۲)^۲ \times ۵ - \frac{۴}{۳}\pi(\frac{۳}{۲})^۳ = ۲۰\pi - \frac{۹}{۲}\pi = ۱۵/۵\pi$$

۶۲ گزینه ۲

برای حل معادلهٔ داده‌شده از تغییر متغیر به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$x^{۲} + ۴x + ۳ = t$$

حالا معادلهٔ جدید برحسب t به صورت زیر درمی آید:

$$x^{۲} + ۴x + ۳ = \sqrt{x^{۲} + ۴x + ۳ + ۲} \Rightarrow t = \sqrt{t + ۲}$$

با حل معادلهٔ به‌دست‌آمده، مقدار t و در ادامه حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اصلی را محاسبه می‌کنیم.

$$t = \sqrt{t+۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^{۲} = t + ۲ \Rightarrow t^{۲} - t - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۲)(t+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۲ = ۰ \Rightarrow t = ۲ \\ t + ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱ \end{cases}$$

اکنون معادلهٔ اصلی را حل می‌کنیم:

$$t = ۲ \Rightarrow x^{۲} + ۴x + ۳ = ۲ \Rightarrow x^{۲} + ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x_{۱}x_{۲} = ۱$$

$t = -۱$ غیرقابل‌قبول است. چون حاصل رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد.

۶۳ گزینه ۲

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^{۲} + x = t$، معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

گام دوم

$$(x^{۲}+x)^{۲} - ۱۸(x^{۲}+x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^{۲}+x=t} t^{۲} - ۱۸t + ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۱۲)(t-۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲ \\ t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = ۶ \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می کنیم:

$$t = ۱۲ \Rightarrow x^{۲} + x = ۱۲ \Rightarrow x^{۲} + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x+۴)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = -۴ \\ x_{۲} = ۳ \end{cases}$$

$$t = ۶ \Rightarrow x^{۲} + x = ۶ \Rightarrow x^{۲} + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{۳} = -۳ \\ x_{۴} = ۲ \end{cases}$$

مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} + x_{۴} = -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$$

۶۴ گزینه ۳

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A\,(۱, ۰)$ و $B\,(۳, ۰)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O\,(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲$$

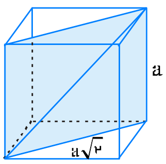
$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O\,(۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

۶۵ گزینه ۴

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحهٔ قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{۲}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازهٔ a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a\left(a\sqrt{۲}\right) = ۹\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad a^۲\sqrt{۲} = ۹\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad a^۲ = ۹ \quad \Rightarrow \quad a = ۳$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

۶۶ گزینه ۴

گام اول

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، باید رابطهٔ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲$ برقرار باشد.

گام دوم

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\Rightarrow A^{۲}=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=S+۲\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\quad,\quad S=\frac{m+۱}{۲}\quad,\quad P=\frac{۱}{۱۶}$$

$$A=\sqrt{\frac{m+۱}{۲}+۲(\frac{۱}{۴})}=۲\Rightarrow\sqrt{\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow m+۱=۷\Rightarrow m=۶$$

۶۷ گزینه ۴

گام اول

شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دو دارای ۲ ریشهٔ مثبت باشد، این است که:

$$۱)\ \Delta>۰\qquad ۲)\ S>۰\qquad ۳)\ P>۰$$

گام دوم

$$\Delta>۰\Rightarrow ۴(a-۲)^{۲}-۴(۱)(۱۴-a)>۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴}(a-۲)^{۲}-(۱۴-a)>۰\Rightarrow a^{۲}-۴a+۴-۱۴+a>۰\Rightarrow a^{۲}-۳a-۱۰>۰$$

$$\Rightarrow (a-۵)(a+۲)>۰\Rightarrow a<-۲\ \text{ یا }\ a>۵\quad(۱)$$

$$S>۰\Rightarrow ۲(a-۲)>۰\Rightarrow a-۲>۰\Rightarrow a>۲\quad(۲)$$

$$P>۰\Rightarrow ۱۴-a>۰\Rightarrow a<۱۴\quad(۳)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳):۵<a<۱۴$$

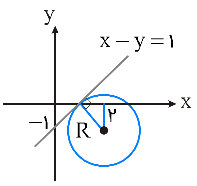
۶۸ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_\circ, y_\circ)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = \circ$ برابر است با:

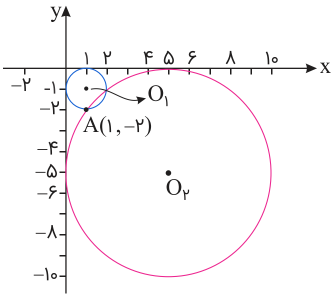
$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$



$$\text{معادلهٔ دایره} : (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=\circ} (x-۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$



شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $A(1,-2)$ می‌گذرند. به‌علاوه مرکز دایره‌ها به‌صورت $O(r,-r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r,-r)$ و شعاع r هستند. معادلهٔ آن‌ها به این صورت است:

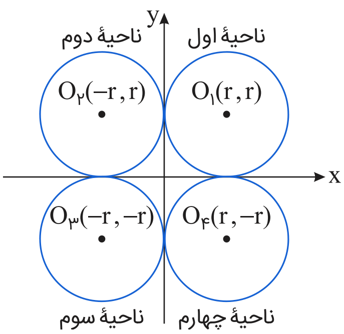
$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2 \xrightarrow{(1,-2)} (1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2 \Rightarrow r^2-6r+5=0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=5 \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم.

نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به‌صورت زیر است:



۷۰ گزینه ۴

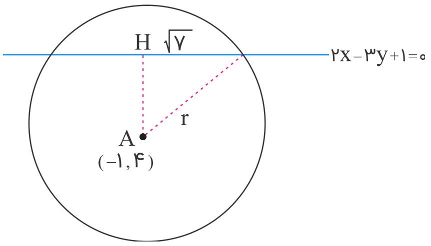
$$\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۶)^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹+y^۲-۱۲y+۳۶=۴x^۲+۴y^۲$$
$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x+۱۲y-۴۵=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲+y^۲+۲x+۴y-۱۵=۰$$
$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۲۰ \Rightarrow O(-۱,-۲)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow ۲r=۴\sqrt{۵}$$

۷۱ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^۲=AH^۲+\sqrt{۷}^۲\Rightarrow r^۲=۱۳+۷=۲۰$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰\xrightarrow{y=۲}(x+۱)^۲+۴=۲۰\Rightarrow (x+۱)^۲=۱۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۵ \end{cases}$$

۷۲ گزینه ۱

شرط آنکه معادلهٔ درجه دومی، ۲ ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta > 0$، $S = \frac{-b}{a} > 0$ و $P = \frac{c}{a} > 0$ باشند.

$$x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m-2)}{1} > 0 \Rightarrow m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1$$

از اشتراک دو شرط بالا $-1 < m < 2$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نیست ولی ما شرط $\Delta > 0$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 8 \\ \text{یا} \\ m < 0 \end{cases}$$

از اشتراک $-1 < m < 2$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-1 < m < 0$

۷۳ گزینه ۳

با فرض $x^2 - 2x = t$ داریم:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

۷۴ گزینه ۳

ابتدا از روی معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۴=۰$، حاصل $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم. سپس حاصل $\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱$ و $(\frac{۱}{\alpha}+۱)\ (\frac{۱}{\beta}+۱)$ را محاسبه می کنیم. اگر S و P مقادیر حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های یک معادلهٔ درجه دو باشند، آن معادلهٔ درجه دو به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ نوشته می شود.

$$۲x^۲-۳x-۴=۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases}\alpha+\beta=-(-\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-\frac{۴}{۲}=-۲\end{cases}$$

S و P را برای معادلهٔ جدید به دست می آوریم:

$$S=\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=-\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی آید:

$$x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

۷۵ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ $x(۵x+۳)=۲$ را به فرم استاندارد معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل کرده و باتوجه به اینکه α و β ریشه های آن است، مقدار $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم.

برای یافتن k باید حاصل $\frac{۱}{\beta^۲}+\frac{۱}{\alpha^۲}$ را محاسبه کرده و برابر $\frac{k}{۴}$ قرار دهیم.

$$x(۵x+۳)=۲ \Rightarrow ۵x^۲+۳x=۲ \Rightarrow ۵x^۲+۳x-۲=۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{۳}{۵}\\ \alpha\beta=-\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

مقدار k را محاسبه می کنیم:

$$۴x^۲-kx+۲۵=۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\frac{۱}{\alpha^۲} \text{ و } \frac{۱}{\beta^۲} \text{ ریشه های}} \frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{k}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{k}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{(-\frac{۳}{۵})^۲-۲(-\frac{۲}{۵})}{(-\frac{۲}{۵})^۲}=\frac{k}{۴} \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{\frac{۲۹}{۲۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴}=\frac{k}{۴} \Rightarrow k=۲۹$$

۷۶ گزینه ۱

$$\sqrt{۳a+۱۶} = ۱ - ۲a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳a + ۱۶ = ۱ - ۴a + ۴a^{۲}$$

$$\Rightarrow ۴a^{۲} - ۷a - ۱۵ = ۰ \Rightarrow (۴a+۵)(a-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ a = \dfrac{-۵}{۴} \end{cases}$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} ۱ - ۲a \geq ۰ \Rightarrow a \leq \dfrac{۱}{۲} \\ ۳a + ۱۶ \geq ۰ \Rightarrow a \geq -\dfrac{۱۶}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\cap} a \in [-\frac{۱۶}{۳}, \frac{۱}{۲}]$$

پس $a = ۳$ در معادلهٔ اولیهٔ صدق نمی‌کند، بنابراین $a = -\dfrac{۵}{۴}$ است.

$$۴a + ۹ = ۴(-\frac{۵}{۴}) + ۹ = -۵ + ۹ = ۴$$

۷۷ گزینه ۴

فرض کنید سرعت پرواز پرونده v باشد. در این صورت سرعت رفت $v + ۵$ و سرعت برگشت $v - ۵$ خواهد بود و داریم:

$$t_{۱} = \frac{x_{۱}}{v_{۱}} \Rightarrow t_{۱} = \frac{۱}{۵ + v}$$
$$t_{۲} = \frac{x_{۲}}{v_{۲}} \Rightarrow t_{۲} = \frac{۱}{v - ۵}$$

$$t_{۱} + t_{۲} = ۹\ (\text{min}) = \frac{۹}{۶۰}\ (\text{h}) \Rightarrow \frac{۹}{۶۰} = \frac{۱}{۵+v} + \frac{۱}{v-۵}$$

$$\frac{۳}{۲۰} = \frac{۱}{۵+v} + \frac{۱}{v-۵} \xrightarrow{\times ۲۰(v^{۲}-۲۵)} ۳(v^{۲}-۲۵) = ۲۰(v-۵) + ۲۰(v+۵)$$

$$\Rightarrow ۳v^{۲} - ۷۵ = ۲۰v - ۱۰۰ + ۲۰v + ۱۰۰$$
$$\Rightarrow ۳v^{۲} - ۴۰v - ۷۵ = ۰ \Rightarrow (۳v+۵)(v-۱۵) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = ۱۵ & \checkmark \\ v = -\dfrac{۵}{۳} & \times \end{cases}$$

۷۸

گزینه ۲

گام اول

وقتی گفته می شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^۲ + bx + c = ۰$ در می آوریم:

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲ \Rightarrow mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می کنیم.

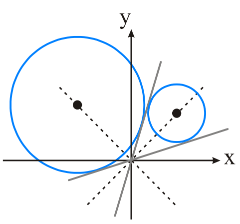
$$mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } x_۱ \text{ و } x_۲} x_۱x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱x_۲ = \frac{m^۲ - ۲}{m} = ۱$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۲ = m \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۲)(۲) = ۹ - ۱۶ = -۷ < ۰ \\ m = -۱ \Rightarrow -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(-۱)(-۱) = ۹ - ۴ = ۵ > ۰ \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > ۰$ فقط $m = -۱$ جواب قابل‌قبول است.

۷۹

گزینه ۳

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط قرار دارد. باتوجه‌به شکل، مرکز دایرهٔ کوچک‌تر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگ‌تر روی $y = -x$ قرار دارد.



$$M(۲\sqrt{۵}, ۲\sqrt{۵})$$

شعاع دایره برابر با فاصلهٔ مرکز آن از خط $۲y - x = ۰$ است.

$$R = \frac{|۴\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} = ۲$$

۸۰ گزینه ۱

مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ اول است، پس مختصات آن به‌صورت (x,x) است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(6,3)$ و خط $y=2x$ یکسان است، پس داریم:

$$\sqrt{(x-6)^2+(x-3)^2}=\frac{|2x-x|}{\sqrt{4+1}}\Rightarrow (x-6)^2+(x-3)^2=\frac{x^2}{5}\Rightarrow 2x^2-18x+45=\frac{x^2}{5}$$
$$\Rightarrow 9x^2-90x+225=0\Rightarrow x^2-10x+25=0\Rightarrow (x-5)^2=0\Rightarrow x=5$$
$$\text{شعاع دایره}:\ R=\frac{|x|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

۸۱ گزینه ۳

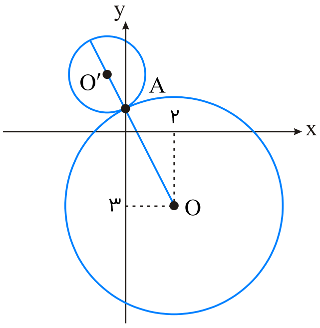
چون دایره بر دو خط موازی $y=2x$ و $y=2x+10$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y=2x+5$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصلهٔ این دو خط است.

$$\text{فاصله دو خط}=\frac{|10-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\Rightarrow R=\sqrt{5}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصلهٔ مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

$$R=\sqrt{x^2+(2x+5)^2}\Rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{5x^2+20x+25}$$
$$\Rightarrow 5(x^2+4x+4)=0\Rightarrow (x+2)^2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow y=2(-2)+5=1$$
$$\text{مرکز دایره}=(-2,1)$$

گزینه ۱



مطابق شکل، مراکز دو دایرهٔ مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایرهٔ C' در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (۲, -۳)$ و $A = (۰, ۱)$، داریم:

$$m_{OA} = \frac{۱ - (-۳)}{۰ - ۲} = -۲$$

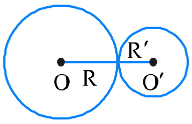
$$\text{معادلهٔ خط } OA : y - ۱ = -۲(x - ۰) \Rightarrow y = -۲x + ۱$$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ $(-۱, ۳)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است و در معادلهٔ خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-۱, ۳)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(۰ + ۱)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۵}$$

۸۳ گزینه ۴

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ - ۴ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} O = (-۲, ۰) \\ R = \sqrt{۴} = ۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + a = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۱ + (y+۴)^۲ - ۱۶ + a = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۴)^۲ = ۱۷ - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (۱, -۴) \\ R' = \sqrt{۱۷ - a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-۲-۱)^۲ + (۰+۴)^۲} = ۵ \\ R + R' = ۲ + \sqrt{۱۷ - a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'|=R+R'} ۵ = ۲ + \sqrt{۱۷ - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۷ - a} = ۳ \Rightarrow ۱۷ - a = ۹ \Rightarrow a = ۸$$

۸۴ گزینه ۲

شعاع و مرکز دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰$ عبارت‌اند از:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۹$$

مرکز : $O'(۲, -۱)$, شعاع : $R' = ۳$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایرهٔ C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(۸, ۷)$ مرکز دایرهٔ C است.

$$d = OO' = \sqrt{(۲-۸)^۲ + (-۱-۷)^۲} = ۱۰$$

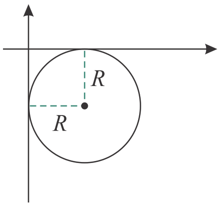
چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow ۱۰ = R + ۳ \Rightarrow R = ۷$$

۸۵ گزینه ۳

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $(۲, -۹)$ نیز عبور کند به‌صورت زیر است:



ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(x_۰, y_۰)$ و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ = R^۲$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم‌شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x - R)^۲ + (y + R)^۲ = R^۲$$

چون هر دو دایره از نقطهٔ $(۲, -۹)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

$$\xrightarrow{x=۲, y=-۹} (۲ - R)^۲ + (-۹ + R)^۲ = R^۲ \Rightarrow ۴ - ۴R + R^۲ + ۸۱ - ۱۸R + R^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۲۲R + ۸۵ = ۰ \Rightarrow (R - ۱۷)(R - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R = ۱۷ \\ R = ۵ \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.

۸۶ گزینه ۲

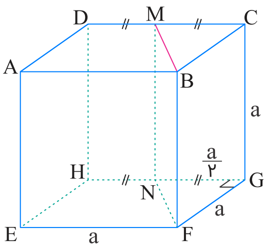
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های EF، FG، AE، BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از AB و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ M را به نقطهٔ N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN \| BF$ و درنتیجه صفحهٔ گذرنده از BF و M، از نقطهٔ N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را V_1، حجم بزرگ‌تر را V_2 و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^3$$

$$V_1 = S_{\overset{\Delta}{GFN}} \times CG = \frac{1}{2}(a)(\frac{a}{2})(a) = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{3a^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$$



۸۷ گزینه ۲

گام اول

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام دوم

نقطهٔ فرضی $A(\alpha, \alpha - 1)$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ A از خط به معادلهٔ $2x - 3y = 5$ برابر با $\sqrt{13}$ باشد؛ بنابراین طبق گام اول داریم:

$$2x - 3y = 5 \Rightarrow 2x - 3y - 5 = 0$$

$$\sqrt{13} = \frac{|2\alpha - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \Rightarrow \sqrt{13} = \frac{|2\alpha - 3\alpha + 3 - 5|}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow 13 = |-\alpha - 2| \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2 = -13 \Rightarrow \alpha = 11 \\ -\alpha - 2 = 13 \Rightarrow \alpha = -15 \end{cases}$$

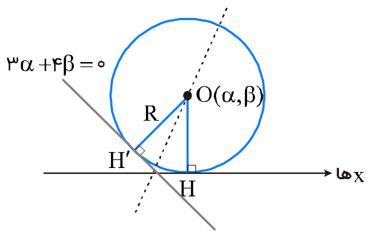
بنابراین دو نقطه روی خط $y = x - 1$ که فاصلهٔ آن‌ها از خط $2x - 3y = 5$ برابر با $\sqrt{13}$ باشد، دارای طول ۱۱ و ۱۵- است.

۸۸ گزینه ۱

مرکز دایره را نقطهٔ $O(\alpha, \beta)$ درنظر می‌گیریم. باید فاصلهٔ O از محور xها با فاصلهٔ آن از خط $۳x + ۴y = ۰$، برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|۳\alpha + ۴\beta|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۳a + ۴\beta|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha + ۴\beta = ۵\beta \\ ۳\alpha + ۴\beta = -۵\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha = \beta \\ ۳\alpha = -۹\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} : O(\alpha, ۳\alpha) \\ \text{مرکز} : O(\alpha, -\frac{۱}{۳}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیهٔ اول است، پس فقط $O(\alpha, ۳\alpha)$ قابل‌قبول است؛بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = ۳ \Rightarrow \beta = ۳\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = ۱$$

۸۹ گزینه ۳

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{A(-۱,۰)} (-۱)^۲ + ۰^۲ + a(-۱) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۱ - a + c = ۰ \Rightarrow a - c = ۱ \qquad (I)$$

$$\xrightarrow{B(۳,۰)} ۳^۲ + ۰^۲ + a(۳) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۹ + ۳a + c = ۰ \Rightarrow ۳a + c = -۹ \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{C(۰,-۳)} ۰^۲ + (-۳)^۲ + a(۰) + b(-۳) + c = ۰ \Rightarrow ۹ - ۳b + c = ۰ \Rightarrow c - ۳b = -۹ \qquad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادلهٔ I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = ۱ \\ ۳a + c = -۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$

$$a - c = ۱ \xrightarrow{a=-۲} c = -۲ - ۱ = -۳$$

با جایگذاری $c = -۳$ در معادلهٔ (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - ۳b = -۹ \xrightarrow{c=-۳} -۳ - ۳b = -۹ \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۲}{۲})^۲ + ۳} = \sqrt{۱ + ۱ + ۳} = \sqrt{۵}$$

۹۰

گزینه ۱

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$، نقطهٔ $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $|R_1-R_2|$ و R_1+R_2 مقایسه می‌کنیم.

$$x^2+y^2-2x+4y=13 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y-13=0$$

$$\text{مرکز دایره} : O_1(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}) \Rightarrow O_1(1, -2)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_1=\sqrt{(-\frac{2}{2})^2+(\frac{4}{2})^2+13}=\sqrt{1+4+13}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2+2x=1 \Rightarrow x^2+y^2+2x-1=0$$

$$\text{مرکز دایره} : O_2(-\frac{2}{2}, -\frac{0}{2}) \Rightarrow O_2(-1, 0)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_2=\sqrt{(\frac{2}{2})^2+0+1}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2=\sqrt{(-1-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$R_1+R_2=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$
$$|R_1-R_2|=\left|3\sqrt{2}-\sqrt{2}\right|=2\sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2=|R_1-R_2|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

۹۱ گزینه ۲

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$، مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار R_1+R_2 و $|R_1-R_2|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^2+y^2-4x+4y=1\Rightarrow x^2+y^2-4x+4y-1=0$$

$$\text{مرکز دایره}: O_1(-\frac{-4}{2},-\frac{4}{2})\Rightarrow O_1(2,-2)$$

$$\text{شعاع دایره}: R_1=\sqrt{(-\frac{4}{2})^2+(\frac{4}{2})^2-(-1)}=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$x^2+y^2-4x+8y+19=0$$

$$\text{مرکز دایره}: O_2(-\frac{-4}{2},-\frac{8}{2})\Rightarrow O_2(2,-4)$$

$$\text{شعاع دایره}: R_2=\sqrt{(-\frac{4}{2})^2+(\frac{8}{2})^2-19}=\sqrt{4+16-19}=1$$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2=\sqrt{(2-2)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{0+(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

همچنین داریم:

$$|R_1-R_2|=|3-1|=2$$

بنابراین $O_1O_2=|R_1-R_2|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

۹۲ گزینه ۴

برای اینکه تابع دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m-6)x^2-2mx-3=0$$

$$1)\ \Delta>0 \Rightarrow (2m)^2-4(m-6)(-3)>0$$

$$4m^2+4(3m-18)>0$$

$$m^2+3m-18>0 \Rightarrow (m+6)(m-3)>0 \Rightarrow \begin{cases} m>3 \\ \text{یا} \\ m<-6 \end{cases}$$

$$2)\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6}<0 \Rightarrow 0<m<6$$

$$3)\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6}>0 \Rightarrow m-6<0 \Rightarrow m<6$$

اشتراک جواب‌ها : $3<m<6$

۹۳ گزینه ۳

فرض کنید x، مقدار تبخیر برحسب کیلوگرم باشد. ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

وزن رنگ خالص $= 11 \times 40\% + 4 \times 70\% = 7/2$ کیلوگرم

بنابراین در $15 = 11 + 4$ کیلوگرم رنگ موجود، $7/2$ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر x میزان تبخیر باشد، آنگاه:

$$\frac{7/2}{15-x}=50\%=\frac{50}{100}$$

$\Rightarrow 720=750-50x \Rightarrow x=0/6$ کیلوگرم

۹۴ گزینه ۴

گام اول

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{1}{\alpha}-1$ و $\frac{1}{\beta}-1$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{3}{2} \\ P=\alpha\beta=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر به‌صورت $\frac{1}{\alpha}-1$ و $\frac{1}{\beta}-1$ است، لذا:

$$S'=(\frac{1}{\alpha}-1)+(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}-2=-5$$

$$P'=(\frac{1}{\alpha}-1)(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1$$

$$=\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+1=\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}+1=2$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^2-S'x+P'=0 \Rightarrow x^2+5x+2=0$$

۹۵

گزینه ۱

گام اول

اگر تابع درجه دو دارای ماکسیمم باشد، باید ضریب $x^۲$ منفی شود.

گام دوم

ضریب $x^۲$ منفی است پس:

$$K+۳<۰ \Rightarrow K<-۳$$

عرض بیشترین مقدار تابع (عرض ماکسیمم) برابر صفر است:

$$-\frac{\Delta}{۴a}=۰ \Rightarrow \Delta=۰ \Rightarrow (-۴)^۲-۴(K+۳)K=۰$$
$$\Rightarrow ۱۶=۴(K+۳)K \Rightarrow K(K+۳)=۴ \Rightarrow K^۲+۳K-۴=۰$$
$$\Rightarrow (K+۴)(K-۱)=۰ \xrightarrow{K<-۳} K=-۴$$

البته اگر از اول نگاهی به گزینه ها می انداختیم تنها گزینه ای که $K<-۳$ باشد، گزینهٔ ۱ یعنی $k=-۴$ است.

۹۶

گزینه ۲

یک ریشه را α و ریشهٔ دیگر را $۳\alpha+۳$ در نظر می گیریم.

با استفاده از حاصل جمع ریشه ها مقدار α را محاسبه می کنیم. سپس با استفاده از حاصل ضرب ریشه ها مقدار m را به دست می آوریم.

$$۳x^۲-۱۷x+m=۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (۳\alpha+۳) \text{ ریشه های}} \alpha+(۳\alpha+۳)=-(-\frac{۱۷}{۳})$$
$$\Rightarrow ۴\alpha+۳=\frac{۱۷}{۳} \Rightarrow ۴\alpha=\frac{۸}{۳} \Rightarrow \alpha=\frac{۲}{۳}$$
$$۳\alpha+۳=۳(\frac{۲}{۳})+۳=۲+۳=۵$$

پس حاصل‌ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha\times(۳\alpha+۳)=\frac{۲}{۳}\times۵=\frac{m}{۳} \Rightarrow \frac{m}{۳}=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow m=۱۰$$

۹۷ گزینه ۲

گام اول

α و β را ریشه های معادلهٔ درجه دو فرض می کنیم. $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین α و β است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta = (\sqrt{۲})^{۲} = ۲$$

گام دوم

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر α و β ریشه های معادله باشند، حاصل ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$mx^{۲} - ۵x + m^{۲} - ۳ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha\text{ و }\beta\text{ ریشه های}} \alpha\beta = \frac{m^{۲} - ۳}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=۲} ۲ = \frac{m^{۲} - ۳}{m} \Rightarrow m^{۲} - ۳ = ۲m$$

$$\Rightarrow m^{۲} - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow (m - ۳)(m + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۳ \\ m = -۱ \end{cases}$$

$$m = ۳ : \quad ۳x^{۲} - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵ - ۷۲ < ۰ \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m = -۱ : \quad -x^{۲} - ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵ - ۸ > ۰$$

پس فقط $m = -۱$ قابل‌قبول است.

۹۸ گزینه ۳

اگر α و β را ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲} - x - ۲ = ۰$ در نظر بگیریم، داریم:

$$۲x^{۲} - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۱}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱ \end{cases}$$

بنابراین $\alpha^{۳}$ و $\beta^{۳}$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۸x^{۲} - mx - ۸ = ۰$ می‌شود:

$$۸x^{۲} - mx - ۸ = ۰ \Rightarrow S' = \alpha^{۳} + \beta^{۳} = (\alpha + \beta)^{۳} - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= (\frac{۱}{۲})^{۳} - ۳(-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{۸}$$

$$S' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{۸} \Rightarrow \frac{۱۳}{۸} = \frac{m}{۸} \Rightarrow m = ۱۳$$

۹۹ گزینه ۲

اگر فرض کنیم $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \alpha^2\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $8x^2 + kx - 1 = 0$ باشند آنگاه کافی است $x_1 + x_2$ را به دست آوریم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$8x^2 + kx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \frac{-k}{8} \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = -\frac{k}{8} \Rightarrow (\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{k}{8} \Rightarrow k = 6$$

۱۰۰ گزینه ۱

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) درصورتی‌که $\Delta > 0$ باشد معادلهٔ درجه‌دو، دو ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dfrac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \dfrac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\frac{m+3}{m})^2 - 2(\frac{5}{m}) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی} \\ m = -\dfrac{9}{5} \Rightarrow -\dfrac{9}{5}x^2 - \dfrac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشهٔ حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۰۱ گزینه ۴

گام اول

الف) فرض کنید α و β ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ باشند پس می توانیم نتیجه بگیریم که $(\alpha + ۱)$ و $(\beta + ۱)$ ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ هستند.

ب) برای به دست آوردن مقدار b باید حاصل ضرب ریشه های معادله یا همان $(\alpha+۱)(\beta+۱)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۴}{۳} \\ \alpha\beta = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \quad (I)$$

$$۳x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } (\alpha+۱) \text{ و } (\beta+۱)} (\alpha+۱)(\beta+۱) = \frac{b}{۳}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = \frac{b}{۳} \xrightarrow{(I)} -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} + ۱ = \frac{b}{۳} \Rightarrow \frac{b}{۳} = ۲ \Rightarrow b = ۶$$

۱۰۲ گزینه ۲

گام اول

الف) ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ را α و β فرض می‌کنیم. بنابراین ریشه های معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ به صورت $(\alpha+۱)$ و $(\beta+۱)$ می شود.

ب) برای به دست آوردن b ، باید حاصل ضرب $(\alpha+۱)(\beta+۱)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{۷}{۳} \\ \alpha\beta = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } (\alpha+۱) \text{ و } (\beta+۱)} (\alpha+۱)(\beta+۱) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = b \xrightarrow[\alpha+\beta=-\frac{۷}{۳}]{\alpha\beta=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳} - \frac{۷}{۳} + ۱ = -۱ = b \Rightarrow b = -۱$$

۱۰۳ گزینه ۴

در تابع درجه‌دو به فرم $y = ax^۲ + bx + c$، محور تقارن منحنی ، خط $x = -\frac{b}{۲a}$ است. با توجه به این نکته، مقدار aرا به دست می آوریم:

$$y = (a-۱)x^۲ + x + ۳ \xrightarrow{\text{محور تقارن } x=۲} x = -\frac{۱}{۲(a-۱)} = ۲ \Rightarrow a - ۱ = -\frac{۱}{۴}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع درجه‌دو به صورت $y = -\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۳$ درمی‌آید. معادلهٔ $y = ۰$ را حل می کنیم:

$$y = ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times(-۴)} x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ x = -۲ \ \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

چون در سؤال ذکرشده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط $x = ۶$ قابل‌قبول است.

۱۰۴ گزینه ۳

گام اول

الف) اولاً نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می کند، پس معادلهٔ $y = ۰$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > ۰$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله مثبت است، بنابراین حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه ها باید مثبت باشد.

گام دوم

$$y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$$

$$۱)\ \ \Delta > ۰ \Rightarrow (-۴)^۲ - ۴(۲)(m-۳) > ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۸(m-۳) > ۰$$

$$\Rightarrow ۸(m-۳) < ۱۶ \Rightarrow m - ۳ < ۲ \Rightarrow m < ۵ \ \ (I)$$

$$۲)\ \ S = x_۱ + x_۲ = -(-\frac{۴}{۲}) = ۲ > ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$۳)\ \ P = x_۱.x_۲ = \frac{m-۳}{۲} > ۰ \Rightarrow m - ۳ > ۰ \Rightarrow m > ۳ \ \ (II)$$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای m، اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است پس می توان نوشت:

$$(I) \ \cap \ (II): \ \ ۳ < m < ۵$$

۱۰۵ گزینه ۲

گام اول

الف) با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ معادلهٔ داده‌شده را به معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

ب) برای این که معادلهٔ اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادلهٔ جدید باید دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد (چون در این صورت یک بار $\sqrt{x}$ برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می‌آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل‌قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشهٔ مختلف العلامه داشته باشد.

ج) حالت دیگر این است که معادلهٔ اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادلهٔ جدید یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

گام دوم

$$mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰\Rightarrow m(\sqrt{x})^۲-۳(\sqrt{x})+m-۲=۰\xrightarrow{\sqrt{x}=t}mt^۲-۳t+m-۲=۰$$

حالت اول : $t_۱t_۲<۰\Rightarrow \dfrac{m-۲}{m}<۰\Rightarrow ۰<m<۲(I)$

حالت دوم : $mt^۲-۳t+m-۲=۰\xrightarrow{\Delta=۰}۹-۴m(m-۲)=۰\Rightarrow ۹-۴m^۲+۸m=۰$

$$\Rightarrow -۴m^۲+۸m+۹=۰\Rightarrow m=\frac{۲\pm\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{m>۰}m=\frac{۲\pm\sqrt{۳}}{۲}\quad (II)$$

جواب سؤال اشتراک (I) و (II) است که باتوجه‌به گزینه‌ها جواب به‌صورت $۰<m<۲$ می‌شود.