۵-۳ : رسم نمودار

در این بخش می‌خواهیم ببینیم چگونه می‌توان نمودار یک تابع را رسم کرد. رسم نمودار تابع در بررسی رفتار آن اهمیت ویژه‌ای دارد. در واقع با رسم نمودار تابع تقریباً هر آن‌چه که لازم است در مورد یک تابع بدانیم را می‌توان مشخص کرد. ابتدا به روش کلی رسم نمودار خواهیم پرداخت. با اجرای مراحل زیر می‌توان نمودار هر تابعی را رسم کرد. البته در ادامه خواهیم دید که گاهی اوقات بعضی از مراحل ضروری نیستند، یا دشوار و طولانی هستند و می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد.

روش کلی رسم نمودار تابع

مراحل کلی رسم نمودار تابع به ترتیب زیر هستند:

۱- دامنه‌ی تابع را تعیین می‌کنیم.

۲- در صورت متناوب بودن تابع، دوره تناوب آن را مشخص می‌کنیم و نمودار را فقط در یک دوره تناوب رسم می‌کنیم.

۳- اگر تابع زوج یا فرد است، آن را مشخص می‌کنیم. (در این صورت کافی است نمودار را برای xهای نامنفی رسم کنیم و آن را نسبت به محور yها و یا مبدأ قرینه کنیم.)

۴- مجانب‌های تابع را در صورت وجود مشخص می‌کنیم.

۵- مشتق اول تابع را محاسبه می‌کنیم و با تعیین علامت آن، صعودی یا نزولی بودن تابع و نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی را مشخص می‌کنیم.

۶- مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم و با تعیین علامت آن، جهت تقعر و نقاط عطف تابع را معین می‌کنیم.

۷- محل برخورد نمودار با محورهای مختصات را در صورت امکان، معین می‌کنیم.

۸- مقدار تابع (یا حد آن) را در نقاط بحرانی، عطف و نقاط ابتدا و انتهای دامنه، مشخص می‌کنیم.

۹- با تشکیل جدول تغییرات تابع و قرار دادن اطلاعات به‌دست آمده از مراحل فوق در آن، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^۳-۳x$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است، تابع متناوب نیست و فرد است. همچنین مجانب ندارد. محل برخورد نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

محل برخورد با محور عرض‌ها: $x=۰ \Rightarrow y=۰$

محل برخورد با محور طول‌ها: $y=۰ \Rightarrow x^۳-۳x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۳)=۰ \Rightarrow x=۰ \quad , \quad x=\pm\sqrt{۳}$

مشتق اول و دوم تابع را محاسبه کرده و ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x=\pm۱ \qquad , \qquad f''(x)=۶x=۰ \Rightarrow x=۰$$

مقدار تابع را در نقاط بحرانی و عطف محاسبه کرده و مقدار حد آن را در ابتدا و انتهای دامنه می‌یابیم:

$$x=-۱ \Rightarrow y=۲ \qquad , \quad x=۰ \Rightarrow y=۰ \quad , \quad x=۱ \Rightarrow y=-۲$$

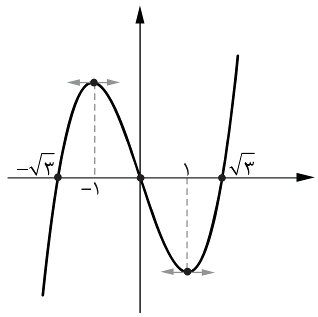
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

جدول تغییرات تابع را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	۲	$\searrow$	۰	$\searrow$	-۲	$\nearrow$	$+\infty$
			max		عطف		min		

نمودار تابع را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

نقاط $(-۱,۲)$، $(۰,۰)$، $(۱,-۲)$، $(\sqrt{۳},۰)$ و $(-\sqrt{۳},۰)$ را مشخص می‌کنیم.



نمودار از ربع سوم آغاز می‌شود و در بازه‌ی $(-\infty,-۱]$ با تقعر رو به پایین ابتدا به نقطه‌ی $(-\sqrt{۳},۰)$ و سپس تا نقطه‌ی $(-۱,۲)$ صعود می‌کند و در این نقطه ماکسیمم نسبی دارد. از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ با تقعــر رو به پایین بــه نقطه‌ی $(۰,۰)$ نزول می‌کند و در این نقطه عطف دارد. از نقطه‌ی $(۰,۰)$ با تقعر رو به بالا به نقطه‌ی $(۱,-۲)$ نزول می‌کند و در این نقطه می‌نیمم نســبی دارد. در بازه‌ی $[۱,+\infty)$ نمودار از نقطه‌ی $(۱,-۲)$ با تقعر رو به بالا ابتدا به نقطه‌ی $(\sqrt{۳},۰)$ و ســپس تا بی‌نهایت با همین روند صعود می‌کند.

مسأله‌ی (۱): نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=x^۳-x^۲-x+۱$ ب) $f(x)=\dfrac{۲x}{x^۲+۱}$ پ) $f(x)=\sqrt{-x^۲+۲x+۳}$

راه‌حل: الف) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است. تابع مجانب ندارد. محل برخورد با محورها را مشخص می‌کنیم:

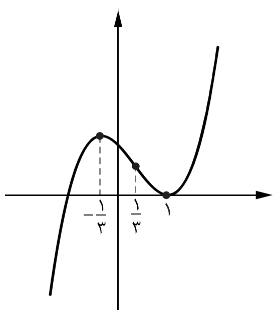
$$x=۰\Rightarrow y=۱\quad,\quad y=۰\Rightarrow x^۲(x-۱)-(x-۱)=۰\Rightarrow(x-۱)(x^۲-۱)=۰\Rightarrow(x-۱)^۲(x+۱)=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱$$

مشتقات اول و دوم تابع و ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۲x-۱=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=-\frac{۱}{۳}\qquad,\qquad f''(x)=۶x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

جدول تغییرات تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−		−	۰	+	
$f''(x)$		−		−	۰	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{۳۲}{۲۷}$ max	↘	$\frac{۱۶}{۲۷}$ عطف	↘	۰ min	↗	$+\infty$



ب) تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x^۲+۱}$ دارای دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و تابعی فرد است، مجانب قائم ندارد و خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^۲+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{x}=۰$$

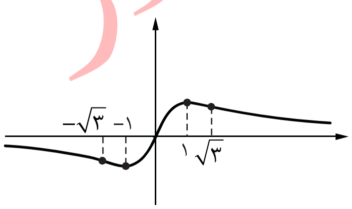
مبدأ مختصات محل برخورد نمودار با محورهاست: $x=۰\Rightarrow y=۰$

مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲(۱-x^۲)}{(x^۲+۱)^۲}=۰\Rightarrow x=\pm۱\quad,\quad f''(x)=\frac{۴x(x^۲-۳)}{(x^۲+۱)^۳}=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm\sqrt{۳}$$

جدول تغییرات تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		−		−	۰	+		+	۰	−		−	
$f''(x)$		−	۰	+		+	۰	−		−	۰	+	
$f(x)$	۰	↘	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ عطف	↘	-۱ min	↗	۰ عطف	↗	۱ max	↘	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ عطف	↘	۰



توجه کنید که تابع فرد است و نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

پ) ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$ را محاسبه می‌کنیم: $-x^2+2x+3\geq 0 \Rightarrow (x+1)(3-x)\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 3$

با توجه به کران‌دار بودن دامنه و برد تابع، نمودار مجانب ندارد. حال محل برخورد با محورها را مشخص می‌کنیم:

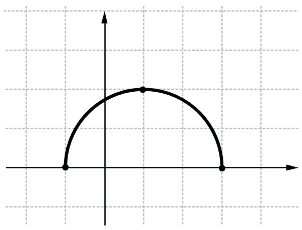
$$x=0 \Rightarrow y=\sqrt{3} \quad , \quad y=0 \Rightarrow x=-1 \, , \, x=3$$

مشتق اول و دوم تابع را معین می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad f''(x)=\frac{-\sqrt{-x^2+2x+3}-\dfrac{(-x+1)^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}}{-x^2+2x+3}=\frac{4}{(x^2-2x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

بنابراین جدول تغییرات تابع به صورت زیر است:

x	-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0



توجه کنید که نمودار تابع یک نیم‌دایره به شعاع ۲ و مرکز $(1,0)$ است.

$$y=\sqrt{-x^2+2x+3} \Rightarrow y^2=-x^2+2x+3 \Rightarrow y^2+x^2-2x+1=4 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=4 \quad , \quad y\geq 0$$

مسأله‌ی (۲): **نمودار توابع زیر را رسم کنید.**

الف) $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ **ب)** $f(x)=\cos^{-1}(\sqrt{x})$ **پ)** $f(x)=2xe^x$

راه‌حل: الف) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$، تابع متناوب و دوره تناوب آن $T=2\pi$ است. بنابراین اگر نمودار آن را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ رسم کنیم، کافی است. تمام نمودار را می‌توان از تکرار این قسمت به‌دست آورد. همچنین نمودار تابع فاقد مجانب است. حال محل تلاقی نمودار با محورها را معین می‌کنیم.

$$x=0 \Rightarrow y=\sqrt{3} \quad , \quad y=0 \Rightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=0 \Rightarrow \tan x=-\sqrt{3} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} \, , \, x=\frac{5\pi}{3}$$

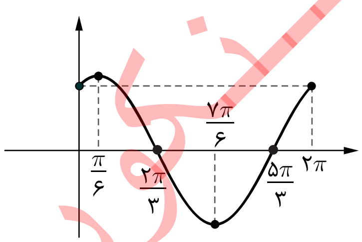
مشتق اول و دوم را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x=0 \Rightarrow \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6} \quad , \quad x=\frac{7\pi}{6}$$

$$f''(x)=-\sin x-\sqrt{3}\cos x=0 \Rightarrow \tan x=-\sqrt{3} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3} \quad , \quad x=\frac{5\pi}{3}$$

جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$
			max		عطف		min		عطف		



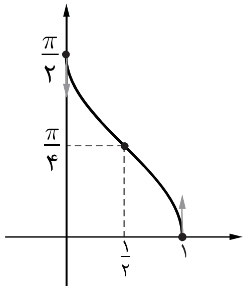
ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=\cos^{-1}(\sqrt{x})$ را محاسبه می‌کنیم: $-1\leq\sqrt{x}\leq 1 \Rightarrow 0\leq x\leq 1$

به دلیل کران‌دار بودن دامنه و برد، تابع مجانب ندارد. مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}<0 \quad , \quad f''(x)=\frac{\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}}{2(x-x^2)}=\frac{1-2x}{4(x-x^2)\sqrt{x-x^2}}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	$\circ$		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-\infty$	$-$		$-$	$-\infty$
$f''(x)$		$+$	$\circ$	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\circ$
			عطف		



توجه کنید که تابع در نقاط $x=\circ$ و $x=1$ دارای مشتق نامتناهی است و مماس قائم دارد.

پ) دامنه‌ی تابع $f(x)=3xe^x$، $\mathbb{R}$ است و مجانب قائم ندارد ولی در $-\infty$ دارای مجانب افقی است.

(دقت کنید که رشد مخرج بسیار بیش‌تر از رشد صورت است.) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{e^{-x}}=\circ \Rightarrow$ $y=\circ$ مجانب افقی است.

در $+\infty$ تابع مجانب افقی و مایل ندارد. زیرا: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^x=+\infty\ ,\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}3e^x=+\infty$

نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد: $x=\circ\Rightarrow y=\circ$

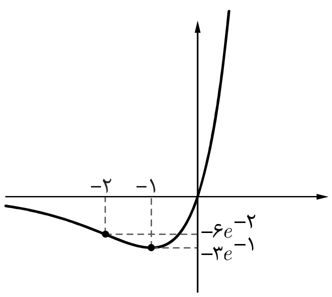
مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=3(e^x+xe^x)=3e^x(x+1)=\circ \Rightarrow x=-1$$

$$f''(x)=3(e^x(x+1)+e^x)=3e^x(x+2)=\circ \Rightarrow x=-2$$

جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	$\circ$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$\circ$	$+$		$+$	
$f(x)$	$\circ$	$\searrow$	$-6e^{-2}$	$\searrow$	$-3e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$
			عطف		min		



نمودار توابع چندجمله‌ای

ابتدا به مسأله‌ی زیر توجه کنید که در آن نمودار تابعی چندجمله‌ای از درجه‌ی چهار را رسم خواهیم کرد:

مسأله‌ی (۳): **نمودار تابع $f(x)=3x^4-4x^3-1$ را رسم کنید.**

راه‌حل: دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است و تابع مجانب ندارد. محل برخورد با محور yها نقطه‌ی $(\circ,-1)$ است ولی پیدا کردن محل برخورد با محور xها ساده نیست و از آن صرف نظر می‌کنیم. مشتقات اول و دوم تابع و ریشه‌های آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=12x^3-12x^2=\circ \Rightarrow 12x^2(x-1)=\circ \Rightarrow x=\circ\ ,\ x=1$$

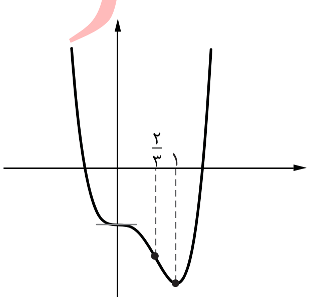
$$f''(x)=36x^2-24x=\circ \Rightarrow 12x(3x-2)=\circ \Rightarrow x=\circ\ ,\ x=\frac{2}{3}$$

حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^4=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^4=+\infty$$

جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\circ$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\circ$	$-$		$-$	$\circ$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{43}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			عطف		عطف		min		



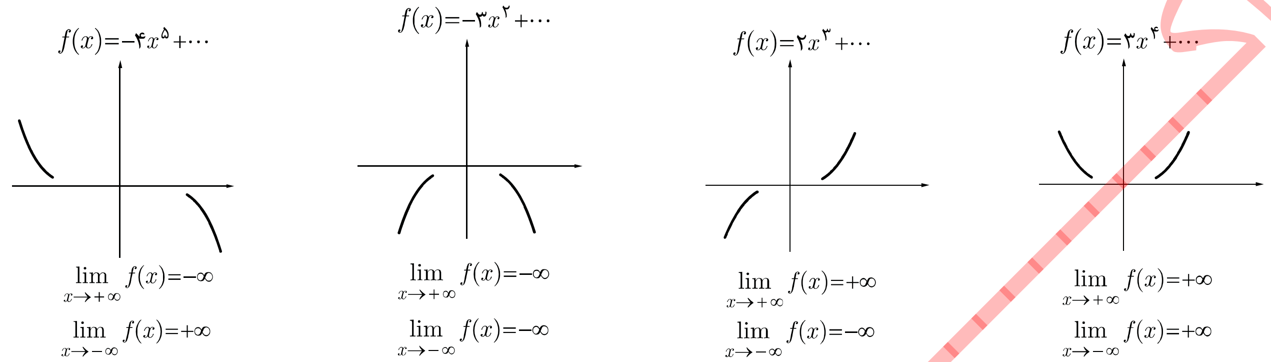
تذکر: در رسم نمودار توابع چندجمله‌ای به موارد زیر توجه می‌کنیم:

۱- ضابطه‌ی این توابع به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ است.

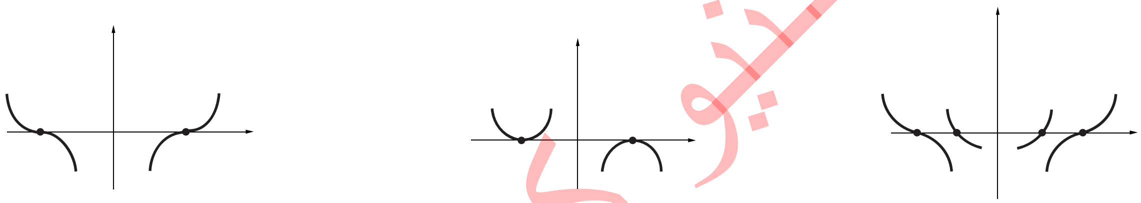
۲- دامنه‌ی این توابع $\mathbb{R}$ است و پیوسته و مشتق‌پذیر هستند.

۳- نمودار این توابع دارای خط مجانب نیست. $(n>1)$

۴- اگر $a_n>0$، آن‌گاه اگر n زوج باشد، نمودار از ربع دوم شروع شده و در ربع اول تمام می‌شود و اگر n فرد باشد، نمودار از ربع سوم شروع شده و در ربع اول تمام می‌شود. همچنین اگر $a_n<0$، آن‌گاه اگر n زوج باشد، نمودار از ربع سوم شروع شده و در ربع چهارم تمام می‌شود و اگر n فرد باشد، نمودار از ربع دوم شروع شده و در ربع چهارم تمام می‌شود. مثلاً:



۵- وضعیت نمودار در اطراف ریشه‌های تابع به یکی از سه حالت زیر است:



ریشه‌های ساده: نمودار از محور طول‌ها عبور می‌کند و ممکن است عطف داشته باشد.

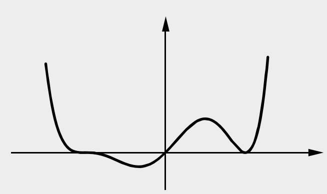
ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج: نمودار بر محور طول‌ها مماس است و اکسترمم نسبی دارد.

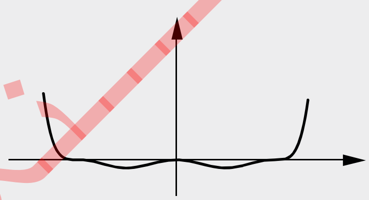
ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی فرد: نمودار از محور طول‌ها عبور می‌کند، بر آن مماس است و عطف دارد.

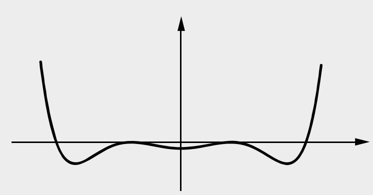
۶- نمودار تابع حداکثر n بار محور طول‌ها را قطع می‌کند، زیرا تابع حداکثر دارای n ریشه است.

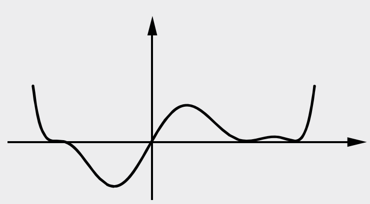
۷- بین هر دو ریشه‌ی تابع، نمودار حداقل دارای یک اکسترمم نسبی است. همچنین با توجه به این‌که مشتق تابع از درجه‌ی $n-1$ است، پس نمودار تابع حداکثر دارای $n-1$ اکسترمم نسبی است. به همین ترتیب نمودار تابع حداکثر دارای $n-2$ نقطه‌ی عطف است.

تست ۱: نمودار تابع $f(x)=x(x-1)^2(x+1)^3$ کدام است؟

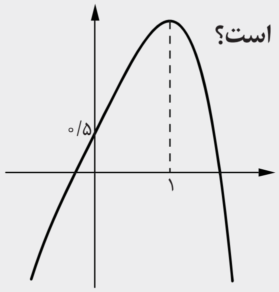
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: $x=0$ ریشه‌ی ساده‌ی تابع است، پس تابع در این نقطه اکسترمم ندارد. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند. تابع دارای سه ریشه است، پس گزینه‌ی (۴) که دارای چهار ریشه است، نادرست است. دقت کنید که $x=1$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی دو تابع است و تابع در این نقطه اکسترمم دارد و $x=-1$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد تابع است و تابع در این نقطه دارای عطف است.
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.



تست ۲: نمودار تابع $f(x)=ax^4+bx^3+2x+c$ **به شکل مقابل است. مقدار ماکسیمم نسبی تابع کدام است؟**

۱) $\frac{3}{2}$ **۲)** ۲

۳) $\frac{5}{2}$ **۴)** ۳

پاسخ: نمودار محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۰/۵ قطع کرده است. پس داریم: $c=\frac{1}{2}$ مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2$$

و مشتق دوم آن به صورت زیر است:

$$f''(x)=12ax^2+6bx=6x(2ax+b)$$

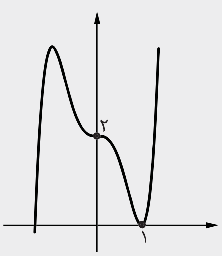
نمودار نقطه‌ی عطف ندارد، پس مشــتق دوم باید ریشــه‌ی مضاعف داشــته باشد. چون $x=0$ ریشــه‌ی مشتق دوم است. پس باید $b=0$ باشد تا $x=0$ ریشه‌ی مضاعف مشتق دوم گردد.

از طرفی تابع در $x=1$ اکسترمم نسبی دارد. پس داریم:

$$f'(1)=0 \Rightarrow 4a+2=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+2x+\frac{1}{2}$ است و داریم: $f(1)=2$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.



تست ۳: نمودار تابع $f(x)=3x^5+ax^3+bx^2+cx+d$ **به شکل مقابل است. مقدار** $a+b+c+d$ **کدام است ؟**

۱) صفر **۲)** ۳

۳) ۳- **۴)** ۸

پاسخ: نمودار محور عرض‌ها را در $y=2$ قطع می‌کند. پس داریم: $d=2$

مشتقات اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=15x^4+3ax^2+2bx+c \quad , \quad f''(x)=60x^3+6ax+2b$$

تابع در $x=0$ عطف دارد، پس داریم:

$$f''(0)=0 \Rightarrow 0+0+2b=0 \Rightarrow b=0$$

تابع در $x=1$ اکسترمم نسبی دارد و در این نقطه دارای مقدار صفر است، پس داریم:

$$f'(1)=0 \Rightarrow 15+3a+c=0 \quad , \quad f(1)=0 \Rightarrow 3+a+c+2=0$$

از حل دستگاه $\begin{cases} 3a+c=-15 \\ a+c=-5 \end{cases}$ به‌دست می‌آوریم $a=-5$ و $c=0$. در نتیجه داریم:

$$a+b+c+b=-5+0+0+2=-3$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

نمودار توابع گویا

ابتدا به مسأله‌ی زیر توجه کنید که در آن نمودار دو تابع گویا را رسم می‌کنیم:

مسأله‌ی (۴): نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ب) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$

راه‌حل: الف) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}-\{1\}$ است. تابع دارای مجانب افقی $y=1$ و مجانب قائم $x=1$ است.

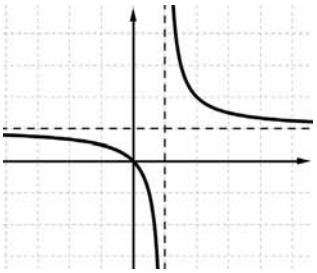
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty$$

مشتق اول و دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

پس تابع دارای اکسترمم نسبی و عطف نیست و جدول تغییرات آن به شکل زیر است.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1



دقت کنید که مبدأ مختصات محل برخورد نمودار با محورهاست.

ب) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ است. تابع دارای مجانب افقی $y=1$ و مجانب‌های قائم $x=0$ و $x=-2$ است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\ ,\ \lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=-\infty\ ,\ \lim_{x\to-2^-}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=+\infty$$

نمودار تابع محور عرض‌ها را قطع نمی‌کند، زیرا $x=0$ در دامنه‌ی تابع نیست. محل برخورد با محور طول‌ها را می‌یابیم:

$$y=0\Rightarrow\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=0\Rightarrow(x+1)^2=0\Rightarrow x=-1$$

برای ساده شدن مشتق‌گیری، ضابطه‌ی تابع را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

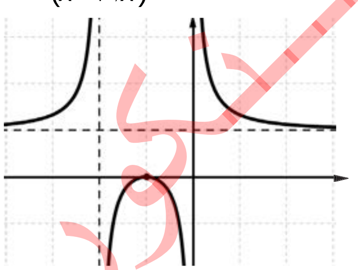
$$y=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x}=1+\frac{1}{x^2+2x}$$

حال مشتق اول تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2}=0\Rightarrow x=-1$$

جدول تغییرات تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1



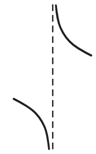
تذکر: دقت کنید که گاهی اوقات به دلیل طولانی شدن یا سخت بودن محاسبه‌ی مشتق دوم و تعیین علامت آن، می‌توانیم از محاسبه‌ی مشتق دوم صرف نظر کنیم. در این صورت نمودار تقریبی تابع به‌دست خواهد آمد. در این حالت سعی می‌کنیم از نقاط اکسترمم و مجانب‌ها برای رسم تقریبی کمک بگیریم.

تذکر: در رسم نمودار توابع گویا به صورت $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ که در آن g و h چندجمله‌ای هستند، به موارد زیر توجه می‌کنیم:

۱- دامنه‌ی این توابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی به‌جز ریشه‌های مخرج است. $D=\mathbb{R}-\{x|h(x)=0\}$

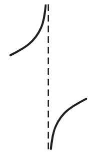
۲- در صورتی که مخرج ریشه نداشته باشد، نمودار این توابع پیوسته است و مجانب قائم ندارد. در غیر این صورت می‌تواند سوراخ باشد و یا مجانب داشته باشد.

۳- اگر ضابطه‌ی تابع را ساده کرده باشیم، نمودار تابع در ریشه‌های مخرج دارای مجانب قائم است. همچنین وضعیت نمودار در اطراف مجانب‌های قائم تابع به یکی از حالات زیر است:



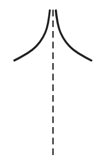
$x=a$ ریشه‌ی ساده یا مکرر از مرتبه‌ی فرد مخرج است.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$



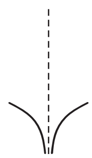
$x=a$ ریشه‌ی ساده یا مکرر از مرتبه‌ی فرد مخرج است.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$



$x=a$ ریشه‌ی مکرر از مرتبه‌ی زوج مخرج است.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$



$x=a$ ریشه‌ی مکرر از مرتبه‌ی زوج مخرج است.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

۴- اگر درجه‌ی صورت کوچک‌تر یا مساوی درجه‌ی مخرج باشد، نمودار دارای مجانب افقی است و اگر درجه‌ی صورت یک واحد بیش از درجه‌ی مخرج باشد، نمودار دارای مجانب مایل است. برای تشخیص این‌که نمودار بالا یا پایین خط مجانب افقی یا مایل قرار دارد، می‌توانیم تفاضل ضابطه‌ی تابع و خط مجانب را محاسبه کرده و علامت آن در بی‌نهایت را تعیین کنیم. همچنین برای مشخص کردن نقاط تلاقی مجانب‌های افقی یا مایل با نمودار تابع، می‌توانیم ضابطه‌ی تابع را با معادله‌ی مجانب مساوی قرار داده و معادله‌ی به دست آمده را حل کنیم.

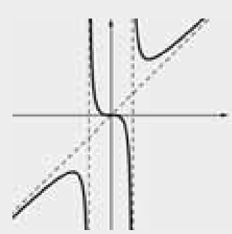
۵- این توابع در دامنه‌ی خود، مشتق‌پذیر هستند.

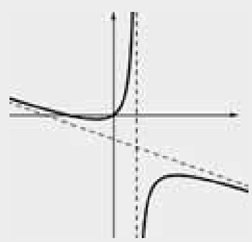
۶- نمودار تابع در اطراف ریشه‌های صورت که ریشه‌ی مخرج نیستند، مانند آن‌چه در مورد توابع چندجمله‌ای گفتیم، است.

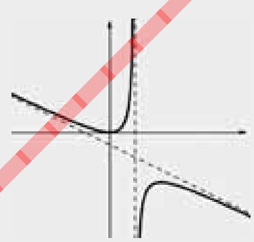
تعداد نقاط اکسترمم نسبی بسیار مهم است و در ضمن مختصات نقاط اکسترمم نسبی، در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

برای یافتن عرض اکسترمم‌های نسبی می‌توانیم از شرط داشتن ریشه‌ی مضاعف در معادله‌ی $f(x)=m$ استفاده کنیم. مقادیری که برای m به دست می‌آیند، عرض اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

تست ٤: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-4}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

٤) 

پاسخ: راه‌حل اول: تابع دارای یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=2$ است. پس گزینه‌ی (۱) نادرست است، زیرا دارای دو مجانب قائم است. همچنین $x=0$ تنها ریشه‌ی تابع است. پس گزینه‌ی (۲) نیز نادرست است، زیرا در آن نمودار دو بار محور طول‌ها را قطع کرده است.

از طرفی طبق ضابطه‌ی تابع در $x=2$ داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{2x-4}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{2x-4}=+\infty$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) نیز نادرست است.

راه‌حل دوم: از بررسی رفتار تابع در اطراف $x=0$ نیز می‌توان گزینه‌ی درست را مشخص کرد:

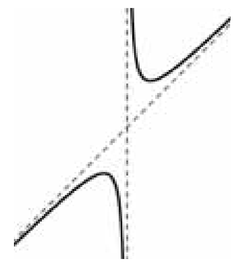
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2x-4}=0^-=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2x-4}=0^-=0 \quad , \quad f(0)=0$$

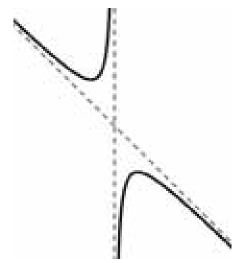
یعنی $x=0$ طول ماکسیمم نسبی تابع است.

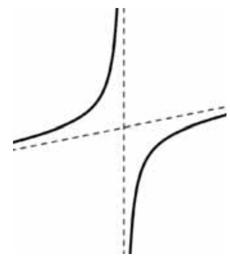
بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

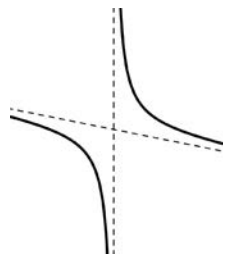
نکته: **نمودار توابع گویای درجه‌ی دوم به درجه‌ی اول با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax^{۲}+bx+c}{a'x+b'}$ $(a,a'\neq ۰)$ یک هذلولی است که دارای یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=\dfrac{-b'}{a'}$ و یک مجانب مایل به شیب $m=\dfrac{a}{a'}$ است. نقطه‌ی برخورد مجانب‌ها مرکز تقارن منحنی است.**

نمودار این تابع به یکی از شکل‌های زیر است:

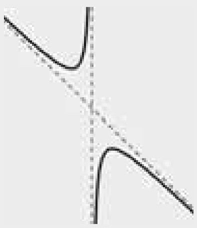

شیب مجانب مایل مثبت است.
مشتق دو ریشه دارد.


شیب مجانب مایل منفی است.
مشتق دو ریشه دارد.


شیب مجانب مایل مثبت است.
مشتق ریشه ندارد.


شیب مجانب مایل منفی است.
مشتق ریشه ندارد.

تست ۵: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{mx^{۲}+x+۶}{x+۲}$ به شکل مقابل است. حدود m کدام است؟



۱) $m<۱$
۲) $m<۰$
۳) $m<-۱$
٤) $m<-۲$

پاسخ: شیب مجانب مایل منفی است، پس داریم: $m<۰$

همچنین طبق شکل نمودار $x=-۲$ مجانب قائم است و داریم:

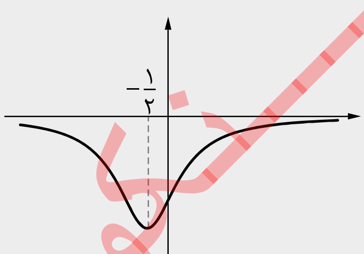
$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=-\infty$$

پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{mx^{۲}+x+۶}{x+۲}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to(-۲)^-}(mx^{۲}+x+۶)<۰\Rightarrow ۴m-۲+۶<۰\Rightarrow m<-۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ٦: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax^{۲}+bx-۲}{x^{۲}+cx+۱}$ به شکل مقابل است. مقدار c کدام است؟



۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
٤) ۲

پاسخ: چون تابع دارای مجانب افقی $y=۰$ اســت، باید درجه‌ی صورت کم‌تر از درجه‌ی مخرج باشد. پس داریم: $a=۰$ و $f(x)=\dfrac{bx-۲}{x^{۲}+cx+۱}$

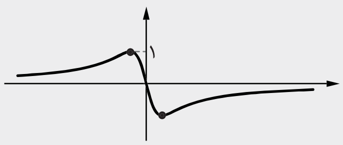
نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. پس تابع نباید ریشه داشته باشد که نتیجه می‌شود $b=۰$. (در غیر این‌صورت تابع ریشه‌ی $x=\frac{۲}{b}$ را دارد.)

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=\dfrac{-۲}{x^{۲}+cx+۱}$ اســت. برای محاســبه‌ی c توجه کنید که تابع در $x=-\frac{۱}{۲}$ می‌نیمم نسـبی دارد و باید مشتق تابع در این نقطه برابر صفر باشد:

$$f'(x)=\frac{۲(۲x+c)}{(x^{۲}+cx+۱)^{۲}} \quad , \quad f'(-\tfrac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow ۲(-۱+c)=۰ \Rightarrow c=۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۷: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax}{bx^2+1}$ **به شکل مقابل است. مقدار** a^2-4b **کدام است؟**



۱) صفر **۲)** -1

۳) ۱ **٤)** ۲

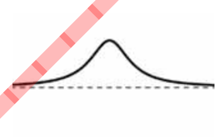
پاسخ: خط $y=1$ در نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع بر آن مماس است. یعنی معادله‌ی $\dfrac{ax}{bx^2+1}=1$ دارای ریشه‌ی مضاعف است. پس داریم:

$$bx^2+1=ax \Rightarrow bx^2-ax+1=0 \xrightarrow{\Delta=0} a^2-4b=0$$

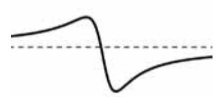
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

نکته: **در نمودار توابع گویا با ضابطه‌ی** $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ $(a'\neq 0)$ **تعداد مجانب‌های قائم می‌تواند برابر صفر، یک یا دو باشد که نقش اساسی در حالت کلی نمودار دارد. همچنین نمودار دارای یک خط مجانب افقی به معادله‌ی** $y=\dfrac{a}{a'}$ **است.**

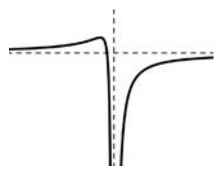
بعضی از حالت‌های نمودار این تابع به صورت شکل‌های زیر است:



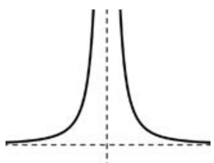
مشتق یک ریشه دارد.
مخرج ریشه ندارد.



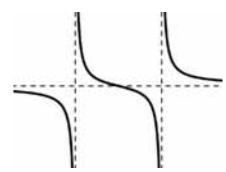
مشتق دو ریشه دارد.
مخرج ریشه ندارد.



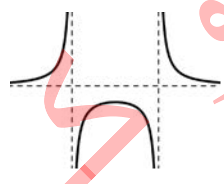
مشتق یک ریشه دارد.
مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد.



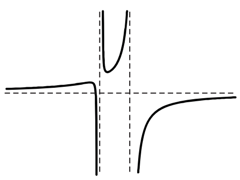
مشتق ریشه ندارد.
مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد.



مشتق ریشه ندارد.
مخرج دو ریشه دارد.

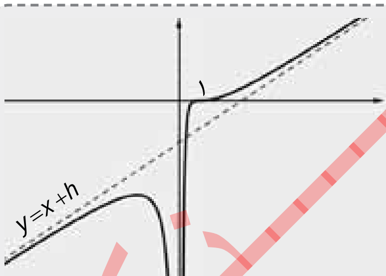


مشتق یک ریشه دارد.
مخرج دو ریشه دارد.



مشتق دو ریشه دارد.
مخرج دو ریشه دارد.

تست ۸: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+ax-1}{bx^2+c}$ **به شکل مقابل است. مقدار** $a+b+c$ **کدام است؟**



۱) -2 **۲)** -1

۳) ۱ **٤)** ۴

پاسخ: تابع در $x=1$ بر محور طول‌ها مماس است و دارای نقطه‌ی عطف است. پس $x=1$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد تابع است. یعنی صورت کسر باید به صورت $(x-1)^3$ باشد. پس داریم:

$$x^3-3x^2+ax-1=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow a=3$$

همچنین شیب مجانب مایل نمودار برابر یک است. پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{bx^3+cx}=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{bx^3}=1 \Rightarrow b=1$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2+c}$ است و از آن‌جا که $x=0$ مجانب قائم تابع می‌باشد، پس $x=0$ ریشه‌ی مخرج است و داریم: $c=0$

در نتیجه $a+b+c=3+1+0=4$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نمودار توابع رادیکالی

به مسأله‌ی زیر توجه کنید که در آن نمودار دو تابع رادیکالی را رسم می‌کنیم:

مسأله‌ی (۵): نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ **ب)** $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$

راه‌حل: الف) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است و نمودار تابع فاقد مجانب است. محل برخورد با محورها به صورت زیر است:

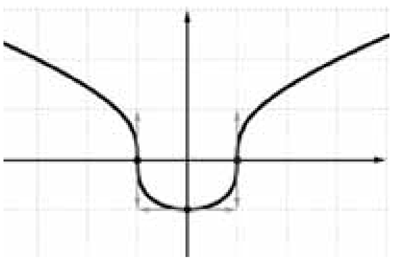
$$x=0 \Rightarrow y=-1 \quad , \quad y=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x(x^2-1)^{\frac{-2}{3}}=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید محاسبه‌ی مشتق دوم پیچیده است پس از محاسبه‌ی آن صرف‌نظر می‌کنیم. جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$
			عطف قائم		min		عطف قائم		



دقت کنید که تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست و در این نقاط عطف قائم دارد. به پیوستگی تابع در این نقاط و نامتناهی بودن مشتق اول توجه کنید. همچنین در $+\infty$ و $-\infty$ داریم $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^2-1}=+\infty$. در ضمن تابع زوج است و نمودارش نسبت به محور yها تقارن دارد.

ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ را محاسبه می‌کنیم: $1-x^2\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

به دلیل محدودیت دامنه و برد، تابع مجانب ندارد. مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=x \Rightarrow 1-x^2=x^2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

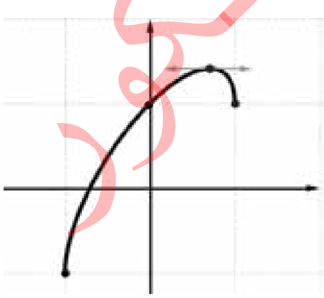
ریشه‌ی $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ غیرقابل قبول است زیرا در معادله‌ی $\sqrt{1-x^2}=x$ صدق نمی‌کند.

$$f''(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}<0$$

محل برخورد با محور yها را می‌یابیم: $x=0 \Rightarrow y=1$

بنابراین جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1
			max		



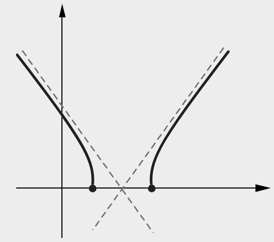
توجه کنید که نمودار یک نیم‌بیضی است.

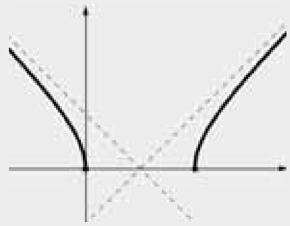
تذکر: در رسم نمودار توابع رادیکالی به موارد زیر توجه می‌کنیم:

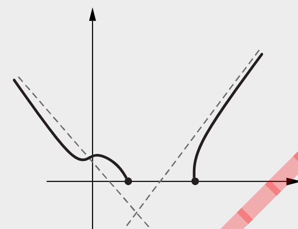
۱- محاسبه‌ی دامنه‌ی این توابع، اهمیت ویژه‌ای دارد.

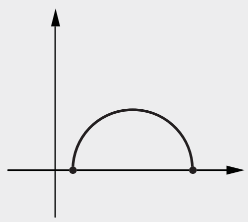
۲- رفتار تابع در ریشه‌های عبارت زیر رادیکال، مهم است، زیرا ممکن است در این نقاط تابع مشتق‌ناپذیر، دارای عطف قائم یا نقطه‌ی بازگشتی باشد.

تست ۹: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ **کدام است؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: دامنه‌ی تابع را محاسبه می‌کنیم: $x^2-3x+2\geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$ یا $x\leq 1$

بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند. برای تشخیص درستی گزینه‌ی (۱) یا (۳) دو راه‌حل وجود دارد:

راه‌حل اول: محل تلاقی مجانب‌های مایل تابع را به‌دست می‌آوریم.

خطوط $y=x-\frac{3}{2}$ و $y=-x+\frac{3}{2}$ که هم‌ارزهای تابع در $+\infty$ و $-\infty$ هستند، خطوط مجانب مایل تابع هستند. محل تلاقی این خطوط نقطه‌ی $(\frac{3}{2},0)$ است. زیرا:

$$x-\frac{3}{2}=-x+\frac{3}{2} \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=0$$

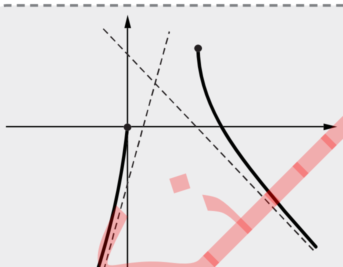
راه‌حل دوم: بررسی می‌کنیم که آیا خط مجانب مایل تابع در $-\infty$ با نمودار تابع تلاقی دارد یا خیر:

$$\begin{cases} y=-x+\frac{3}{2} \\ y=\sqrt{x^2-3x+2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=-x+\frac{3}{2} \Rightarrow 4(x^2-3x+2)=(-2x+3)^2 \Rightarrow 4x^2-12x+8=4x^2-12x+9 \Rightarrow 8=9 \;!!!$$

چون خط مجانب و نمودار تابع یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند پس گزینه‌ی (۳) نادرست است.

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۱۰: نمودار کدام تابع شبیه شکل مقابل است؟



۱) $f(x)=x+\sqrt{x^2-x}$

۲) $f(x)=x+2\sqrt{x^2-x}$

۳) $f(x)=x-\sqrt{x^2-x}$

۴) $f(x)=x-2\sqrt{x^2-x}$

پاسخ: نمودار در یک نقطه با طول مثبت محور طول‌ها را قطع کرده است، پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. زیرا به ازای $x>0$ در این دو گزینه داریم $f(x)>0$ و نمودار آن‌ها محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

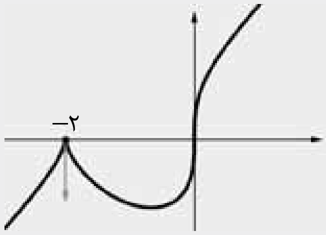
تابع گزینه‌ی (۳) نیز فقط در $x=0$ با محور طول‌ها برخورد می‌کند:

$$x-\sqrt{x^2-x}=0 \Rightarrow x=\sqrt{x^2-x} \Rightarrow x^2=x^2-x \Rightarrow x=0$$

اما در گزینه‌ی (۴) تابع در $x=0$ و $x=\frac{4}{3}$ محور طول‌ها را قطع می‌کند که در نمودار داده شده نیز چنین است:

$$x-2\sqrt{x^2-x}=0 \Rightarrow x=2\sqrt{x^2-x} \Rightarrow x^2=4x^2-4x \Rightarrow x=0\,,\, x=\frac{4}{3}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.



تست ۱۱: نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+ax^۲+bx+c}$ **به شکل مقابل است. مقدار** $a+b+c$ **کدام است؟**

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۹
۴) صفر

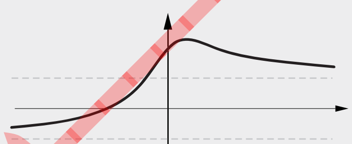
پاسخ: نمودار از نقطه‌ی $(۰,۰)$ عبور کرده است. پس داریم: $c=۰$

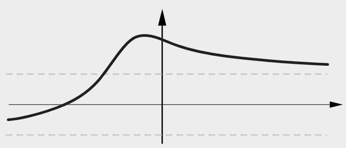
همچنین نمودار در $x=۰$ دارای عطف قائم و در $x=-۲$ دارای نقطه‌ی بازگشتی است. پس $x=۰$ ریشه‌ی ساده و $x=-۲$ ریشه‌ی مضاعف عبارت زیر رادیکال است:

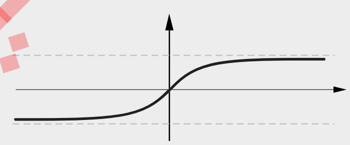
$$x^۳+ax^۲+bx=x(x+۲)^۲ \Rightarrow x^۳+ax^۲+bx=x^۳+۴x^۲+۴x \Rightarrow a=۴\ ,\ b=۴ \Rightarrow a+b+c=۸$$

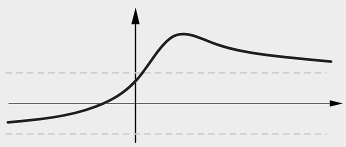
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۱۲: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$ **کدام است؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: مجانب‌های افقی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-۱\quad ,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=۱$$

بنابراین خطوط $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی تابع هستند. محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها نقطه‌ی $(۰,۲)$ است. بنابراین گزینه‌ی (۳) و (۴) نادرست است. زیرا در این گزینه‌ها، نمودار در نقطه‌ای که پایین‌تر از خط $y=۱$ قرار دارد، محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

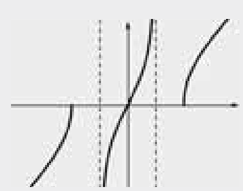
همچنین مشتق اول تابع در $x=\frac{۱}{۲}$ صفر است:

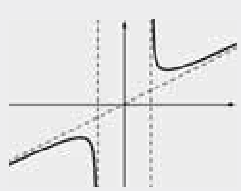
$$f'(x)=\frac{۱-۲x}{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+۱}}=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

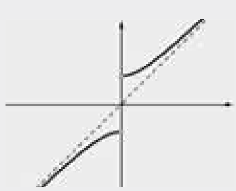
پس طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع، برابر $\frac{۱}{۲}$ است ولی در گزینه‌ی (۲) طول اکسترمم نسبی، منفی است.

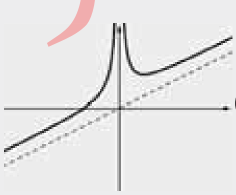
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۱۳: نمودار تابع $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x^۲+a}{x^۲+b}}$ **کدام‌یک <u>نمی‌تواند</u> باشد؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: تابع فرد و نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. نمودار گزینه‌ی(۴) نسبت به مبدأ مختصات متقارن نیست.

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نمودار توابع مثلثاتی

به مسأله‌ی زیر توجه کنید:

مسأله‌ی (۶): نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$ **را رسم کنید.**

راه‌حل: دامنه‌ی تابع از $1+\cos x\neq 0$ به‌دست می‌آید: $D_f=\mathbb{R}-\{x|x=2k\pi+\pi\,,k\in\mathbb{Z}\}$

تابع متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ است. پس کافی است نمودار آن را در یک دوره تناوب، مثلاً $(-\pi,\pi)$ رسم کنیم.

خطوط $x=\pi$ و $x=-\pi$ مجانب‌های نمودار هستند و داریم:

$$\lim_{x\to(-\pi)^+}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}=+\infty\quad,\quad\lim_{x\to\pi^-}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}=+\infty$$

مشتق اول تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-\cos x(1+\cos x)+\sin x(1-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}=0$$

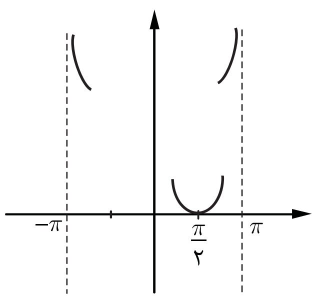
$$\Rightarrow\sin x-\cos x=1\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

از محاسبه‌ی مشتق دوم به دلیل پیچیدگی صرف‌نظر می‌کنیم و به طور تقریبی نمودار را رسم می‌کنیم. برای این منظور محل برخورد نمودار با محورها را به‌دست می‌آوریم.

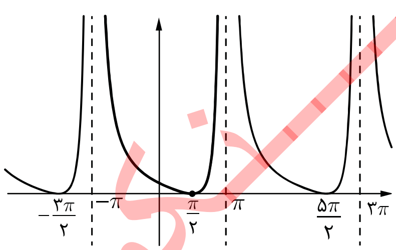
$$x=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}\quad,\quad y=0\Rightarrow 1-\sin x=0\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

جدول تغییرات تابع را تعیین با توجه به وضعیت مجانب‌ها و نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع، نمودار را به طور تقریبی به صورت زیر رسم می‌کنیم:

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$



با توجه به این‌که از محاسبه‌ی مشتق دوم صرف‌نظر کرده‌ایم، تشخیص این‌که جهت تقعر در بازه‌های $(-\pi,\frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ثابت است یا عوض می‌شود، ممکن نیست. اگر بخواهیم به‌طور تقریبی نمودار را رسم کنیم، فرض می‌کنیم جهت تقعر ثابت است و تکه‌های فوق را به هم وصل می‌کنیم که شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید. (البته می‌توانید با محاسبه‌ی مشتق دوم تحقیق کنید که نمودار دقیقاً به همین شکل است و تقعر آن همواره رو به بالا است.)



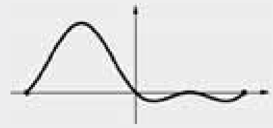
تذکر: در رسم نمودار توابع مثلثاتی به موارد زیر توجه می‌کنیم:

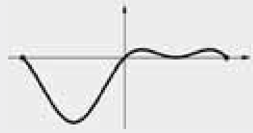
۱- محاسبه‌ی دامنه و محل برخورد نمودار با محورهای مختصات، گاهی اوقات مفید است.

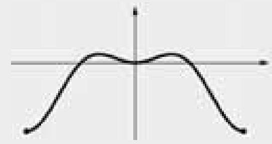
۲- اگر تابع متناوب باشد، محاسبه‌ی دوره تناوب مهم است.

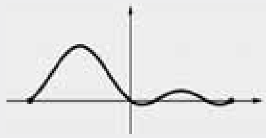
۳- اگر تابع متناوب باشد، نمودار آن فقط می‌تواند مجانب قائم داشته باشد و مجانب افقی و مایل ندارد.

تست ۱۴: نمودار تابع $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ **در یک دوره تناوب آن کدام است؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: راه‌حل اول: دوره تناوب تابع 2π است. پس نمودارها در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم شده‌اند. در بازه‌ی $[0,\pi]$ داریم:

$$0\le \sin x\le 1 \Rightarrow \sin^2 x\le \sin x \Rightarrow \sin^2 x-\sin x\le 0 \Rightarrow f(x)\le 0$$

بنابراین در بازه‌ی $[0,\pi]$ نمودار بالای محور طول‌ها قرار ندارد.

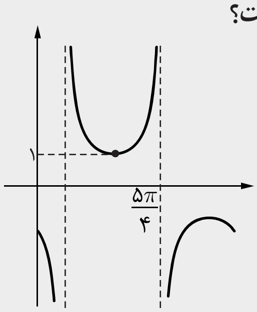
راه‌حل دوم: نقاط بحرانی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=0 \Rightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

پس تابع در نقاط $(-\frac{\pi}{2},2)$، $(\frac{\pi}{6},-\frac{1}{4})$، $(\frac{\pi}{2},0)$ و $(\frac{5\pi}{6},-\frac{1}{4})$ اکسترمم نسبی دارد که فقط در گزینه‌ی (۱) چنین است.

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۱۵: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{a}{\sin x+b\cos x}$ **در بازه‌ی** $[0,2\pi]$ **به شکل مقابل است. مقدار** ab **کدام است؟**



۱) 2

۲) -2

۳) $\sqrt{2}$

۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: خط $x=\frac{5\pi}{4}$ مجانب قائم نمودار است. پس باید ریشه‌ی مخرج باشد:

$$\sin\frac{5\pi}{4}+b\cos\frac{5\pi}{4}=0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}+b(-\frac{\sqrt{2}}{2})=0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow f(x)=\frac{a}{\sin x-\cos x}$$

نقاط اکسترمم نسبی را معین می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-a(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\,,\ \frac{7\pi}{4}$$

با توجه به نمودار داریم:

$$f(\frac{3\pi}{4})=1 \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}=1 \Rightarrow a=\sqrt{2} \Rightarrow ab=-\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نمودار توابع معکوس مثلثاتی

به مسأله‌ی زیر توجه کنید:

مسأله‌ی (۷): نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sin^{-1}(\frac{1}{x})$ **ب)** $f(x)=\tan^{-1}(\frac{1}{x^2})$

الف) دامنه‌ی تابع را محاسبه می‌کنیم: $-1\le\frac{1}{x}\le 1 \Rightarrow x\ge 1$ یا $x\le -1$

به‌دلیل کران‌دار بودن برد تابع، نمودار مجانب قائم و مایل ندارد. ولی مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sin^{-1}(\frac{1}{x})=\sin^{-1}(0)=0 \Rightarrow$$ $y=0$ مجانب افقی است.

مشتق اول تابع را محاسبه می‌کنیم:

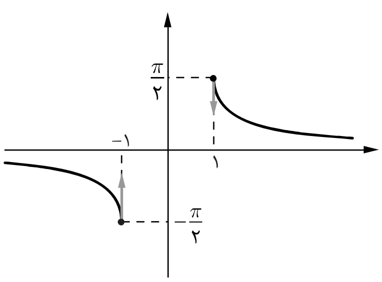
$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}<0$$

با توجه به این‌که تابع فرد است، ابتدا فرض می‌کنیم $x\ge 1$ و نمودار تابع را رسم می‌کنیم. سپس قرینه‌ی آن را نسبت به مبدأ مختصات رسم می‌کنیم.

$$x\ge 1 \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2(x^2-1)}=\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دقت کنید که در $x=1$ مشتق تابع نامتناهی است و نمودار مماس قائم دارد. جدول تغییرات تابع برای $x\ge 1$ را تعیین و با توجه به جدول، نمودار تابع را در بازه‌ی $[1,+\infty)$ رسم می‌کنیم.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	0



ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=\tan^{-1}(\frac{1}{x^2})$، مجموعه‌ی $\mathbb{R}-\{0\}$ است و تابع دارای مجانب افقی $y=0$ است: $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\tan^{-1}(0)=0$

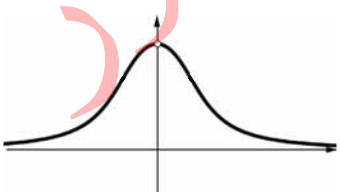
همچنین تابع در $x=0$ تعریف نشده است و مجانب قائم ندارد زیرا: $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\pi}{2}$

مشتق اول تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\tan^{-1}(\frac{1}{x^2}) \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{x^4+1}$$

بنابراین جدول تغییرات و نمودار تابع به صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗ $\frac{\pi}{2}$	‖	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0



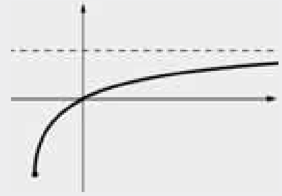
توجه کنید که تابع زوج است و نمودار آن نسبت به محور عرض‌ها متقارن است.

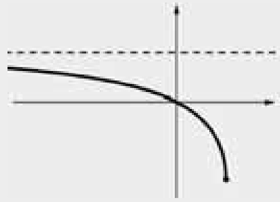
تذکر: در رسم نمودار توابع معکوس مثلثاتی به موارد زیر توجه می‌کنیم:

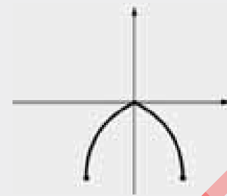
۱- محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع گاهی اوقات ضروری است.

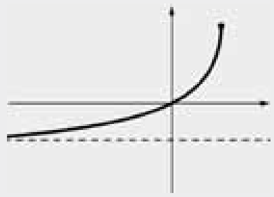
۲- مشخص کردن مجانب‌ها بسیار مهم است.

تست ١٦: نمودار تابع $f(x)=\sin^{-1}(\frac{x}{x-2})$ **کدام است؟**

۱) 

۲) 

۳) 

٤) 

پاسخ: دامنه‌ی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$-1\le\frac{x}{x-2}\le 1\Rightarrow \left|\frac{x}{x-2}\right|\le 1\Rightarrow |x|\le|x-2| \Rightarrow x^2\le x^2-4x+4 \Rightarrow x\le 1\Rightarrow D_f=(-\infty,1]$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و(۳) درست نیستند. برای تشخیص درستی یکی از گزینه‌های (۲) و (۴) می‌توانیم مجانب افقی تابع را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\sin^{-1}(\frac{x}{x-2})=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$$

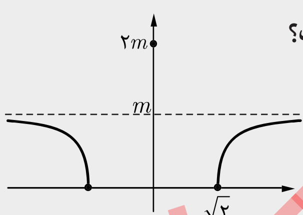
همچنین می‌توانیم از مشتق تابع استفاده کنیم و صعودی یا نزولی بودن تابع را معین کنیم:

$$f'(x)=\frac{\frac{-2}{(x-2)^2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{x-2})^2}}<0$$

بنابراین خط $y=\frac{\pi}{2}$ مجانب افقی تابع است و تابع در دامنه‌اش نزولی اکید است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ١٧: نمودار تابع $f(x)=\cos^{-1}(\frac{a}{x^2+bx+c})$ **به شکل مقابل است. مقدار** $a+b-c$ **کدام است؟**



۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۲

٤) ۲-

پاسخ: نمودار تابع نسبت به محور عرض‌ها متقارن است. پس تابع زوج است. با توجه به این‌که تابع $\cos^{-1}(x)$ تابعی نه زوج و نه فرد است، پس باید $y=x^2+bx+c$ زوج باشد. بنابراین داریم: $x^2+bx+c=x^2-bx+c \Rightarrow b=0$

مجانب افقی نمودار تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\cos^{-1}(\frac{a}{x^2+c})=\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow m=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین مقدار تابع در نقطه‌ی $x=0$ مشخص است و داریم:

$$f(0)=2m=\pi \Rightarrow \cos^{-1}(\frac{a}{c})=\pi \Rightarrow \frac{a}{c}=-1\Rightarrow a=-c$$

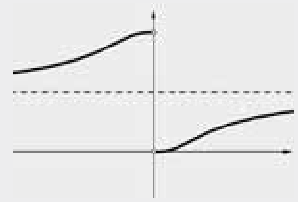
از طرفی داریم:

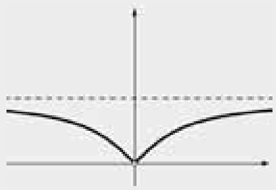
$$f(\sqrt{2})=0 \Rightarrow \cos^{-1}(\frac{a}{2+c})=0 \Rightarrow \frac{a}{2+c}=1\Rightarrow a=2+c \xrightarrow{a=-c} -c=2+c \Rightarrow c=-1 \Rightarrow a=1$$

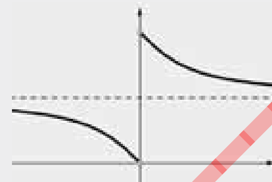
$$\Rightarrow a+b-c=1+0-(-1)=2$$

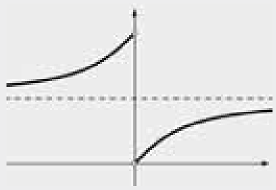
بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۱۸: نمودار تابع $f(x)=\cot^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}-\{0\}$ است. مقدار حد چپ و راست تابع در نقطه‌ی $x=0$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to 0^+}\cot^{-1}(\frac{1}{x})=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}\cot^{-1}(\frac{1}{x})=\pi$$

بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) یا (۴) درست است. مشتق تابع را معین کنیم:

$$f'(x)=-\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x)=1$$

با توجه به شیب خط مماس در نقاط سمت راست $x=0$ گزینه‌ی (۱) نیز قابل قبول نیست.
بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نمودار توابع نمایی و لگاریتمی

به مسأله‌ی زیر توجه کنید:

مسأله‌ی (۸): **نمودار توابع زیر را رسم کنید.**

الف) $f(x)=e^{(2x-x^2)}$ **ب)** $f(x)=\ln(\frac{x}{x-1})$

راه‌حل: الف) دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ است. محور طول‌ها مجانب افقی نمودار تابع است. زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{(2x-x^2)}=\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=0 \Rightarrow$$ مجانب افقی است. $y=0$

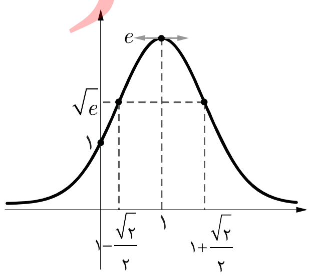
محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها نقطه‌ی $(0,1)$ است و نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. حال مشتق اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=(2-2x)e^{(2x-x^2)}=0 \Rightarrow x=1$$

$$f''(x)=-2e^{(2x-x^2)}+(2-2x)^2e^{(2x-x^2)}=(4x^2-8x+2)e^{(2x-x^2)}=0 \Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−		−	
$f''(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{e}$ عطف	↗	e max	↘	$\sqrt{e}$ عطف	↘	0



ب) دامنه‌ی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-1}>0 \Rightarrow x<0 \text{ یا } x>1$$

خطوط $x=0$ و $x=1$ مجانب‌های قائم تابع هستند و داریم:

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(\frac{x}{x-1})=\ln(0^+)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} \ln(\frac{x}{x-1})=\ln(+\infty)=+\infty$$

خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع است زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln(\frac{x}{x-1})=\lim_{x\to\pm\infty} \ln(\frac{x}{x})=\ln 1=0$$

$x=0$ در دامنه‌ی تابع نیست، پس نمودار محور عرض‌ها را قطع نمی‌کند. همچنین نمودار محور طول‌ها را نیز قطع نمی‌کند، زیرا:

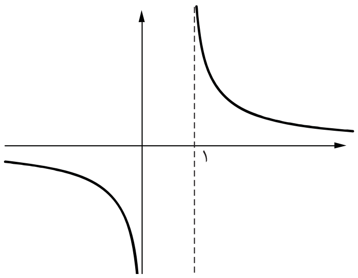
$$y=0 \Rightarrow \ln(\frac{x}{x-1})=0 \Rightarrow \frac{x}{x-1}=1 \Rightarrow x=x-1 \Rightarrow 0=-1 \text{ ¡ ¡ ù}$$

مشتق اول تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(\frac{x}{x-1})'}{\frac{x}{x-1}}=\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}=-\frac{1}{x(x-1)}<0$$

بنابراین جدول تغییرات تابع و نمودار آن به شکل زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	0



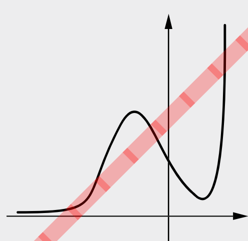
تذکر: در رسم نمودار توابع نمایی و لگاریتمی به موارد زیر توجه می‌کنیم:

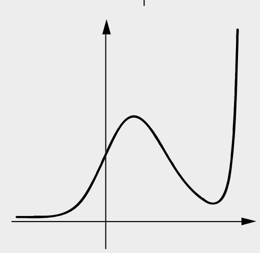
۱- محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع ضروری است.

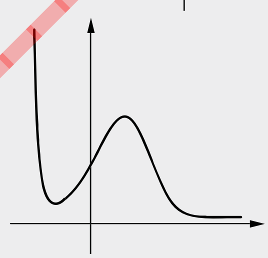
۲- مشخص کردن مجانب‌ها بسیار مهم است.

تست ۱۹: نمودار تابع $f(x)=e^{(x^3-3x)}$ **کدام است؟**

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: مقادیر تابع همواره مثبت هستند، پس گزینه‌ی(۱) نادرست است. مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=e^{(x^3-3x)} \Rightarrow f'(x)=(3x^2-3)e^{(x^3-3x)}=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

بنابراین تابع در نقاط $x=\pm 1$ دارای اکسترمم نسبی است. پس گزینه‌ی(۳) نادرست است.

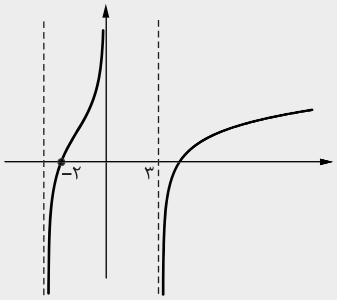
حد تابع در بی‌نهایت را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{(x^3-3x)}=e^{-\infty}=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} e^{(x^3-3x)}=e^{+\infty}=+\infty$$

پس تابع در $-\infty$ دارای مجانب افقی $y=0$ است و در $+\infty$ دارای مجانب افقی نیست.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۲۰: نمودار تابع $f(x)=\ln(\frac{x^{۲}+a}{bx})$ به شکل مقابل است. مقدار b کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) $\frac{۱۳}{۲}$
۳) ۹
٤) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: معادله‌ی مجانب‌های قائم تابع $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{-a}$ است. چون خط $x=۳$ مجانب قائم نمودار است، پس داریم:

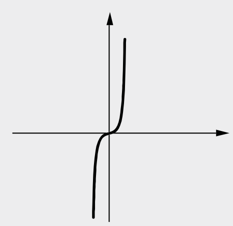
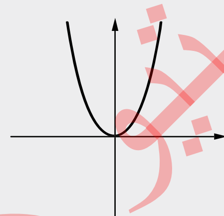
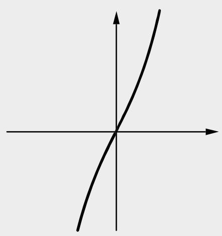
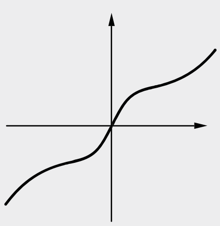
$$\sqrt{-a}=۳ \quad \Rightarrow a=-۹$$

همچنین نمودار در $x=-۲$ محور طول‌ها را قطع می‌کند، پس داریم:

$$\ln(\frac{۴-۹}{-۲b})=۰ \Rightarrow \frac{۴-۹}{-۲b}=۱ \quad \Rightarrow b=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تست ۲۱: نمودار تابع $f(x)=e^{x}-e^{-x}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
٤) 

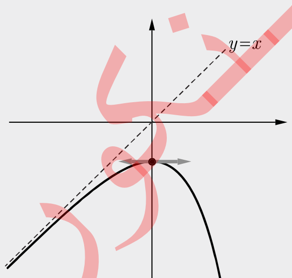
پاسخ: مشتقات اول و دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=e^{x}-e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^{x}+e^{-x} \quad \Rightarrow f''(x)=e^{x}-e^{-x}$$

مشـــتق اول تابع همواره مثبت اســـت، پس تابع صعودی اکید است. بنابراین گزینه‌ی (۲) نادرست است. همچنین جهت تقعر نمودار، فقط در $x=۰$ تغییر می‌کند. پس گزینه‌ی (۴) نادرست است. با توجه به این‌که $f'(۰)=۲$، خط مماس بر نمودار در $x=۰$ دارای شیب برابر ۲ است و گزینه‌ی (۱) نیز نمی‌تواند درست باشد.

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۲۲: نمودار تابع $f(x)=ax-e^{bx}$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
٤) صفر

پاسـخ: تابع در $-\infty$ مجانب مایل به معادله‌ی $y=x$ دارد. بنابراین b عددی مثبت اســـت و چون $\lim_{x\to-\infty} e^{bx}=۰$ بنابراین $y=ax$ مجانب مایل تابع است و داریم $a=۱$. از طرفی تابع در $x=۰$ اکسترمم نسبی دارد، پس داریم:

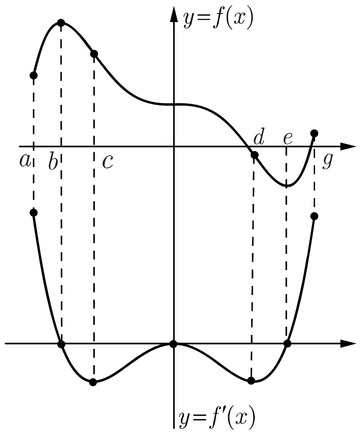
$$f'(x)=a-be^{bx} \xrightarrow[a=۱]{f'(۰)=۰} ۱-be^{۰}=۰ \Rightarrow b=۱ \Rightarrow a+b=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

رسم نمودار تابع مشتق از روی نمودار تابع

فرض کنید نمودار تابع f داده شده است. می‌خواهیم نمودار تابع f' را به‌طور تقریبی رسم کنیم. با توجه به این‌که مقدار تابع مشتق در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع است، می‌توان نمودار f' را رسم کرد.

واضح است که در هر بازه‌ای که تابع صعودی باشد، مقدار شیب خط مماس و مقدار تابع مشتق مثبت است و نمودار تابع مشتق بالای محور طول‌ها قرار می‌گیرد و در هر بازه‌ای که تابع نزولی باشد، مقدار شیب خط مماس و مقدار تابع مشتق منفی است و نمودار تابع مشتق پایین محور طول‌ها قرار می‌گیرد. همچنین در هر بازه‌ای که تقعر نمودار تابع، به سمت بالا باشد، تابع مشتق صعودی است و در هر بازه‌ای که تقعر نمودار تابع، به سمت پایین باشد، تابع مشتق نزولی است. حال به موارد زیر در مورد نمودار مقابل توجه کنید:



۱- این تابع مشتق‌پذیر است و تابع f' در تمام نقاط بازه‌ی (a,g) تعریف شده است.

۲- در بازه‌ی (a,b) تابع f صعودی است، بنابراین تابع f' مثبت است. همچنین تقعر f به سمت پایین است، پس f' نزولی است.

۳- در بازه‌های (b,c) و $(۰,d)$ تابع f نزولی با تقعر رو به پایین است. بنابراین در این بازه‌ها تابع f' منفی و نزولی است.

۴- در بازه‌های $(c,۰)$ و (d,e) تابع f نزولی با تقعر رو به بالا است. بنابراین در این بازه‌ها تابع f' منفی و صعودی است.

۵- در بازه‌ی (e,g) تابع f صعودی با تقعر رو به بالاست. بنابراین در این بازه تابع f' مثبت و صعودی است.

۶- در نقطه‌ی $x=b$ و $x=e$ تابع f دارای اکسترمم نسبی است. بنابراین با توجه به مشتق‌پذیری f، مقدار f' در این نقاط برابر صفر است و تغییر علامت می‌دهد.

۷- در نقطه‌ی $x=c$ تابع f دارای عطف مایل و $f''(c)=۰$ است. بنابراین مشتق f' در این نقطه برابر صفر است. با توجه به تقعر f در بازه‌های (b,c) و $(c,۰)$ علامت f'' یعنی مشتق تابع f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کرده است. پس $x=c$ طول می‌نیمم نسبی تابع f' است. در نقطه‌ی $x=d$ رفتار f و f' شبیه به رفتار این دو تابع در نقطه‌ی $x=c$ است.

۸- در نقطه‌ی $x=۰$ تابع f دارای عطف افقی است و داریم $f''(c)=۰$ و $f'(c)=۰$، بنابراین مقدار f' و مشتق آن در این نقطه برابر صفر است. با توجه به تقعر f، قبل و بعد از $x=۰$، علامت f'' یعنی مشتق تابع f' از مثبت به منفی تغییر کرده است. پس $x=۰$ طول ماکسیمم نسبی تابع f' است.

تذکر: برای رسم نمودار تابع مشتق از روی نمودار تابع، به موارد زیر توجه می‌کنیم:

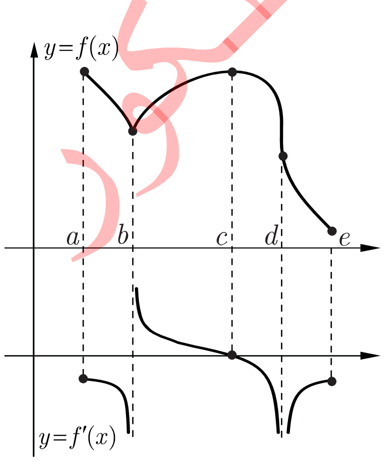
۱- در هر بازه‌ای که تابع f مشتق‌پذیر و صعودی اکید باشد، نمودار f' بالای محور طول‌ها قرار دارد و در هر بازه‌ای که تابع f مشتق‌پذیر و نزولی اکید باشد، نمودار f' پایین محور طول‌ها قرار دارد.

۲- در نقاط اکسترمم نسبی f که تابع در اطراف آن‌ها مشتق‌پذیر است، تابع f' محور طول‌ها را قطع می‌کند.

۳- در هر بازه‌ای که تابع f دو بار مشتق‌پذیر و دارای تقعر رو به بالا باشد، نمودار f' صعودی اکید است و در هر بازه‌ای که تابع f دو بار مشتق‌پذیر و دارای تقعر رو به پایین باشد، نمودار f' نزولی اکید است.

۴- در نقاط عطف تابع f که تابع در اطراف آن‌ها مشتق دوم دارد، تابع f' اکسترمم نسبی دارد.

مسأله‌ی (۹): نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع f' را به طور تقریبی رسم کنید.



راه‌حل:

۱- در بازه‌های (a,b) و (c,d) تابع f نزولی با تقعر به سمت پایین است، پس تابع f' منفی و نزولی است.

۲- در بازه‌ی (b,c) تابع f صعودی با تقعر رو به پایین است، پس تابع f' مثبت و نزولی است.

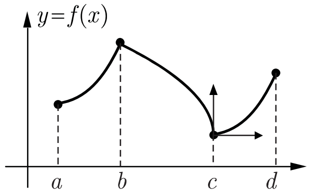
۳- در بازه‌ی (d,e) تابع f نزولی با تقعر رو به بالاست، پس تابع f' منفی و صعودی است.

۴- در نقطه‌ی $x=b$ تابع f دارای مماس قائم است، یعنی f' نامتناهی است. پس تابع f' دارای مجانب قائم است. با توجه به این‌که در این نقطه تابع f دارای نقطه‌ی بازگشتی است، پس مشتق‌های چپ و راست در این نقطه نامتناهی و مختلف‌العلامت هستند. یعنی f' دارای انفصال ساده است.

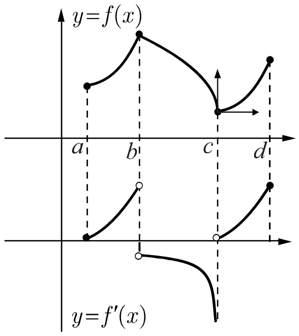
۵- در نقطه‌ی $x=d$ نیز تابع f دارای مماس قائم است و f' مجانب قائم دارد. در این نقطه مشتق‌های چپ و راست نامتناهی و هم‌علامت هستند یعنی تابع f' دارای انفصال مضاعف است.

۶- در نقطه‌ی $x=c$ تابع f دارای ماکسیمم نسبی است و تابع f' برابر صفر است. پس نمودار f' محور طول‌ها را قطع می‌کند.

مسأله‌ی (۱۰): نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع f' را به طور تقریبی رسم کنید.



راه‌حل:



۱- در بازه‌های (a,b) و (c,d) تابع f صعودی با تقعر رو به بالاست، پس f' مثبت و صعودی است.

۲- در بازه‌ی (b,c) تابع f نزولی با تقعر رو به پایین است، پس f' منفی و نزولی است.

۳- نقطه‌ی $x=b$ برای f گوشه است و مشتق چپ و راست در این نقطه موجود و نابرابرند. مشتق چپ مثبت و مشتق راست منفی است زیرا شیب مماس سمت چپ مثبت و شیب مماس سمت راست منفی است. پس f' در این نقطه تعریف نشده است و سوراخ دارد.

۴- نقطه‌ی $x=c$ نیز برای f گوشه است. در این نقطه مشتق چپ نامتناهی و منفی است و مشتق راست برابر صفر است. پس نمودار f' مجانب قائم دارد و داریم: $\lim\limits_{x\to c^-} f'(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to c^+} f'(x)=0$

در ضمن تابع f' در این نقطه تعریف نمی‌شود.

تذکر: برای رسم نمودار تابع مشتق از روی نمودار تابع، به موارد زیر نیز توجه می‌کنیم:

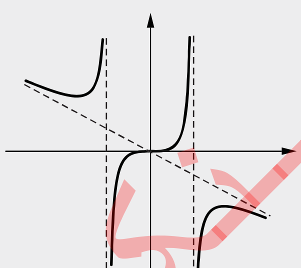
۱- در نقاط ناپیوستگی f، تابع f' تعریف نشده است. همچنین در نقاطی که مماس بر نمودار تابع f موازی محور عرض‌هاست، مانند نقاط عطف قائم و بازگشتی، تابع f' دارای مجانب قائم است و در نقاط گوشه‌ی تابع f، مقدار تابع f' ناموجود و حد چپ و راست f' در این نقطه، نابرابر هستند.

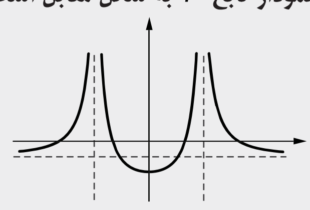
۲- در نقاطی که f مجانب قائم دارد، f' نیز مجانب قائم دارد.

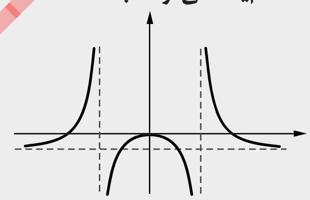
۳- اگر f مجانب افقی به معادله‌ی $y=b$ داشته باشد، f' نیز مجانب افقی به معادله‌ی $y=0$ دارد و اگر f مجانب مایل به معادله‌ی $y=mx+b$ داشته باشد، f' مجانب افقی به معادله‌ی $y=m$ دارد.

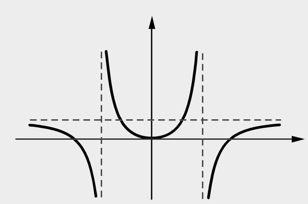
۴- اگر نمودار f نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد (f فرد باشد)، نمودار f' نسبت به محور عرض‌ها متقارن است (f' زوج است) و اگر نمودار f نسبت به محور عرض‌ها متقارن (f زوج باشد) باشد، نمودار f' نسبت به مبدأ مختصات متقارن است(f' فرد است).

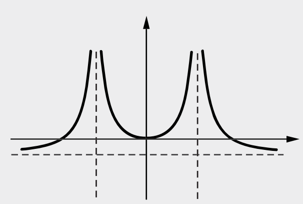
تست ۲۳: نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f' کدام‌یک می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

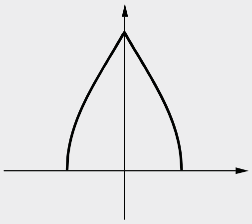
۳) 

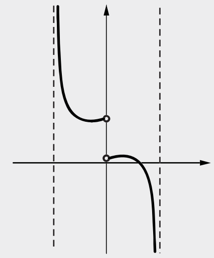
۴) 

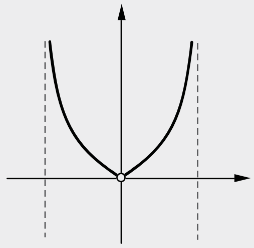
پاسخ: شیب مجانب مایل نمودار f منفی است، پس نمودار f' دارای مجانب افقی با مقدار منفی است. پس گزینه‌ی (۳) نادرست است. در فاصله‌ی بین دو مجانب قائم، تابع f صعودی است، پس f' مثبت است و گزینه‌های (۱) و (۲) نمی‌توانند درست باشند.

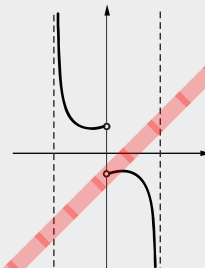
بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

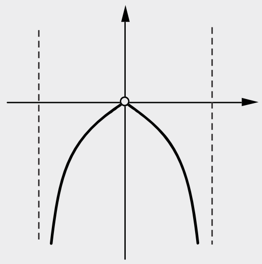
تست ۲۴: نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f' کدام‌یک می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

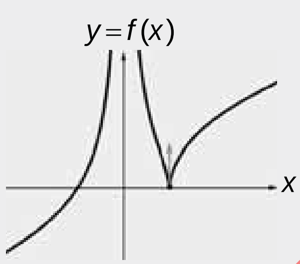
۳) 

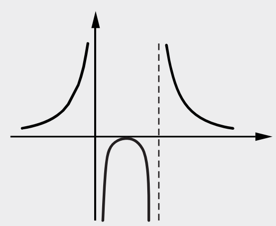
۴) 

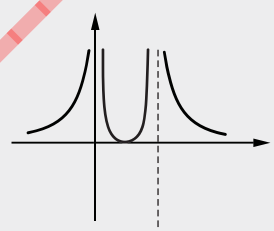
پاسخ: نمودار f در $x=0$ گوشه دارد. در این نقطه شیب مماس سمت چپ، مثبت و شیب مماس سمت راست، منفی است. پس $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ مقداری منفی و $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ مقداری مثبت است. در گزینه‌ی (۱) هر دو مقدار مثبت هستند. در گزینه‌های (۲) و (۴) هر دو مقدار مورد نظر صفر هستند. پس این گزینه‌ها نادرست هستند.

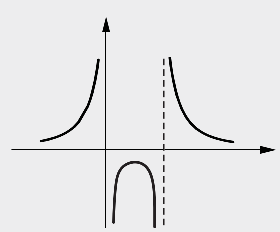
بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

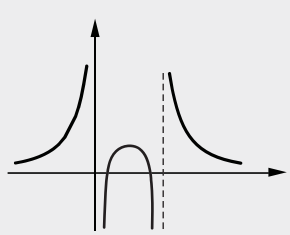
تست ۲۵: نمودار تابعی به شکل مقابل است. نمودار تابع مشتق آن به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

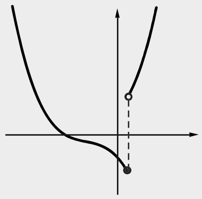
۳) 

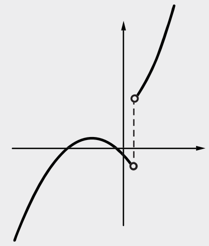
۴) 

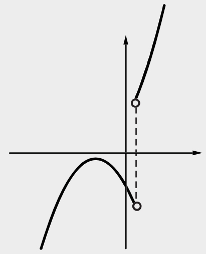
پاسخ: نمودار f از $x=0$ تا نقطه‌ی بازگشتی آن نزولی اکید است. پس نمودار f' از $x=0$ تا مجانب قائم آن باید منفی باشد. پس گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند. از طرفی در این فاصله هیچ‌جا، شیب مماس بر f صفر نمی‌گردد. پس f' در این فاصله صفر نخواهد شد و گزینه‌ی (۱) نیز نادرست است.

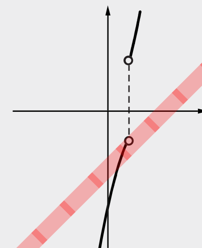
بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

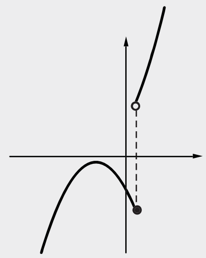
تست ۲۶: نمودار تابعی به شکل مقابل است. نمودار تابع مشتق آن به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

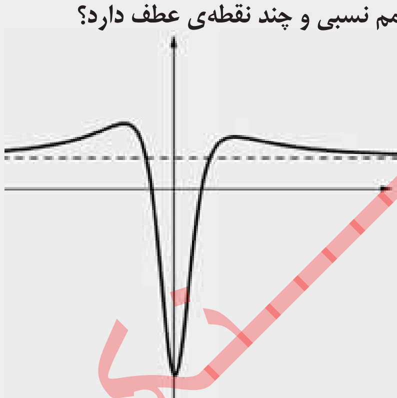
۴) 

پاسخ: در نقطه‌ای که f ناپیوسته است، f' تعریف نمی‌شود. پس گزینه‌ی (۴) نادرست است.

اگر نقطه‌ی ناپیوستگی f را $x=a$ بنامیم، نمودار f در بازه‌ی $(-\infty,a)$ نزولی است، پس f' در این بازه منفی است و گزینه‌ی (۱) نادرست است. در نقطه‌ای در بازه‌ی $(-\infty,a)$ جهت تقعر نمودار f تغییر می‌کند (از رو به بالا به رو به پایین) پس نمودار f' در این نقطه باید از حالت صعودی به حالت نزولی تغییر کند. پس گزینه‌ی (۳) نادرست است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۲۷: نمودار تابع f' به شکل مقابل است. نمودار تابع f به ترتیب چند نقطه‌ی اکسترمم نسبی و چند نقطه‌ی عطف دارد؟



۱) ۳، ۳

۲) ۳، ۲

۳) ۲، ۳

۴) ۲، ۲

پاسخ: نمودار f' دو بار محور طول‌ها را قطع می‌کند یعنی در این نقاط، مشتق برابر صفر است و تغییر علامت می‌دهد. پس f دارای دو اکسترمم نسبی است.

همچنین نمودار f' در سه نقطه از حالت صعودی به حالت نزولی (یا بالعکس) تغییر می‌کند. بنابراین تابع f در سه نقطه دارای عطف است.

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.