نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری:

نام آزمون: ریاضی تابع ۱۲م، لگاریتم، جزصحیح و قدرمطلق

تاریخ آزمون: گروه مشاوره اندیشه جوان

۱- اگر توابع f و g به عنوان ماشین به‌صورت $x \to f \to g \to 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$، مقدار $f(5)$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲- ضابطه‌ی وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; \quad x < 0 \end{cases}$، کدام است؟

① $f^{-1}(x) = x|x| ; x \in \mathbb{R}$ ② $f^{-1}(x) = -x^2 ; x < 0$ ③ $f^{-1}(x) = \pm x^2 ; x \in \mathbb{R}$ ④ $f^{-1}(x) = \pm x|x| ; x \in \mathbb{R}$

۳- نمودار تابع $y = [x^2]$، روی بازه‌ی $x \in (-2, 2)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۴ ② ۵ ③ ۶ ④ ۷

۴- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$، دامنه‌ی تابع $f(3 - x)$، کدام است؟

① $[0, 2]$ ② $[0, 3]$ ③ $[1, 2]$ ④ $[1, 3]$

۵- اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و fog، با کدام طول متقاطع‌اند؟

① -1 ② $\frac{1}{2}$ ③ ۱ ④ $\frac{3}{2}$

۶- ضابطه‌ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x - 1}$، به کدام صورت است؟

① $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 : x \leq 2$ ② $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5 : x \leq 2$

③ $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 : x \geq 1$ ④ $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5 : x \geq 1$

۷- نمودار تابع $y = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

① $-3/5$ ② -3 ③ $-2/5$ ④ -2

۸- اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$، از دو نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{4}$

۹- از تساوی $\log_x^5(x^2 + 4) = 1 + \log_x^5$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۲، کدام است؟

① -1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ ۲

۱۰- اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$، دامنه‌ی تعریف تابع $f(-x)$ کدام است؟

① $x \leq -1$ ② $x \geq -1$ ③ $x \leq 1$ ④ $x \geq 1$

۱۱- مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2 - 2x < |x - 2|$، به‌صورت کدام بازه است؟

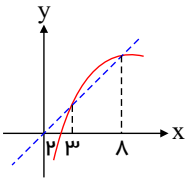
① $(-1, 1)$ ② $(-1, 2)$ ③ $(0, 2)$ ④ $(1, 2)$

۱۲- از دو معادله‌ی $2^x + 4^x = 72$ و $\log(x + 1) + \log(2y + x^2) = 2$، مقدار y کدام است؟

① ۶ ② ۷ ③ ۸ ④ ۹

@jozveh_nub

۱۳ - شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



① $(۰,۲]$ ② $[۲,۳]$
③ $[۲,۸]$ ④ $[۳,۸]$

۱۴ - اگر $f(x) = \sqrt{۳ - x}$ و $g(x) = \log_۲(x^۲ + ۲x)$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع fog، کدام است؟

① $[-۴,۲]$ ② $[-۲,۰]$ ③ $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$ ④ $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

۱۵ - تابع با ضابطه‌ی $y = x|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

① $f^{-۱}(x) = ۱ - \sqrt{۱+x}\ ;\ x < ۰$ ② $f^{-۱}(x) = ۱ - \sqrt{۱-x}\ ;\ x < ۱$
③ $f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ < x < ۱$ ④ $f^{-۱}(x) = ۱ - \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ < x < ۱$

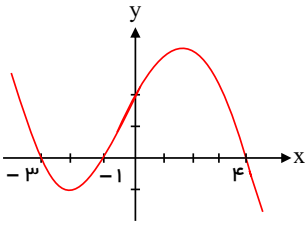
۱۶ - نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ - ۳x - ۱۰$ را، حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیر منفی باشد؟

① ۱ ② ۱٫۵ ③ ۲ ④ ۳

۱۷ - از تساوی $\log_x^{۳x+۸} = ۲ - \log_x^{x-۶}$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴، کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ ۲

۱۸ - شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-۲)$ است: دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



① $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$ ② $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$
③ $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$ ④ $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۱۹ - تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |۲x-۶| - |x+۱|$، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟

① $f^{-۱}(x) = -x + ۷; x > ۸$ ② $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}x + ۲; x > ۳$
③ $f^{-۱}(x) = x + ۷; x > -۴$ ④ $f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}x - ۱; -۴ < x < ۸$

۲۰ - اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $g(f(a)) = ۵$ باشد، عدد a کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۱ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a \cdot b^x\ ;\ b > ۰$ داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$، مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

① ۶ ② ۸ ③ ۱۲ ④ ۲۴

۲۲ - ضابطه‌ی وارون تابع $y = \frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟

① $f^{-۱}(x) = \frac{x}{۱-|x|}\ ;\ |x| < ۱$ ② $f^{-۱}(x) = \frac{۱-|x|}{|x|}\ ;\ |x| > ۱$
③ $f^{-۱}(x) = \frac{x}{|x|-۱}\ ;\ |x| > ۱$ ④ $f^{-۱}(x) = \frac{|x|-۱}{x}\ ;\ |x| < ۱$

۲۲ - برای هر عدد طبیعی $n > ۲$، حاصل $\left[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}\right] - ۲\left[\sqrt{n^۲ - ۲n}\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

@jozveh_nub

۲۴- تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

① $\frac{۱}{۹}$ و ۴ ② $\frac{۱}{۴}$ و ۹ ③ $\frac{۱}{۴}$ و ۴ ④ ۹ و ۴

۲۵- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=۲-|x|$، کدام است؟

① ۲ ② $\frac{۷}{۳}$ ③ $\frac{۸}{۳}$ ④ ۳

۲۶- از معادله‌ی لگاریتمی $\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)}-\log_{۳}^{(x+۲)}=۱$، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

① $-\frac{۲}{۳}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

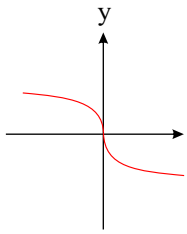
۲۷- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right|>۱$، به صورت کدام بازه است؟ (با تغییر)

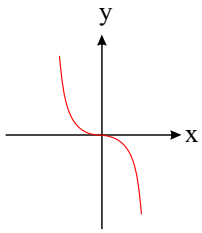
① $(۱,\frac{۳}{۲})$ ② $(۱,\frac{۳}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$ ③ $(۱,\frac{۵}{۳})$ ④ $(\frac{۵}{۳},۲)$

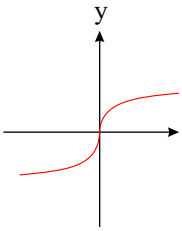
۲۸- اگر $f(x)=x^{۲}+x$ و $g(x)=\sqrt{۴x+۱}$ باشند، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع gof و خط به معادله‌ی $y=۳$ کدام است؟

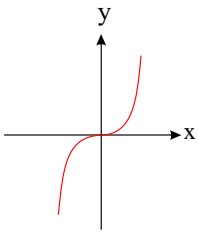
① ۳ ② ۴ ③ ۴٫۵ ④ ۶

۲۹- اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ کدام است؟

① 

② 

③ 

④ 

۳۰- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$، کدام است؟

① $\frac{۸}{۳}$ ② ۴ ③ $\frac{۱۶}{۳}$ ④ ۶

۳۱- از معادله‌ی لگاریتمی $\log(۲x-۵)-\log(x-۳)=\log(x^{۲}-x-۶)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ ۱

۳۲- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x^{۲}+۱|>۲x+۱-|x-۲|$، به صورت کدام بازه‌ها است؟

① $(-۲,۱)$ ② $(-۱,۱)$ ③ $(-۱,۲)$ ④ $(۱,۲)$

۳۳- اگر $g(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۸x^{۲}+۶x+۵$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

① $۲x^{۲}+۳x+۱$ ② $۲x^{۲}-۲x+۳$ ③ $۲x^{۲}-x+۴$ ④ $۲x^{۲}+x+۳$

۳۴- تابع با ضابطه $f(x)=|x^{۳}|$ با دامنه R، چگونه است؟

① نزولی ② صعودی ③ وارون‌ناپذیر ④ یک به یک

۳۵- اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^{۴}x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟

① $-\frac{۱}{۴}\sin^{۲}۲x$ ② $-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x$ ③ $\frac{۱}{۴}\cos^{۲}۲x$ ④ $\frac{۱}{۲}\cos^{۲}۲x$

@jozveh_nub

۳۶- ضابطه‌ی معکوس $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \quad x\neq ۰\\ ۰ & , \quad x=۰\end{cases}$ به کدام صورت است؟

① $f(x)=x\sqrt{|x|}\;;\;x\in\mathbb{R}$ ② $f^{-۱}(x)=x\sqrt{|x|}\;;\;x\in\mathbb{R}-\{۰\}$

③ $f^{-۱}(x)=x|x|\;;\;x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ ④ $f^{-۱}(x)=x|x|\;;\;x\in\mathbb{R}$

۳۷- دو تابع $\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ $f=$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}\left(g(۲a)\right)=۶$ باشد، a کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ $\frac{۵}{۲}$

۳۸- از دو معادله‌ی دو مجهولی $۴^{x+y}\times ۲^{x-۷}=۱$ و $\log y=۲\log ۳+\log x$، مقدار y کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۹- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g\left(f(x)\right)$ کدام است؟

① $x-۱$ ② $x+۱$ ③ x ④ $۲x$

۴۰- ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;\; x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ;\; x<۰\end{cases}$، کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=-x^{۲}$ ② $f^{-۱}(x)=x^{۲}$ ③ $f^{-۱}(x)=x\,|x|$ ④ $f^{-۱}(x)=-x\,|x|$

۴۱- دو تابع $\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ $f=$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۶ ④ ۷

۴۲- از دو معادله‌ی دومجهولی $۳^{۲x+y}=۹\times ۳^{x-y}$ و $\log(x+۲y)=۱+\log y$، مقدار x کدام است؟

① ۱٫۲ ② ۱٫۴ ③ ۱٫۵ ④ ۱٫۶

۴۳- اگر عبارت $\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^{۲}}-\frac{۹}{۲}}+\sqrt[۳]{۲x-x^{۲}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعه‌ی مقادیر x در کدام بازه است؟

① $[\frac{۲}{۳},۲]$ ② $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ③ $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$ ④ $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

۴۴- اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g\left(f(x)\right)$ کدام است؟

① x ② $-x$ ③ $-x-۱$ ④ $x+۱$

۴۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$، با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

① -۴ ، -۱ ② ۴ ، -۱ ③ -۴ ، ۱ ④ ۴ ، ۱

۴۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a+\log_{۲}^{(bx-۴)}$، از دو نقطه‌ی $(۲,۶)$ و $(۱۰,۱۲)$ می‌گذرد. a کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۴۷- اگر $f(x)=\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^{۲}}$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع gof، کدام است؟

① $[۰,۱)$ ② $\{۰\}$ ③ $(-۱,۱)$ ④ $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$

۴۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a+\log_{۲}^{(۳x+b)^{۲}}$، از دو نقطه‌ی $(۵,۱۱)$ و $(۲۱,۱۵)$ می‌گذرد، a کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

@jozveh_nub

۴۹- نمودارهای دو تابع $f(x)=۴^x$ و $g(x)=(\frac{۱}{۲})^{۲x}+\frac{۳}{۲}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا نقطه‌ی $(-\frac{۱}{۲},۱)$، کدام است؟

① ۱ ② $\sqrt{۲}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{۵}$

۵۰- اگر $f(x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع gof، کدام است؟

① $[۰,۱]$ ② $[-۱,۱]$ ③ R ④ $R-(-۱,۱)$

۵۱- قرینه‌ی خط به معادله‌ی $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۵۲- در بازه‌ی (a,b)، نمودار تابع $y=-x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}$، بالاتر از نمودار تابع $y=۲x+|x|$ است. طول نقطه‌ی وسط این بازه کدام است؟

① -۲ ② $-۱٫۵$ ③ -۱ ④ $-۰٫۵$

۵۳- اگر $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$، برابر کدام است؟

① $x^۲-x+۳$ ② $x^۲-۲x-۱$ ③ $x^۲-۲x+۱$ ④ $x^۲-x+۱$

۵۴- در بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ فاقد نقطه‌ی مشترک

۵۵- قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

① -۲ ② ۰٫۵ ③ ۱ ④ ۱٫۵

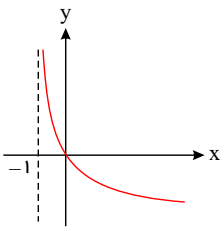
۵۶- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادله‌ی $(gof)(x)=(fog)(x)$، کدام است؟

① $-۱,-۷$ ② $۱,-۷$ ③ $-۱,۷$ ④ $۱,۷$

۵۷- اگر $\left(\frac{۱۲۵}{۸}\right)^{x^۲}=(۰٫۴)^{۲x-۱}$ باشد، $\log_۸^{(۹x+۱)}$ کدام است؟

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۵۸- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=\log_۲^{U(x)}$ است. $U(x)$ کدام است؟



① $x+۱$ ② $(x+۱)^{-۱}$
③ $x-۱$ ④ $۱-x$

۵۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

① $(-\infty,-۲)$ ② $(-\infty,۱)$ ③ $(-۲,۱)$ ④ $(۱,+\infty)$

۶۰- اگر $x\geq ۱$; $f(x)=x^۲-۲x-۳$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۱۸ ④ ۲۱

@jozveh_nub

ریاضی تابع12م، تگاریتم، جزصحیح و قدرمطلق

۶۱- نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

① $(۳,۴)$ ② $(۲,۵)$ ③ $(۳,۵)$ ④ $(۲,۶)$

۶۲- نمودار تابع $y = x^۲ - x - ۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

① $(-۵,۲)$ ② $(-۵,۳)$ ③ $(-۲,۳)$ ④ $(-۲,۵)$

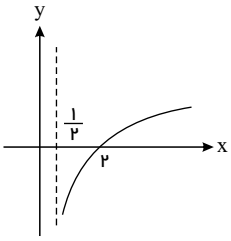
۶۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|۲x - ۱| + |x + ۲| = ۳$، کدام است؟

① $-\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ ۱ ④ $\frac{۴}{۳}$

۶۴- اگر $۸۱^{x} = ۳^{x^۲ - ۲}$ باشد، $\log_{۶}^{(x-۲)}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۴}$ ② $\frac{۱}{۳}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

۶۵- شکل زیر، نمودار تابع $y = -۱ + \log_{b}^{(۲x+a)}$ است. این منحنی خط $y = ۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟



① ۴ ② ۵
③ ۶ ④ ۷

۶۶- تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x + ۱| - |x - ۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

① $(-\infty, ۲)$ ② $(-۱, +\infty)$ ③ $(-۱, ۲)$ ④ $(۲, +\infty)$

۶۷- اگر $f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴$ و $g(x) = x^۳ + x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$، کدام است؟

① ۱٫۵ ② ۲ ③ ۲٫۵ ④ ۳

۶۸- اگر $f = \{(۱,۲), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳), (۴,۲), (۵,۶), (۳,۱)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$ کدام است؟

① $\{(۴,۲), (۵,۲)\}$ ② $\{(۴,۲), (۳,۵)\}$ ③ $\{(۵,۲), (۲,۴)\}$ ④ $\{(۳,۵), (۲,۴)\}$

۶۹- نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = -۲ + (\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$، نمودار تابع $g(x) = x^۲ - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(۳)$ کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۷۰- اگر $f = \{(۱,۲), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳), (۴,۲), (۵,۶), (۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of) - f$، کدام است؟

① $\{-۱,۴\}$ ② $\{۲,۳\}$ ③ $\{۳,۴\}$ ④ $\{۲,-۱\}$

۷۱- نمودار یک تابع به‌صورت $f(x) = ۳^{Ax+B}$، نمودار تابع $g(x) = x^۲$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

① $\frac{۱}{۲۷}$ ② $\frac{۱}{۹}$ ③ $\frac{۱}{۳}$ ④ $\sqrt{۳}$

@jozveh_nub

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

اگر توابع f و g به‌عنوان ماشین به‌صورت $x \to f \to g \to ۲x$ باشند، نتیجه می گیریم که:

$$g(f(x)) = ۲x$$

$$g(x) = ۳x + ۴ \Rightarrow g(f(x)) = ۳f(x) + ۴ \Rightarrow ۳f(x) + ۴ = ۲x \Rightarrow f(x) = \frac{۲x - ۴}{۳} \Rightarrow f(۵) = \frac{۶}{۳} = ۲$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۱

۲ ـ گزینه ۱

روش اول:

ضابطه‌ی بالا: $y = \sqrt{x}\ ,\ x \geq ۰ \Rightarrow y \geq ۰ \Rightarrow y^۲ = x \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^۲\ ,\ x \geq ۰$

ضابطه‌ی پایین: $y = -\sqrt{-x}\ ,\ x < ۰ \Rightarrow y < ۰ \Rightarrow y^۲ = -x \Rightarrow x = -y^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = -x^۲\ ,\ x < ۰$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون به‌صورت $f^{-۱}(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$ و یا به‌صورت $f^{-۱}(x) = x|x|\ ,\ x \in R$ است.

روش دوم:

یک x دلخواه در تابع قرار می‌دهیم.

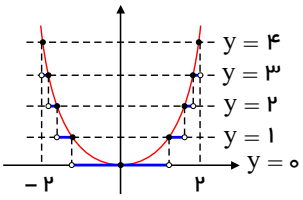
$$x = ۴ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۲ \quad \begin{vmatrix} ۴ \\ ۲ \end{vmatrix} \in f \Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ \\ ۴ \end{vmatrix} \in f^{-۱}$$

گزینه ای درست است که اگر به جای x آن ۲ قرار دهیم حاصل ۴ می شود. (گزینه‌ی اول)

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۱

۳ ـ گزینه ۴

همان‌طور که مشاهده می کنید، تابع $y = [x^۲]$ روی بازه‌ی $(-۲, ۲)$، از ۷ پاره‌خط تشکیل شده است.



متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۱

۴ ـ گزینه ۴

$$۲x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x(۲ - x) \geq ۰ \Rightarrow$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
عبارت > ۰		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$$\Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲$$

حال برای پیدا کردن دامنه‌ی $f(۳ - x)$ کافی است $۳ - x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$۰ \leq ۳ - x \leq ۲ \Rightarrow -۳ \leq -x \leq -۱ \Rightarrow ۳ \geq x \geq ۱ \Rightarrow x \in [۱, ۳]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطه‌ی $f(۳ - x)$ را به‌دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌ترمساوی صفر قرار دهید.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۲

۵ ـ گزینه ۲

$$fog(x) = f(g(x)) = (۲(x + ۲) - ۳)^۲ = (۲x + ۱)^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱$$

$$f(x) = (۲x - ۳)^۲ \Rightarrow f(x) = ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$

تلاقی: $۴x^۲ + ۴x + ۱ = ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ \Rightarrow ۱۶x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۲

۶ ـ گزینه ۱

ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = ۲ - \sqrt{x - ۱} \Rightarrow (\sqrt{x - ۱})^۲ = (۲ - y)^۲ \Rightarrow x - ۱ = ۴ - ۴y + y^۲$$

$$\Rightarrow x = y^۲ - ۴y + ۵ \quad \Rightarrow \quad f^{-۱}(x) = x^۲ - ۴x + ۵\ ,\ x \leq ۲$$

چون $\sqrt{x - ۱}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x - ۱}$ منفی بوده و $y = ۲ - \sqrt{x - ۱}$ همواره کوچک تر مساوی ۲ می شود، بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \leq ۲$ است.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۲

@jozveh_nub

ریاضی تابع12م، تکاریتم، جزصحیح و قدرمطلق

۷ - گزینه ۲ اگر نمودارتابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم معادله به‌صورت $y=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲$ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به‌صورت $y=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲+۱$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}}=|\frac{۱}{۲}x|-۲ \\ y_{\text{جدید}}=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} |\frac{۱}{۲}x|-۲=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱$$

$$\xrightarrow{\times ۲} |x|-۴=|x+۴|-۲ \Rightarrow |x|-|x+۴|=۲ \xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}} x=-۳$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۳

۸ - گزینه ۳

دو نقطه‌ی داده شده را در تابع $f(x)=ab^x-۱$ صدق می‌دهیم.

$$A\left|\begin{matrix}-\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{۱}{۲}=ab^{-\frac{۱}{۲}}-۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{۹}{۴}=\frac{a^۲}{b} \to a^۲=\frac{۹}{۴}b \to a=\frac{۳}{۲}\sqrt{b}$$

$$B\left|\begin{matrix}۱ \\ ۱۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۱=ab-۱ \Rightarrow ab=۱۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\sqrt{b}b=۱۲$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b}=۸ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow a=۳$$

پس: $f(x)=۳\times ۴^x-۱ \Rightarrow f(-۱)=۳\times ۴^{-۱}-۱=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۳

۹ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab} \ , \ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log_x^{x^۲+۴}=۱+\log_x^۵ \Rightarrow \log_x^{x^۲+۴}=\log_x^x+\log_x^۵ \Rightarrow \log_x^{x^۲+۴}=\log_x^{۵x} \Rightarrow x^۲+۴=۵x$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x=۱ \text{ غ ق ق (مبنا نمی‌تواند یک باشد)} \\ x=\frac{c}{a}=۴ \end{cases}$$

$$\log_۲^x \xrightarrow{x=۴} \log_۲^۴=\log_۲^{۲^۲}=۲$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۳

۱۰ - گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|} \Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}=\sqrt{|x-۲|-x}$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف باید زیر رادیکال را بزرگ‌ترمساوی صفر قرار دهیم یعنی: $|x-۲|-x\geq ۰$

$$\left.\begin{matrix} x\geq ۲ : x-۲-x\geq ۰ \Rightarrow -۲\geq ۰ \Rightarrow \varnothing \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \\ x<۲ : -x+۲-x\geq ۰ \Rightarrow -۲x\geq -۲ \Rightarrow x\leq ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x\leq ۱ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x\leq ۱$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۱ - گزینه ۲ روش اول :

ندرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x\geq ۲ \Rightarrow x^۲-۲x<x-۲ \Rightarrow x^۲-۳x+۲<۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)<۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱<x<۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$

$$x<۲ \Rightarrow x^۲-۲x<-x+۲ \Rightarrow x^۲-x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)<۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<x<۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۱<x<۲ \quad (II)$$

$$(I)\cup(II) : -۱<x<۲$$

روش دوم:

معادله را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x=۰ \xrightarrow{\text{نامعادله}} ۰<۲$ درست است(گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند)

$x=۱ \xrightarrow{\text{نامعادله}} -۱<۱$ درست است (گزینه‌ی ۱ حذف می‌شود)

توسط- خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۲ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab} \ , \ \log_b^N=x\to N=b^x}$

ریاضی تابع12م، تکاریتم، جزصحیح و قدرمطلق

@jozveh_nub

$$۴^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^x)^۲ + ۲^x - ۷۲ = ۰ \xrightarrow{۲^x = A} A^۲ + A - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (A+۹)(A-۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -۹ \Rightarrow ۲^x = -۹ \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۸ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

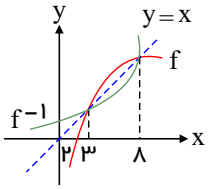
$$\log(x+۱) + \log(۲y + x^۲) = ۲ \xrightarrow{x=۳} \log ۴ + \log(۲y+۹) = ۲$$

$$\Rightarrow \log(۸y + ۳۶) = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} ۸y + ۳۶ = ۱۰^۲ \Rightarrow ۸y = ۶۴ \Rightarrow y = ۸$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۳ - گزینه ۴ برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x - f^{-۱}(x) \geq ۰ \rightarrow x \geq f^{-۱}(x)$$



نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند و باتوجه به $x \geq f^{-۱}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y = x$ بزرگ‌تر مساوی تابع $f^{-۱}$ باشد یعنی $[۳, ۸]$.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۴

۱۴ - گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f , g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f : ۳ - x \geq ۰ \rightarrow x \leq ۳$$

$$D_g : x^۲ + ۲x > ۰ \rightarrow x(x+۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -۲ \text{ یا } x > ۰$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \, , \, g(x) \in D_f\} = \{x < -۲ \text{ یا } x > ۰ \, , \, \log_{۲}^{x^۲+۲x} \leq ۳\}$$

$$= \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \, , \, x^۲ + ۲x \leq ۲^۳\} = \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \, , \, x^۲ + ۲x - ۸ \leq ۰\}$$

$$= \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \, , \, (x+۴)(x-۲) \leq ۰\} = \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \, , \quad -۴ \leq x \leq ۲\}$$

$$= ۴ \leq x < -۲ \quad \text{یا} \quad ۰ < x \leq ۲ \rightarrow [-۴, -۲) \cup (۰, ۲]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

روش دوم:

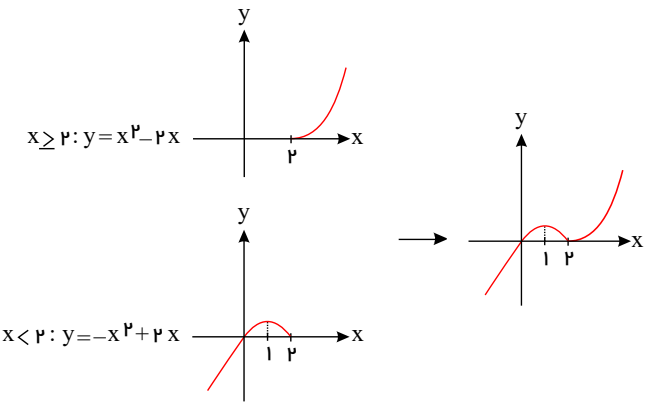
$x = -۱$: در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x = -۱$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۴

۱۵ - گزینه ۳ ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را بر می‌داریم:

$$y = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & x < ۲ \end{cases}$$

برای تشخیص نزولی بودن از تابع مشتق گرفته کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.



پس تابع در $(۱, ۲)$ نزولی است حال ضابطه‌ی معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$y = -x^۲ + ۲x \rightarrow y = -(x^۲ - ۲x) \rightarrow y = -((x-۱)^۲ - ۱) \rightarrow y = -(x-۱)^۲ + ۱$$

$$\rightarrow (x-۱)^۲ = ۱ - y \rightarrow x - ۱ = \pm\sqrt{۱-y} \xrightarrow[\text{سمت چپ مثبت است}]{۱<x<۲} x - ۱ = \sqrt{۱-y} \rightarrow x = ۱ + \sqrt{۱-y}$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y = -x^۲ + ۲x$ $(۱ < x < ۲)$ است یک عدد دلخواه مثلاً $x = \frac{۳}{۲}$ در تابع قرار می‌دهیم.

ریاضی تابع12م، تگاریتم، جزصحیح و قدرمطلق

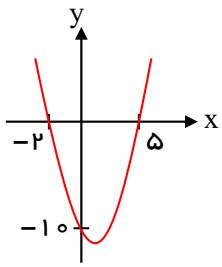
@jozveh_nub

$x=\frac{۳}{۲}\to y=\frac{۳}{۴}\to \begin{vmatrix}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۴}\end{vmatrix}\in f\to \begin{vmatrix}\frac{۳}{۴}\\ \frac{۳}{۲}\end{vmatrix}\in f^{-۱}\to$ فقط در گزینه‌ی سوم صدق می‌کند.

سخت- سراسری- ۱۳۹۴

۱۶ - گزینه ۳ کافی است تابع درجه‌ی دوم را رسم کنیم در این تابع چون ضریب $x^۲$ مثبت است تابع دارای Min است حال محل برخورد تابع با محورهای مختصات را به‌دست می‌آوریم.

$$y=۰\to x^۲-۳x-۱۰=۰\to (x-۵)(x+۲)=۰\to x=-۲, x=۵$$
$$x=۰\to y=-۱۰$$



واضح است اگر نمودار تابع f را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور xها غیر منفی می‌باشد.

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۳

۱۷ - گزینه ۳

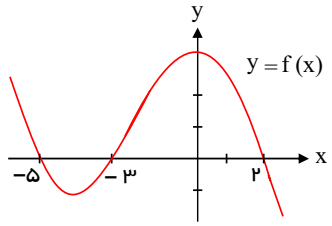
می‌دانیم: $\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_{k^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_k^a\ ,\ \log_b^N=x\to N=b^x$

$$\log_x^{۳x+۸}=۲-\log_x^{x-۶}\to \log_x^{۳x+۸}+\log_x^{x-۶}=۲$$
$$\to \log_x^{(۳x+۸)(x-۶)}=۲\xrightarrow{\text{تعریف}}(۳x+۸)(x-۶)=x^۲$$
$$\to ۳x^۲-۱۸x+۸x-۴۸=x^۲\to ۲x^۲-۱۰x-۴۸=۰$$
$$\to x^۲-۵x-۲۴=۰\to (x-۸)(x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۸ & \text{ق ق}\\ x=-۳ & \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)}\end{cases}$$
$$\log_۴^x\xrightarrow{x=۸}\log_۴^۸=\log_{۲^۲}^{۲^۳}=\frac{۳}{۲}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۳

۱۸ - گزینه ۴

اگر نمودار $f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.



برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف $\sqrt{xf(x)}$ باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$xf(x)\geq ۰\to xy\geq ۰\xrightarrow{x,y\ \text{باید هم علامت باشند}}[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۴

۱۹ - گزینه ۳

در ابتدا باید تکلیف قدرمطلق‌ها را معلوم کنیم. پس از تابع مشتق گرفته و بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$۲x-۶$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$	

$x<-۱: y=-۲x+۶-(-x-۱)\to y=-x+۷\to y'=-۱<۰\to$ نزولی

$-۱\leq x\leq ۳: y=-۲x+۶-(x+۱)\to y=-۳x+۵\to y'=-۳<۰\to$ نزولی

$x>۳: y=۲x-۶-(x+۱)\to y=x-۷\to y'=۱>۰\to$ صعودی

پس باید ضابطه‌ی معکوس تابع $y=x-۷$ را به ازای $x>۳$ به‌دست آوریم.

$$y=x-۷\to x=y+۷\to f^{-۱}(x)=x+۷\ ,\ x>-۴$$

توجه کنید: $y=x-۷\xrightarrow{x>۳}y>-۴$

دقت کنید $y>-۴$ برد تابع f است که در حقیقت دامنه‌ی تابع معکوس است.

سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۴

۲۰ - گزینه ۴ برای آن‌که $g(f(a))=۵$ باشد، باید مقدار $f(a)$ یعنی ورودی تابع g برابر با ۶ باشد، چون $g(۶)=۵$ است. برای این منظور ضابطه‌ی تابع f را برابر ۶ قرار می‌دهیم. داریم.

$$f(a)=۶\Rightarrow a+\sqrt{a}=۶\xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}}a=۴$$

آسان- سراسری- ۱۳۹۱

۲۱ - گزینه ۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ab^x\ ,\ f(۰)=\frac{۳}{۲}$ و $f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$ است، پس داریم:

@jozveh_nub

$$f(۰)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ab^{۰}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow \frac{۳}{۲}b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow \frac{۱}{b^{۲}}=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow b^{۲}=۱۶\xrightarrow{b>۰} b=۴$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و b، ضابطه‌ی تابع f را نوشته و سپس $f(\frac{۳}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{۳}{۲}\ ,\ b=۴\ \Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}\times ۴^{x}\ \Rightarrow\ f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\times ۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۴^{۳}}=\frac{۳}{۲}\times ۸=۱۲$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۱

۲۲ - گزینه ۱ روش اول:

$$\begin{cases} x\geq ۰\ ;\ y=\dfrac{x}{۱+x}\Rightarrow y+xy=x\Rightarrow x=\dfrac{y}{۱-y}\xrightarrow{x\geq ۰}\dfrac{y}{۱-y}\geq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\leq y<۱ \quad (۱)\\ x\leq ۰\ ;\ y=\dfrac{x}{۱-x}\Rightarrow y-xy=x\Rightarrow x=\dfrac{y}{۱+y}\xrightarrow{x\leq ۰}\dfrac{y}{۱+y}\leq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<y\leq ۰ \quad (۲)\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x=\begin{cases}\frac{y}{۱-y}\ ;\ ۰\leq y<۱\\ \frac{y}{۱+y}\ ;\ -۱<y\leq ۰\end{cases}\Rightarrow x=\frac{y}{۱-|y|}\ ,\ |y|<۱\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱-|x|}\ ;\ |x|<۱$$

روش دوم:

می‌توانید نقطه‌ی دلخواهی از تابع را در نظر گرفته و جای x و y را عوض کرده و کنترل کنیم که این مختصات در کدام ضابطه صدق می‌کند. به عنوان مثال، نقطه‌ی $(۲,\frac{۲}{۳})$ متعلق به تابع است. پس نقطه‌ی $(\frac{۲}{۳},۲)$ متعلق به ضابطه‌ی تابع وارون می‌باشد. با کمی دقت پی می‌بریم که این مختصات تنها در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۱

۲۳ - گزینه ۳ روش اول:

$$\underbrace{۴n^{۲}-۴n+۱}_{(۲n-۱)^{۲}}<۴n^{۲}-۳n+۱<\underbrace{۴n^{۲}}_{(۲n)^{۲}}\rightarrow ۲n-۱<\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}<۲n\Rightarrow\left[\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}\right]=۲n-۱$$

$$\underbrace{n^{۲}-۴n+۴}_{(n-۲)^{۲}}<n^{۲}-۲n<\underbrace{n^{۲}-۲n+۱}_{(n-۱)^{۲}}\rightarrow n-۲<\sqrt{n^{۲}-۲n}<n-۱\Rightarrow\left[\sqrt{n^{۲}-۲n}\right]=n-۲$$

$$\left[\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}\right]-۲\left[\sqrt{n^{۲}-۲n}\right]=(۲n-۱)-۲(n-۲)=۳$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مثلاً $n=۳$ را قرار دهیم.

$$n=۳\rightarrow\left[\sqrt{۳۶-۹+۱}\right]-۲\left[\sqrt{۹-۶}\right]=\underbrace{[\sqrt{۲۸}]}_{۵/\cdots}-۲\underbrace{[\sqrt{۳}]}_{۱/\cdots}=۵-۲(۱)=۳$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۱

۲۴ - گزینه ۲ ابتدا تابع $fog(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=x-\sqrt{x}\rightarrow fog(x)=f(g(x))=f(x-\sqrt{x})$$

برای محاسبه ریشه‌های معادله $f(x-\sqrt{x})=۰$ ابتدا باید ببینیم که تابع $f(x)$ چند بار محور xها را قطع می‌کند همانطور که می‌دانیم:

$$f(۶)=۰\Rightarrow x-\sqrt{x}=۶\Rightarrow x-۶=\sqrt{x}\rightarrow x^{۲}-۱۲x+۳۶=x$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰\ \begin{matrix}x=۴\ \text{غ ق ق}\\ x=۹\end{matrix}$$

$$f(-\tfrac{۱}{۴})=۰\Rightarrow x-\sqrt{x}=-\tfrac{۱}{۴}\Rightarrow x-\sqrt{x}+\tfrac{۱}{۴}=۰$$

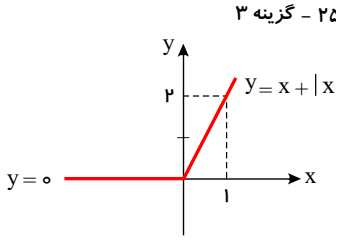
$$\Rightarrow(\sqrt{x}-\tfrac{۱}{۲})^{۲}=۰\Rightarrow\sqrt{x}=\tfrac{۱}{۲}\qquad x=\tfrac{۱}{۴}$$

پس تابع fog دو بار محور xها را قطع می‌کند.

توسط- خارج از کشور- ۱۳۹۴

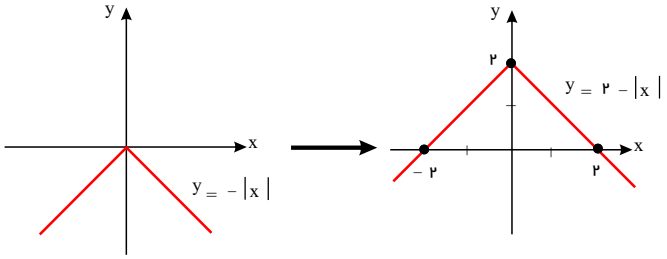
۲۵ - گزینه ۳

$$y=x+|x|\rightarrow\begin{cases}x\geq ۰\rightarrow y=x+x\rightarrow y=۲x, & A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. B\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.\\ x<۰\rightarrow y=x-x\rightarrow y=۰\end{cases}$$



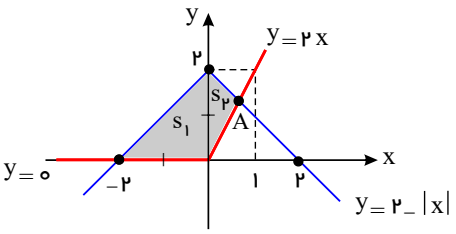
@jozveh_nub

$y = ۲ - |x| \rightarrow$



حال، کافی است این دو شکل را با هم رسم کنیم. برای پیدا کردن طول نقطه A، کافی است که خط $y = ۲x$ و $y = ۲ - x$ را با هم تلاقی دهیم.

$$۲x = ۲ - x \rightarrow ۳x = ۲ \rightarrow x_A = \frac{۲}{۳}$$



$$S_۱ = \frac{۲ \times ۲}{۲} = ۲ \ , \ S_۲ = \frac{\frac{۲}{۳} \times ۲}{۲} = \frac{۲}{۳} \rightarrow S_{کل} = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۵

۲۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$\log_۳^{۲x^۲+۱} - \log_۳^{x+۲} = ۱ \rightarrow \log_۳^{\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}} = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۳^۱$$

$$\rightarrow ۲x^۲ + ۱ = ۳x + ۶ \rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۵ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی $\log_۸^{۲x-۱}$ فقط به جای x، می‌توانیم مقدار $x = \frac{۵}{۲}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x = -۱$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_۸^{۲x-۱} \overset{x=\frac{۵}{۲}}{=\!=\!=} \log_۸^{۲(\frac{۵}{۲})-۱} = \log_۸^۴ = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۵

۲۷ - گزینه ۲ می‌دانیم که $\left|\frac{f}{g}\right| = \frac{|f|}{|g|}$ است.

$$\frac{|۲ - x|}{|۲x - ۳|} > ۱ \rightarrow |۲ - x| > |۲x - ۳| \xrightarrow{\text{توان۲}} ۴ + x^۲ - ۴x > ۴x^۲ + ۹ - ۱۲x$$

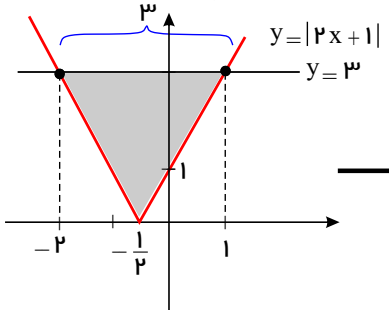
$$\rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱ < x < \frac{۵}{۳}$$

ولی دقت کنید که $x = \frac{۳}{۲}$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت $(۱, \frac{۳}{۲}) \cup (\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳})$ در می‌آید.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۵

۲۸ - گزینه ۳

$$gof(x) = g\left(f(x)\right) = \sqrt{۴(x^۲ + x) + ۱} = \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} = \sqrt{(۲x + ۱)^۲} = |۲x + ۱|$$



$$S = \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴٫۵$$

دقت کنید که نقاطی به طولهای $x = ۱$ و $x = -۲$ از تلاقی تابع $y = |۲x + ۱|$ با خط $y = ۳$ بدست آمده‌اند.

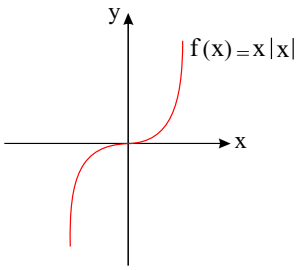
@jozveh_nub

$$|۲x+۱|=۳ \rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۳ \rightarrow ۲x=۲ \rightarrow x=۱ \\ ۲x+۱=-۳ \rightarrow ۲x=-۴ \rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

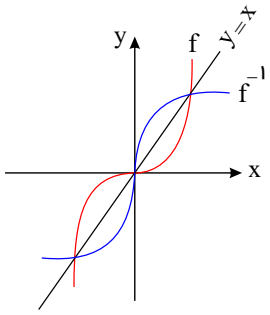
متوسط- سراسری- ۱۳۹۵

۲۹ - گزینه ۳

$$f(x)=x|x| = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases} \rightarrow$$



برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، رسم کنیم.

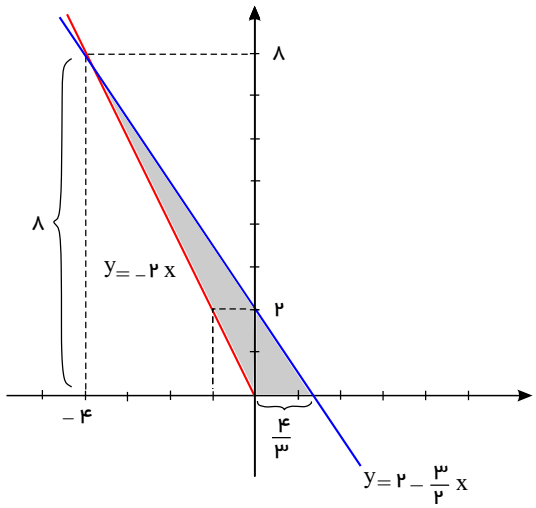


متوسط- سراسری- ۱۳۹۵

۳۰ - گزینه ۳

$$y=|x|-x = \begin{cases} x-x & x \geq ۰ \\ -x-x & x<۰ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & x \geq ۰ \\ -۲x & x<۰ \end{cases}$$

خط افقی $y=۰$ را به شرط $x \geq ۰$ و خط $y=-۲x$ با شرط $x<۰$ رسم می‌کنیم. برای رسم خط $y=-۲x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{vmatrix} -۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ را روی آن در نظر می‌گیریم و برای رسم خط $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} \frac{۴}{۳} \\ ۰ \end{vmatrix}$ را روی آن در نظر می‌گیریم.



$$\Rightarrow S=\frac{۸ \times \frac{۴}{۳}}{۲}=\frac{۱۶}{۳}$$

دقت کنید برای پیدا کردن محل برخورد دو خط به معادلات $y=-۲x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$، آنها را تلاقی می‌دهیم.

$$۲-\frac{۳}{۲}x=-۲x \xrightarrow{\times ۲} ۴-۳x=-۴x \rightarrow x=-۴$$

x بدست آمده را در معادلات یکی از دو خط، قرار دهیم، عرض نقطه‌ی تلاقی ۸ می‌شود.

سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۵

۳۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \quad , \quad \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a$

@jozveh_nub

$$\log(x^۲ - x - ۶) - \log(x - ۳) = \log(۲x - ۵) \to \log \frac{x^۲ - x - ۶}{x - ۳} = \log(۲x - ۵)$$
$$\to \frac{(x - ۳)(x + ۲)}{(x - ۳)} = ۲x - ۵ \to x + ۲ = ۲x - ۵ \to x = ۷$$
$$\log_{۴}^{\sqrt[۳]{x+۱}} = \log_{۴}^{\sqrt[۳]{۸}} = \log_{۲^۲}^{۲} = \frac{۱}{۲}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۵

۳۲ - گزینه ۴

روش اول:

$$۲x + ۱ - |x - ۲| > |\underbrace{x^۲ + ۱}_{+}| \to ۲x + ۱ - |x - ۲| > x^۲ + ۱$$
$$x \geq ۲ : ۲x + ۱ - (x - ۲) > x^۲ + ۱ \to ۲x + ۱ - x + ۲ > x^۲ + ۱ \to x^۲ - x - ۲ < ۰ \to (x - ۲)(x + ۱) < ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \ (I)$$
$$x < ۲ : \ ۲x + ۱ - (-x + ۲) > x^۲ + ۱ \to ۲x + ۱ + x - ۲ > x^۲ + ۱ \to x^۲ - ۳x + ۲ < ۰ \to (x - ۱)(x - ۲) < ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۱ < x < ۲ \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $۱ < x < ۲$ یا $x \in (۱, ۲)$ می‌رسیم.

روش دوم:

در نامعادله‌ی داده شده به جای x، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x = ۰ \to ۰ + ۱ - ۲ > ۱ \to -۱ > ۱$$

به نتیجه‌ی غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۱و۲و۳ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینه‌ی چهارم، جواب صحیح است.

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۵

۳۳ - گزینه ۳ روش اول:

$$fog(x) = ۸x^۲ + ۶x + ۵ \to f\left(g(x)\right) = ۸x^۲ + ۶x + ۵ \to f(۲x + ۱) = ۸x^۲ + ۶x + ۵$$

برای پیدا کردن $f(x)$ باید $۲x + ۱$ را مساوی t قرار دهیم.

$$۲x + ۱ = t \to ۲x = t - ۱ \to x = \frac{t - ۱}{۲}$$
$$\text{پس}: f(t) = ۸(\frac{t - ۱}{۲})^۲ + ۶(\frac{t - ۱}{۲}) + ۵ \to f(t) = ۸(\frac{t^۲ + ۱ - ۲t}{۴}) + ۳(t - ۱) + ۵$$
$$\to f(t) = ۲t^۲ + ۲ - ۴t + ۳t - ۳ + ۵ \to f(t) = ۲t^۲ - t + ۴$$
$$\to f(x) = ۲x^۲ - x + ۴$$

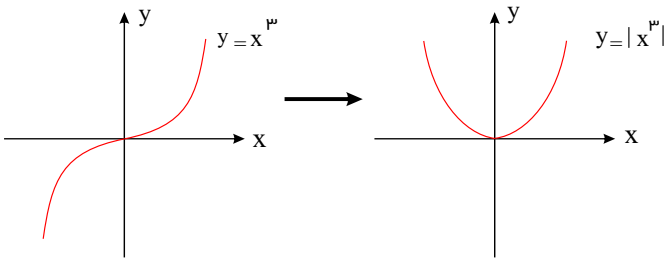
روش دوم: $f(۲x + ۱) = ۸x^۲ + ۶x + ۵$ است. به جای x یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می‌دهیم:

$$x = ۰ \to f(۱) = ۵$$

گزینه‌ای درست است که اگر در آن $x = ۱$ را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه‌ی سوم است.

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۵

۳۴ - گزینه ۳



این تابع، غیر یک به یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است.

سان- خارج از کشور- ۱۳۹۵

۳۵ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{۱ - \sin^۲ a = \cos^۲ a \ , \ \sin a \cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a}$

$$fog(x) = f\left(g(x)\right) = f(\sin^۴ x) = \sin^۴ x - \sqrt{\sin^۴ x} = \sin^۴ x - \sin^۲ x$$
$$= \sin^۲ x(\sin^۲ x - ۱) = -\sin^۲ x(۱ - \sin^۲ x) = -\sin^۲ x \cdot \cos^۲ x$$
$$= -(\sin x \cdot \cos x)^۲ = -(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲ = -\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

توسط- خارج از کشور- ۱۳۹۲

۳۶ - گزینه ۴

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \ x \neq ۰ \\ ۰ & , \ x = ۰ \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -\sqrt{-x} & x < ۰ \end{cases}$$

@jozveh_nub

$y=\sqrt{x} \to x=y^{۲} \to f^{-۱}(x)=x^{۲}\ ,\ \underbrace{x>۰}_{\text{برد } y_۱=\sqrt{x}}$

$y=-\sqrt{-x} \to -x=y^{۲} \to x=-y^{۲} \to f^{-۱}(x)=-x^{۲}\ ,\ \underbrace{x<۰}_{\text{برد } y_۲=-\sqrt{-x}}$

$$\to f^{-۱}(x)=\begin{cases} x^{۲} & , \quad x>۰ \\ ۰ & , \quad x=۰ \\ -x^{۲} & , \quad x<۰ \end{cases} \to f^{-۱}(x)=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۲

۳۷ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$f^{-۱}\left(g(۲a)\right)=۶ \to f(۶)=g(۲a) \to ۳=\frac{۲a}{۲a-۱} \to ۶a-۳=۲a \to ۴a=۳ \to a=\frac{۳}{۴}$$

آسان- سراسری- ۱۳۹۶

۳۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

$$۲^{x-۷}\times ۴^{x+y}=۱ \to ۲^{x-۷}\times (۲^{۲})^{x+y}=۱ \to ۲^{x-۷+۲x+۲y}=۱ \to ۲^{۳x+۲y-۷}=۱ \to ۳x+۲y-۷=۰$$

$$\log y=۲\log ۳+\log x \to \log y=\log ۹+\log x \to \log y=\log ۹x \to y=۹x$$

$$\text{پس: } \begin{cases} ۳x+۲y=۷ \\ y=۹x \end{cases} \to ۳x+۱۸x=۷ \to ۲۱x=۷ \to x=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=۹(\frac{۱}{۳})=۳$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۶

۳۹ - گزینه ۴

$$g\left(f(x)\right)=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-(\frac{۲x-۱}{x+۱})}=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

آسان- سراسری- ۱۳۹۶

۴۰ - گزینه ۳ روش اول: برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، کافی است x را برحسب y بدست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$\begin{matrix} y=\sqrt{x}\ ,\ x\geq ۰ \to y^{۲}=x \to f^{-۱}(x)=x^{۲}\ ,\ x\geq ۰ \\ y=-\sqrt{-x}\ ,\ x<۰ \to y^{۲}=-x \to x=-y^{۲} \to f^{-۱}(x)=-x^{۲}\ ,\ x<۰ \end{matrix} \to f^{-۱}(x)=x\,|x|$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم و می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$x=۴ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۲ \to A\begin{vmatrix} ۴ \\ ۲ \end{vmatrix} \in f \to A'\begin{vmatrix} ۲ \\ ۴ \end{vmatrix} \in f^{-۱}$ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند.

$x=-۴ \xrightarrow{\text{تابع}} y=-۲ \to B\begin{vmatrix} -۴ \\ -۲ \end{vmatrix} \in f \to B'\begin{vmatrix} -۲ \\ -۴ \end{vmatrix} \in f^{-۱}$ گزینه‌ی دوم حذف می‌شود.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۶

۴۱ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$g^{-۱}of^{-۱}(a)=۸ \to g^{-۱}(f^{-۱}(a))=۸ \to f^{-۱}(a)=g(۸) \to f^{-۱}(a)=\sqrt{۵(۸)+۹}=\sqrt{۴۹}=۷$$

$$\to f^{-۱}(a)=۷ \to f(۷)=a \to a=۳$$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۴۲ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

$$۳^{۲x+y}=۹\times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y}=۳^{۲}\times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y}=۳^{۲+x-y}$$

$$\to ۲x+y=۲+x-y \to x+۲y=۲ \to x=۲-۲y$$

از طرفی: $\log(x+۲y)=۱+\log y \to \log(x+۲y)=\log ۱۰+\log y \to \log(x+۲y)=\log ۱۰y$

$$\to x+۲y=۱۰y \to x=۸y \xrightarrow{x=۲-۲y} ۲-۲y=۸y \to ۱۰y=۲ \to y=\frac{۲}{۱۰} \xrightarrow{x=۸y} x=\frac{۱۶}{۱۰}=۱/۶$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۴۲ - گزینه ۴ روش اول:

چون یک چندجمله‌ای در زیررادیکال با فرجه‌ی فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه‌ی فرد به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$$\frac{۲}{x^{۲}}-\frac{۹}{۲}\geq ۰ \to \frac{۴-۹x^{۲}}{۲x^{۲}}\geq ۰ \to \begin{cases} \text{صورت}=۰ \to ۹x^{۲}=۴ \to x^{۲}=\frac{۴}{۹} \to x=\pm\frac{۲}{۳} \\ \text{مخرج}=۰ \to ۲x^{۲}=۰ \to x=۰ \end{cases}$$

@jozveh_nub

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & \frac{-۲}{۳} & & ۰ & & \frac{۲}{۳} & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \geq ۰ & & - & ۰ & + & \text{ن} & + & ۰ & - & \end{array} \rightarrow x \in [\frac{-۲}{۳}, ۰) \cup (۰, \frac{۲}{۳}]$$

روش دوم:

اگر $x = ۱$ باشد زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل $x = ۱$ هستند حذف می‌شوند در ضمن $x = ۰$ مخرج را صفر می‌کند و گزینه‌ی دوم که شامل $x = ۰$ است نیز حذف می‌شود.

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۴۴ - گزینه ۳ روش اول:

$$g(f(x)) = g(\frac{۲x+۳}{۲-x}) = \frac{۱ - ۳(\frac{۲x+۳}{۲-x})}{\frac{۲x+۳}{۲-x} + ۲} = \frac{\frac{۲ - x - ۶x - ۹}{۲-x}}{\frac{۲x+۳+۴-۲x}{۲-x}} = \frac{-۷x-۷}{۷} = \frac{۷(-x-۱)}{۷} = -x - ۱$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x = ۱$ را انتخاب می‌کنیم.

$$g(f(۱)) = g(۵) = \frac{۱ - ۱۵}{۵ + ۲} = \frac{-۱۴}{۷} = -۲$$

فقط در گزینه‌ی سوم به ازای $x = -۱$ عدد -۲ به‌دست می‌آید.

آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۴۵ - گزینه ۲ ابتدا وارون تابع داده شده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می‌دهیم و می‌دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = \frac{x+۴}{x-۲} \rightarrow xy - ۲y = x + ۴ \rightarrow xy - x = ۲y + ۴ \rightarrow x(y-۱) = ۲y + ۴ \rightarrow x = \frac{۲y+۴}{y-۱}$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x+۴}{x-۱}$$

تلاقی: $f(x) = f^{-۱}(x) \rightarrow \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{۲x+۴}{x-۱} \rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۴x - ۸ = x^۲ - x + ۴x - ۴$

$$\rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۴۶ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}}$

کافی است دو نقطه‌ی داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$\begin{vmatrix} ۲ \\ ۶ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۶ = a + \log_۲^{۲b-۴} \quad , \quad \begin{vmatrix} ۱۲ \\ ۱۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۰ = a + \log_۲^{۱۲b-۴}$$

$$- \begin{cases} a + \log_۲^{۲b-۴} = ۶ \\ a + \log_۲^{۱۲b-۴} = ۱۰ \end{cases} \rightarrow \log_۲^{۱۲b-۴} - \log_۲^{۲b-۴} = ۴ \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}} = ۴ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۱۲b-۴}{۲b-۴} = ۲^۴ = ۱۶$$

$$\rightarrow ۱۲b - ۴ = ۳۲b - ۶۴ \rightarrow ۲۰b = ۶۰ \rightarrow b = ۳ \xrightarrow{a+\log_۲^{۲b-۴}=۶} a + \log_۲^۲ = ۶ \rightarrow a + ۱ = ۶ \rightarrow a = ۵$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۶

۴۷ - گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع g, f را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \rightarrow D_f = R - \{-۱, ۱\}$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^۲} \rightarrow D_g : x - x^۲ \geq ۰ \rightarrow x(۱-x) \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq x \leq ۱$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\} = \{\underbrace{x \neq ۱, x \neq -۱}_{I} \ , \ ۰ \leq \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱\}$$

$$\overbrace{\frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲}}^{+} \geq ۰ \rightarrow ۱ - x^۲ > ۰ \rightarrow x^۲ < ۱ \rightarrow -۱ < x < ۱ \quad (II)$$

$$\frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱ \rightarrow \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} - ۱ \leq ۰ \rightarrow \frac{۱ + x^۲ - ۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰ \rightarrow \frac{۲x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۰ & & ۱ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \leq ۰ & & - & \text{ت ن} & + & ۰ & + & \text{ت ن} & - & \end{array}$$

$$\rightarrow x < -۱ \quad \text{یا} \quad x > ۱ \quad \text{یا} \quad x = ۰ \quad (III)$$

@jozveh_nub

از اشتراک I و II و III به جواب $x=0$ می‌رسیم.

سخت- سراسری- ۱۳۹۶

۴۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a\ ,\ \log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}}$

کافی است دو نقطه‌ی داده شده را در تابع صدق دهیم $\left(f(x)=a+2\log_2^{3x+b}\right)$

$$\left|\begin{matrix}5\\11\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 11=a+2\log_2^{15+b}\ ,\ \left|\begin{matrix}21\\15\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 15=a+2\log_2^{63+b}$$

$$-\begin{cases}11=a+2\log_2^{15+b}\\15=a+2\log_2^{63+b}\end{cases}\rightarrow 4=2\log_2^{63+b}-2\log_2^{15+b}\rightarrow 2=\log_2^{63+b}-\log_2^{15+b}$$

$$\rightarrow \log_2^{\frac{63+b}{15+b}}=2\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{63+b}{15+b}=2^2\rightarrow 63+b=60+4b\rightarrow 3b=3\rightarrow b=1$$

$$\xrightarrow{11=a+2\log_2^{15+b}} 11=a+2\log_2^{16}\rightarrow 11=a+2\log_2^{2^4}\rightarrow 11=a+8\rightarrow a=3$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۴۹ - گزینه ۲ برای پیدا کردن محل تقاطع دو تابع، کافی است که دو تابع را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases}f(x)=4^x\\g(x)=(\frac{1}{2})^{2x}+\frac{3}{2}\end{cases}\rightarrow 4^x=(\frac{1}{2})^{2x}+\frac{3}{2}\rightarrow 4^x=\frac{1}{4^x}+\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{4^x=A} A=\frac{1}{A}+\frac{3}{2}\xrightarrow{\times 2A} 2A^2=2+3A\rightarrow 2A^2-3A-2=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}\Delta=9-4(2)(-2)=9+16=25\rightarrow\begin{cases}A=\frac{3+5}{4}=2\\A=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$A=2\rightarrow 4^x=2\rightarrow 2^{2x}=2\rightarrow 2x=1\rightarrow x=\frac{1}{2}\rightarrow y=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2\rightarrow A\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$$

$A=-\frac{1}{2}\rightarrow 4^x=-\frac{1}{2}$ امکان ندارد:

نقطه‌ی تلاقی این دو تابع $A\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$ است.

$$A\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.\ ,\ B\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\right.\ \rightarrow AB=\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2+(2-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۵۰ - گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f و g را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^2}\rightarrow D_g:\ x-x^2\geq 0\rightarrow x(1-x)\geq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\leq x\leq 1$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\in R}_{I}\ ,\ 0\leq\frac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1\}$$

$$\underbrace{\frac{1-x^2}{1+x^2}}_{+}\geq 0\rightarrow 1-x^2\geq 0\rightarrow x^2\leq 1\rightarrow -1\leq x\leq 1\ :\ II$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1\rightarrow\frac{1-x^2}{1+x^2}-1\leq 0\rightarrow\frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2}\leq 0\rightarrow\underbrace{\frac{\overbrace{-2x^2}^{\text{منفی یا صفر}}}{1+x^2}}_{+}\leq 0$$ III : همواره برقرار است

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب $-1\leq x\leq 1$ می‌رسیم. $(x\in[-1,1])$

سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۶

۵۱ - گزینه ۱ دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

@jozveh_nub

$۳y - ۲x = ۴ \to ۲x = ۳y - ۴ \to x = \frac{۳}{۲}y - ۲ \to f^{-۱}(x) = \frac{۳}{۲}x - ۲ \xrightarrow{x=۰}$ عرض از مبدأ $= -۲$

آسان- سراسری- ۱۳۹۷

۵۲ - گزینه ۳ برای این منظور باید نامعادله‌ی $|x| + ۲x > -x^۲ - \frac{۱}{۲}x + \frac{۹}{۲}$ را حل می‌کنیم.

$$x \geq ۰ \to -x^۲ - \frac{۱}{۲}x + \frac{۹}{۲} > ۲x + x \to x^۲ + \frac{۷}{۲}x - \frac{۹}{۲} < ۰$$

x	$-\infty$		$-\frac{۹}{۲}$		۱		$+\infty$
عبارت < ۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\to \frac{-۹}{۲} < x < ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۰ \leq x < ۱ \qquad (I)$$

$$x < ۰ \to -x^۲ - \frac{۱}{۲}x + \frac{۹}{۲} > ۲x - x \to x^۲ + \frac{۳}{۲}x - \frac{۹}{۲} < ۰$$

x	$-\infty$		-۳		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
عبارت < ۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\to -۳ < x < \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۳ < x < ۰ \qquad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $-۳ < x < ۱$ می‌رسیم که طول نقطه‌ی وسط بازه $= \frac{-۳ + ۱}{۲} = -۱$ است.

سخت- سراسری- ۱۳۹۷

۵۳ - گزینه ۴ روش اول:

$$۲x - ۳ = t \to ۲x = t + ۳ \to x = \frac{t + ۳}{۲}$$

$$\text{پس : } f(t) = ۴(\frac{t + ۳}{۲})^۲ - ۱۴(\frac{t + ۳}{۲}) + ۱۳ \to f(t) = (t + ۳)^۲ - ۷(t + ۳) + ۱۳$$

$$\to f(t) = t^۲ + ۹ + ۶t - ۷t - ۲۱ + ۱۳ \to f(t) = t^۲ - t + ۱ \to f(x) = x^۲ - x + ۱$$

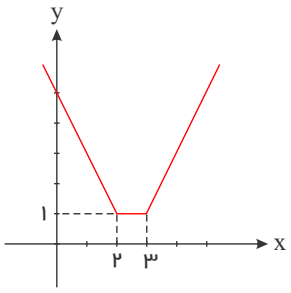
روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = ۲$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(۲x - ۳) = ۴x^۲ - ۱۴x + ۱۳ \xrightarrow{x=۲} f(۱) = ۱۶ - ۲۸ + ۱۳ \to f(۱) = ۱$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

آسان- سراسری- ۱۳۹۷

۵۴ - گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x < ۲$ اکیداً نزولی است.



$$y = |x - ۲| + |x - ۳| \xrightarrow{x<۲} y = -x + ۲ - x + ۳ \to y = -۲x + ۵$$

$$\begin{cases} f(x) = -۲x + ۵ \\ g(x) = ۲x^۲ - x - ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲ - x - ۱۰ = -۲x + ۵ \to ۲x^۲ + x - ۱۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱ + ۱۲۰ = ۱۲۱} \begin{cases} x = \frac{-۱ + ۱۱}{۴} = \frac{۵}{۲} (x < ۲ \text{ با توجه به } \text{غ ق ق}) \\ x = \frac{-۱ - ۱۱}{۴} = -۳ \quad \text{ق ق} \end{cases} \to \text{در یک نقطه مشترک هستند}$$

سخت- سراسری- ۱۳۹۷

@jozveh_nub

۵۵ - گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{واحد}]{\text{قرینه نسبت به محور }x\text{ها}} g(x)=\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به طرف }x\text{های}} h(x)=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{-x+۲}$$

$$\begin{cases} h(x)=\sqrt{-x+۲} \\ y=x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+۲}=x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+۲=x^۲ \to x^۲+x-۲=۰$$

$$\to (x+۲)(x-۱)=۰ \to \begin{cases} x=-۲ & \text{غ‌ق‌ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x=۱ & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۷

۵۶ - گزینه ۱

$$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=\dfrac{۲(x+۴)-۱}{x+۴+۲}=\dfrac{۲x+۷}{x+۶} \\ gof(x)=g(f(x))=\dfrac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\dfrac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲}=\dfrac{۶x+۷}{x+۲} \end{cases}$$

پس: $\dfrac{۲x+۷}{x+۶}=\dfrac{۶x+۷}{x+۲} \to ۶x^۲+۳۶x+۷x+۴۲=۲x^۲+۴x+۷x+۱۴$

$$\to ۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰ \to x^۲+۸x+۷=۰ \to (x+۱)(x+۷)=۰ \to \begin{cases} x=-۱ \\ x=-۷ \end{cases}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۷

۵۷ - گزینه ۱

$$(۰/۴)^{۲x-۱}=(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲} \to (\frac{۴}{۱۰})^{۲x-۱}=(\frac{۵}{۲})^{۳x^۲} \to (\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=(\frac{۲}{۵})^{-۳x^۲}$$

$$\to ۲x-۱=-۳x^۲ \to ۳x^۲+۲x-۱=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\dfrac{c}{a}=\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

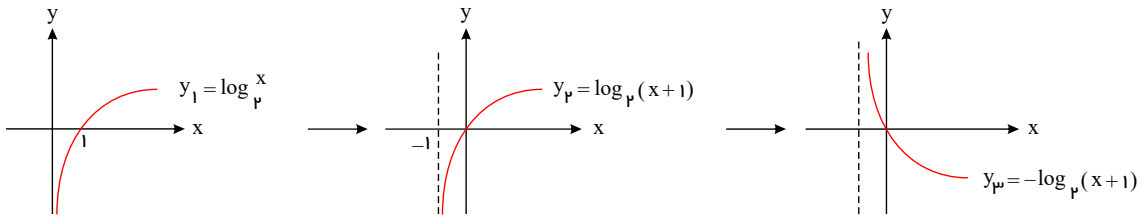
در عبارت خواسته‌شده نمی‌توانیم به‌جای x عدد -۱ را قرار دهیم چون جلوی لگاریتم منفی می‌شود و می‌دانیم که $\log_{km}^{a^n}=\dfrac{n}{m}\log_k^a$ است.

$$\log_{۸}^{۹x+۱} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} \log_{۸}^{۴}=\log_{۲^۳}^{۲^۲}=\frac{۲}{۳}$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

۵۸ - گزینه ۲ روش اول:

نمودار تابع داده‌شده $y=\log_۲^x$ است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور xها قرینه شده است.



پس: $y=-\log_{۲}^{(x+۱)} \to y=\log_{۲}^{(x+۱)^{-۱}} \to U(x)=(x+۱)^{-۱}$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنهٔ تابع داده‌شده $x>-۱$ است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی $x \to (-۱)^+$ نمودار تابع به سمت $+\infty$ می‌رود.

گزینهٔ اول: $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\log_۲(x+۱)=\log_۲ ۰^+=-\infty$: نادرست

گزینهٔ دوم: $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\log_۲\dfrac{۱}{x+۱}=\log_۲\dfrac{۱}{۰^+}=\log_۲(+\infty)=+\infty$: درست

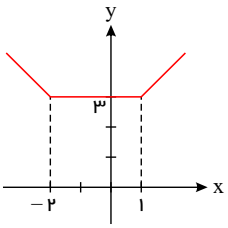
توجه کنید اگر $a>۱$ باشد $\log_a^{۰^+}=-\infty$ و $\log_a^{+\infty}=+\infty$ است.

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

۵۹ - گزینه ۱ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x=-۲$ و $x=۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.

@jozveh_nub

ریاضی تابع12م، لگاریتم، جزصحیح و قدرمطلق



$\rightarrow x < -۲$: اکیداً نزولی

آسان- سراسری- ۱۳۹۸

۶۰ - گزینه ۴ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ \rightarrow y = (x-۱)^۲ - ۱ - ۳ \rightarrow y = (x-۱)^۲ - ۴ \rightarrow (x-۱)^۲ = y + ۴$$

$$\rightarrow x - ۱ = \pm\sqrt{(y+۴)} \xrightarrow{x \geq ۱} x - ۱ = \sqrt{y+۴} \rightarrow x = ۱ + \sqrt{y+۴} \rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{x+۴}$$

$$f^{-۱}(x) = g(x) \rightarrow ۱ + \sqrt{x+۴} = \frac{x-۹}{۲} \xrightarrow{\text{مشاهدهٔ گزینه‌ها}} x = ۲۱$$

توجه کنید حل معادلهٔ آخر بدین صورت است:

$$۲\sqrt{x+۴} = x - ۱۱ \xrightarrow{\text{توان } ۲} ۴x + ۱۶ = x^۲ + ۱۲۱ - ۲۲x \rightarrow x^۲ - ۲۶x + ۱۰۵ = ۰$$

$$\rightarrow (x-۲۱)(x-۵) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۲۱ & \text{ق ق} \\ x = ۵ & \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

سخت- سراسری- ۱۳۹۸

۶۱ - گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت xهای مثبت منتقل شود باید به‌جای x عبارت $x-۳$ و برای اینکه به طرف yهای منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد -۲ اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x-۳)^۲ + ۲(x-۳) + ۵ - ۲ = -x^۲ + ۶x - ۹ + ۲x - ۶ + ۳ \Rightarrow y = -x^۲ + ۸x - ۱۲$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^۲ + ۸x - ۱۲ > x \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ < ۰ \Rightarrow (x-۳)\cdot(x-۴) < ۰ \Rightarrow ۳ < x < ۴$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

۶۲ - گزینه ۱

$$y = x^۲ - x - ۳ \xrightarrow[x \rightarrow x+۲]{\text{۲ واحد به چپ}} y = (x+۲)^۲ - (x+۲) - ۳ \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}} y = (x+۲)^۲ - (x+۲) - ۳ - ۹$$

نمودار زیر محور xها قرار دارد یعنی باید نامعادلهٔ $y < ۰$ را حل کنیم.

$$y < ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ - (x+۲) - ۱۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ - x - ۲ - ۱۲ < ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x - ۱۰ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < x < ۲ \Rightarrow x \in (-۵, ۲)$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۳ - گزینه ۲

ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها $x = -۲$ و $x = \frac{۱}{۲}$ هستند.

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۲x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۲$		$-$	۰	$+$		$+$	

$$x < -۲ \Rightarrow -۲x + ۱ - x - ۲ = ۳ \Rightarrow -۳x = ۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳} \quad \text{غ ق ق}$$

$$-۲ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲x + ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow -x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \quad \text{ق ق}$$

$$x > \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x - ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow ۳x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \quad \text{ق ق}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = ۰ + \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۴ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$y = \log_{۶}^{x-۲} \xrightarrow{\text{دامنه}} x - ۲ > ۰ \rightarrow \boxed{x > ۲}$$

@jozveh_nub

$$۳^{x^۲-۲}=۸۱^{x}\rightarrow ۳^{x^۲-۲}=۳^{۴x}\rightarrow x^۲-۲=۴x\rightarrow x^۲-۴x=۲$$

$$\rightarrow (x-۲)^۲-۴=۲\rightarrow (x-۲)^۲=۶\rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۶}\rightarrow \begin{cases} x=۲+\sqrt{۶} \\ x=۲-\sqrt{۶}<۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

می‌دانیم $\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_k^a$ است.

$$\log_{۶}^{x-۲}\overset{x=۲+\sqrt{۶}}{=\!=\!=}\log_{۶}^{۲+\sqrt{۶}-۲}=\log_{۶}^{\sqrt{۶}}=\log_{۶}^{۶^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{۲}$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۵ - گزینه ۲

دامنهٔ تعریف لگاریتم : $۲x+a>۰\rightarrow ۲x>-a\rightarrow x>-\frac{a}{۲}\xrightarrow{\text{با توجه به شکل } x>\frac{۱}{۲}} a=-۱$

بنابراین تابع به‌صورت $y=-۱+\log_b^{(۲x-۱)}$ است از طرفی مقدار تابع در $x=۲$ برابر صفر است.

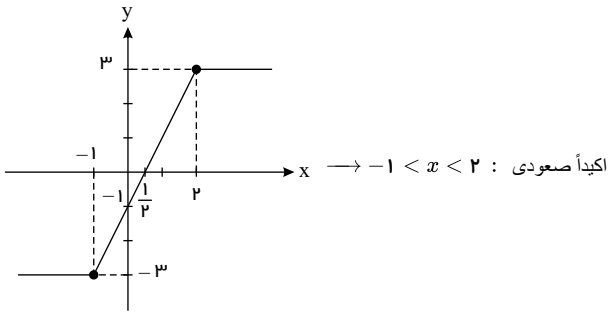
$$۰=-۱+\log_b^{۳}\rightarrow \log_b^{۳}=۱\rightarrow b=۳\rightarrow y=-۱+\log_{۳}^{(۲x-۱)}$$

اکنون کافی است که به‌جای y مقدار یک را قرار دهیم.

$$۱=-۱+\log_{۳}^{(۲x-۱)}\rightarrow \log_{۳}^{(۲x-۱)}=۲\xrightarrow{\log_b^a=c\rightarrow a=b^c}۲x-۱=۳^۲\rightarrow ۲x-۱=۹\rightarrow ۲x=۱۰\rightarrow x=۵$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۶ - گزینه ۳ تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x=-۱$ و $x=۲$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً صعودی : $\longrightarrow -۱<x<۲$

آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۷ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آنگاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$$

برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۸)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$۸=\frac{۲}{۵}x-۴\rightarrow \frac{۲}{۵}x=۱۲\rightarrow ۲x=۶۰\rightarrow x=۳۰$$

پس : $g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=g^{-۱}(۳۰)$

برای محاسبهٔ $g^{-۱}(۳۰)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$$۳۰=x^۳+x\rightarrow x=۳$$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۶۸ - گزینه ۱

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}\rightarrow f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

$$gof^{-۱}(x):\begin{cases} g(f^{-۱}(۲))=g(۱)=\varnothing \\ g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳ \\ g(f^{-۱}(۴))=g(۳)=۱ \\ g(f^{-۱}(۶))=g(۴)=۲ \end{cases}\rightarrow gof^{-۱}(x)=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$

پس: $\frac{g(x)}{gof^{-۱}(x)}=\{(۴,\frac{۲}{۱}),(۵,\frac{۶}{۳})\}=\{(۴,۲),(۵,۲)\}$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

۶۹ - گزینه ۴ چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ محل برخورد این دو تابع است؛ پس:

@jozveh_nub

$$\begin{cases} f(۱)=g(۱) \to -۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۱-۱ \to (\frac{۱}{۲})^{A+B}=۲ \to ۲^{-A-B}=۲ \to -A-B=۱ \\ f(۲)=g(۲) \to -۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۴-۲ \to (\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۴ \to ۲^{-۲A-B}=۲^{۲} \to -۲A-B=۲ \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} -A-B=۱ \\ -۲A-B=۲ \end{cases} \to A=-۱\ ,\ B=۰ \to f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}$$

$$\to f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=-۲+۲^{۳}=-۲+۸=۶$$

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

۷۰ - گزینه ۴

$$g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\} \to g^{-۱}\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$

$$g^{-۱}of(x):\begin{cases} g^{-۱}(f(۱))=g^{-۱}(۲)=۴ \\ g^{-۱}(f(۲))=g^{-۱}(۵)=\varnothing \\ g^{-۱}(f(۳))=g^{-۱}(۴)=\varnothing \\ g^{-۱}(f(۴))=g^{-۱}(۶)=۵ \end{cases} \to g^{-۱}of(x)=\{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

$$\begin{cases} g^{-۱}of(x)=\{(۱,۴),(۴,۵)\} \\ f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\} \end{cases} \to g^{-۱}of(x)=\{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\}=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

بنابراین برد تابع به‌صورت $\{-۱,۲\}$ است.

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۷۱ - گزینه ۳ چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ محل برخورد این دو تابع است؛ پس:

$$\left.\begin{cases} f(۱)=g(۱) \to ۳^{A+B}=۱=۳^{۰} \to A+B=۰ \\ f(۳)=g(۳) \to ۳^{۳A+B}=۹=۳^{۲} \to ۳A+B=۲ \end{cases}\right\} \to A=۱\ ,\ B=-۱$$

پس: $f(x)=۳^{x-۱} \to f(۰)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

@jozveh_nub

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲
۲ - ۱
۳ - ۴
۴ - ۴
۵ - ۲
۶ - ۱
۷ - ۲
۸ - ۳
۹ - ۴
۱۰ - ۳
۱۱ - ۲
۱۲ - ۳
۱۳ - ۴
۱۴ - ۴
۱۵ - ۳
۱۶ - ۳
۱۷ - ۳
۱۸ - ۴
۱۹ - ۳
۲۰ - ۴
۲۱ - ۳
۲۲ - ۱
۲۳ - ۳
۲۴ - ۲
۲۵ - ۳
۲۶ - ۴
۲۷ - ۲
۲۸ - ۳
۲۹ - ۳
۳۰ - ۳
۳۱ - ۲
۳۲ - ۴
۳۳ - ۳
۳۴ - ۳
۳۵ - ۱
۳۶ - ۴
۳۷ - ۲
۳۸ - ۳
۳۹ - ۴
۴۰ - ۳
۴۱ - ۲
۴۲ - ۴
۴۳ - ۴
۴۴ - ۳
۴۵ - ۲
۴۶ - ۳
۴۷ - ۲
۴۸ - ۳
۴۹ - ۲
۵۰ - ۲
۵۱ - ۱
۵۲ - ۳
۵۳ - ۴
۵۴ - ۱
۵۵ - ۳
۵۶ - ۱
۵۷ - ۱
۵۸ - ۲
۵۹ - ۱
۶۰ - ۴
۶۱ - ۱
۶۲ - ۱
۶۳ - ۲
۶۴ - ۳
۶۵ - ۲
۶۶ - ۳
۶۷ - ۴
۶۸ - ۱
۶۹ - ۴
۷۰ - ۴
۷۱ - ۳

@jozveh_nub