به نام خدا

Date : / /

نکات مهم ریاضی و آمار ۳ انسانی

۱ تعداد جایگشت n شئی متمایز برابر است با $n!$

۲ ترکیب : هرگاه در جایگشت ها جابه جایی مهم نباشد مانند هدیه دادن یا تعداد زیر مجموعه ها از فرمول ترکیب استفاده می کنیم

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (r \leq n)$$

۳ ترتیب : هرگاه در مسایل جابه جایی مهم باشد از فرمول ترتیب استفاده می کنیم

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۴ نکات مهم $\binom{n}{0} = 1$ و $\binom{n}{n} = 1$ و $\binom{n}{n-1} = n$

$P(n,0) = 1 \qquad P(n,n) = n!$

$0! = 1$ و $1! = 1$ و $2! = 2$ و $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4 \qquad 0! + 2! - 3! = 1 + 2 - 6 = -3$

$2! \times 3! = 2 \times 6 = 12 \qquad 2! \times 3! \neq 6!$

۵ دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه $A \cap B = \emptyset$ باشد

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$ احتمال

$P(\emptyset) = 0 \qquad P(S) = 1 \qquad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۷ A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر A و B دو مجموعه جدا از هم یا ناسازگار باشند

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

الف)

۸ تعداد حضای نمونه‌ای از پرتاب یک سکه n بار $n(S) = 2^n$

ب) تعداد حضای نمونه‌ای از پرتاب یک تاس n بار $n(S) = 6^n$

ج) تعداد حضای نمونه‌ای از پرتاب یک تاس و یک سکه $n(S) = 2 \times 6 = 12$

۹

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\acute{A}) = 1 - P(A) \quad \text{یا} \quad P(A) + P(A') = 1$$

۱۰ پیشامد A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد $A - B$

پیشامد B اتفاق بیفتد ولی A اتفاق نیفتد $B - A$

پیشامد A و B هم‌زمان اتفاق بیفتد $A \cap B$

حداقل یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق افتد $A \cup B$

۳ پیشامد A و B و C اتفاق بیفتد هم‌زمان $A \cap B \cap C$

پیشامد A یا B اتفاق بیفتد ولی C اتفاق نیفتد $(A \cup B) - C$

۱۱ در پرتاب سکه معنی حداقل یک بار شیر یعنی یک بار یا بیشتر

در پرتاب سکه معنی حداکثر یک بار شیر یعنی یک بار یا هیچ

مثلاً حداقل ۲ فرزند دختر یعنی یا ۲ دختر، ۳ دختر و ...

Bahare danesh asl

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$d<0$ دنباله کاهشی یا نزولی

$d=0$ ← دنباله ثابت

$d>0$ دنباله افزایشی

Subject :

۱۲ فرمول جمله عمومی دنباله حسابی

$$t_n = a + (n-1)d$$

شرط a, b, c دنباله حسابی

$$2b = a + c$$

اختلاف مشترک یا قدرنسبت

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n} \quad (m>n)$$

$t_1, t_2, t_3, \dots$

قدرنسبت $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$$t_n - t_m = (n-m)d$$

فرمول مجموع دنباله حسابی

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + t_n]$$

مجموع n عدد فرد ابتدا از ع طبیعی

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۱۳ دنباله هندسی

$$t_n = aq^{n-1} \quad ; \quad t_n = ar^{n-1}$$

دنباله نزولی $0<r<1$، دنباله افزایشی $r>1$

$r=1 \rightarrow$ دنباله ثابت

یا کاهشی

شرط اینکه ۳ عدد a, b, c تشکیل دنباله هندسی بدهند

$$a, b, c \longrightarrow b^2 = ac$$

فرمول مجموع دنباله هندسی

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$$S_n = \frac{a - ra_n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$$t_7 = aq^6$$

$$t_{10} = aq^9$$

$$\frac{t_m}{t_n} = \frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$$

$$\frac{t_{10}}{t_7} = \frac{q^9}{q^6} = q^3$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Date : / /

Subject :

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(ab)^m = a^m b^m$ $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ ۱۴

$(a^m)^n = a^{mn}$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $a^0 = 1$ ، $a \neq 0$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\sqrt{a^2} = |a|$ $(-3)^{\frac{1}{2}}$ = تعریف نشده در $\mathbb{R}$

یعنی عدد منفی به توان کوچک خارج از بیشه $\mathbb{R}$ بی معنی شد

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[4]{3^7} = 3^{\frac{7}{4}}$

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

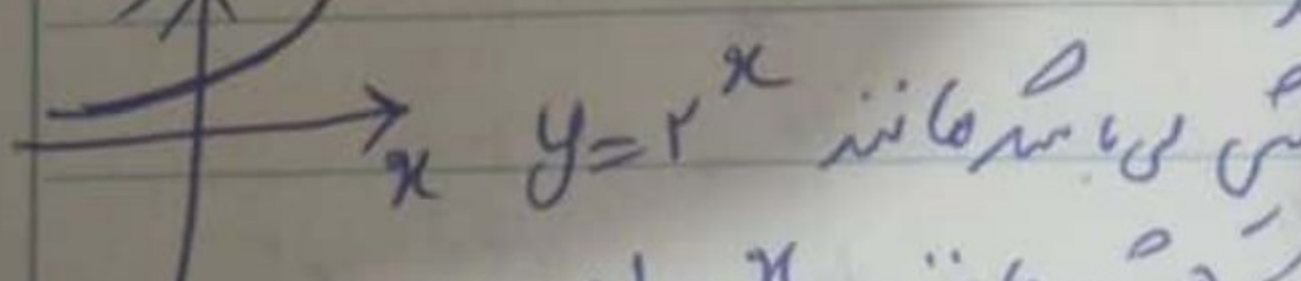
۱۵ تابع نمایی $y = a^x$ برای $a > 0$ ، $a \neq 1$

دامنه تابع $D = \mathbb{R}$ یعنی مجموعه اعداد حقیقی

ولی برد تابع $R = (0, +\infty)$ می باشد

تابع نمایی محور عرض ها را در نقطه ای با عرض یک قطع می کند یا نقطه $(0,1)$

ولی محور x ها را قطع نمی کند



اگر $a > 1$ باشد نمودار افزایشی می باشد مانند $y = 2^x$

اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار کاهشی مانند $y = (\frac{1}{2})^x$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Date : / /

Subject :

۱۶ فرمول تابع رشد $y = c(1+r)^t$

فرمول تابع زوال $y = c(1-r)^t$

۱۷ رابطه بازگشتی در دنباله عددی یا حسابی $a_{n+1} = a_n + d$ ، $t_1 = a$

$a_{n+1} - a_n = d$

رابطه بازگشتی در دنباله هندسی

$a_{n+1} = r a_n$ ، $t_1 = a$

۱۸ محاسبه جذر در تمدن بابل $\sqrt{k}$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n})$ ، $a_1 = k$

19 هرگاه بخواهیم اشیاء دو دسته A و B را به صورت یک در میان بچینیم دو حالت مطلوب می‌شود

الف) تعداد اشیاء دو دسته برابر n باشند در این صورت تعداد حالات مطلوب برابر

$n! \times n! \times 2$

ب) تعداد اشیاء دو دسته یک واحد اختلاف داشته باشند در این صورت تعداد حالات مطلوب برابر است با $n! \times (n-1)!$

۲۰) تعداد حالات نشستن افراد دور میز گرد $(n-1)!$

که n تعداد افرادی باشند

موفق باشید: محمد نعمتی

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

به نام خدا آزمون مستمر ریاضی و آمار (۳)

(۱) با حروف کلمه Flower و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با حرف F شروع گردد

(۲) ۵ نفر در یک تاکسی به عنوان مسافر هستند الف) به چند طریق می‌توانند جابه جا شوند

ب) احتمال اینکه ماه تولدشان یکسان باشد چقدر است

ج) احتمال اینکه ماه تولدشان متفاوت باشد چقدر است

(۳) روی یک کارت اعداد یک تا ۲۰ نوشته شده است فضای نمونه‌ای آزمایش را بنویسید

پیشامد A که در آن اعداد ظاهر شده اول باشد را بنویسید

پیشامد B که در آن اعداد ظاهر شده بر ۳ بخش پذیر باشد را بنویسید

(۴) یک تاس و یک سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم مطلوبست فضای نمونه‌ای آزمایش

ب) احتمال پیشامد A که در آن تاس زوج و سکه پشت بیاید را بدست آورید

(۵) قواعد چرخه آمار را نام ببرید

(۶) فرمول عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \frac{n^2}{2n-1}$ می‌باشد جمله‌ی اول آن را بنویسید

(۷) در یک دنباله حسابی جمله‌ی اول آن ۵ و قدرنسبت آن ۲ می‌باشد جمله‌ی چندم از این دنباله برابر ۱۰۱ می‌باشد سپس مجموع ۲۰ جمله‌ی اول این دنباله را بدست آورید

(۸) در یک دنباله هندسی جمله‌ی هفتم آن ۴۸ و جمله‌ی چهارم آن ۶ می‌باشد این دنباله را بیابید و سپس جمله‌ی دهم دنباله را مشخص کنید

(۹) مطلوبست مجموع دنباله‌ی هندسی مقابل $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۱۰) به ساده ترین صورت ممکن بیان کنید

الف) $(m^{3}.n^{2})^{4}.(m^{6}.n^{8})^{2}$

ب) $3^{7}\times 4^{7}\times 5^{2}\times 25^{4}$

۱۱) نمودار تابع نمایی $y=2^{x}$ را رسم کنید دامنه و برد آن را مشخص کنید

۱۲) جمعیت یک روستا در سال ۱۳۹۸ برابر ۱۰۰۰۰ نفر می باشد اگر جمعیت این روستا هر سال ۲ درصد افزایش یابد جمعیت این روستا در سال ۱۴۰۰ را بیابید

موفق باشید: محمد نعمتیان

۱۴۰۰/۲/۱۹

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

مثال: از رابطه‌های زیر مقدار n را بدست آورید

الف) $\frac{n!}{(n-2)!} = 56 \longrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = 56$

$n = 8$

ب) $\binom{n}{3} = 10 \rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10 \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6 \times (n-3)!} = 10$

$n(n-1)(n-2) = 60 \rightsquigarrow n = 5$

ج) $P(n,2) = 110 \rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 110 \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 110$

$\Rightarrow n(n-1) = 110 \rightsquigarrow n = 11$

متادیر n و r را طوری بیابید که هر ۵ داشته باشیم $\binom{n}{r} = 10$ ، $P(n,r) = 60$

فرمول سوم $\boxed{r! \times \binom{n}{r} = P(n,r)} \rightarrow r! \times 10 = 60 \rightarrow r! = 6 \rightarrow \boxed{r = 3}$

$\binom{n}{3} = 10 \rightarrow$ فرمول ترکیب $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6 \times (n-3)!} = 10$

$n(n-1)(n-2) = 60 \rightsquigarrow \boxed{n = 5}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

مثال: از بین ۵ نفر به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که اولی مدیر و دومی معاون و سومی منشی باشد

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۵ کتاب مختلف ۳ کتاب را هدیه داد؟

$$C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!\,2} = 10$$

رابطه بین ترکیب و ترتیب

$$3! \times C(n,3) = P(n,3)$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

الف) $\binom{۶}{۲} \times \binom{۵}{۳}$ کیسه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی می‌باشد، چند طریق وجود دارد ۵ مهره انتخاب کرد که شامل ۳ تای آن‌ها قرمز و ۲ تا آبی باشد

ب) $\binom{۶}{۲} + \binom{۵}{۳}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۶ هفت نقطهٔ A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟ $\frac{۷\times۶\times۵\times۴۱,}{۶\times۴۱.} = ۳۵$ $= \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!۴!.}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

یک مجموعه ۱۰ عضوی چندتا مجموعه ۲ عضوی دارد ؟

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی 2^n است

نکته: تعداد زیر مجموعه های r عضوی از n عضو برابر $\binom{n}{r}$ است

مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ۳ عضوی را بدست آورید

$2^n = 2^3 = 8$ $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

مثال: تعداد زیر مجموعه ۲ عضوی از یک مجموعه ۳ عضوی را بدست آورید

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3\times 2!}{2!\times 1} = 3$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \leftarrow \binom{5}{1} = \binom{5}{4}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \quad , \quad \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$\binom{n}{n} = 1 \leftarrow \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \leftarrow \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{3}{3} = 1 \leftarrow \binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{n}{1-n} = n \qquad \binom{n}{0} = 1$$

Ex:

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

مثال: از بین ۵ دانش آموز دهم و ۴ دانش آموز یازدهم به چند طریق می توان ۳ دانش آموز انتخاب کرد بطوریکه:

الف) سه دانش آموز دلخواه باشند

$$\binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$$

ب) ۲ دانش آموز از دهم باشند

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1} = 10\times4 = 40$$

پ) حداقل ۲ دانش آموز از دهم باشند

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{0} = 10\times4 + 10\times1 = 40+10 = 50$$

ت: حداکثر ۲ دانش آموز از دهم باشند

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2} + \binom{5}{0}\binom{4}{3}$$

$$= (10\times4) + (5\times6) + (1)(4) = 40+30+4 = 74$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

مثال: به چند طریق می‌توان از کیسه‌ای حاوی ۵ مهره ۳ مهره برداریم

روش اول $= \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$ $\quad C(5,3) = \binom{5}{3}$

روش دوم $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

مثال: بدست آورید

$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$

$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیر مجموعهٔ r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب rتایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء متمایز را معمولا با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (0 \leq r \leq n)$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

سؤال : مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر با عدد $\binom{5}{3}+\binom{6}{2}$ باشد :

کیسه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی می باشد، به چند طریق می‌توان ۳ مهره قرمز یا ۲ مهره آبی انتخاب کرد؟

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با p(n,r) نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $1! = 1$ $2! = 1 \times 2$ $3! = 1 \times 2 \times 3$ و الی آخر قرار داد: $0! = 1$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با ..... .

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم، یک **جایگشت** از آن اشیاء می‌گوییم.»

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

حداقل: بلوار ۵ × خیابان ۸ × کوچه ۱۰ × کارخانه ۲۰ = ۸۰۰۰

حداکثر: بلوار ۵ × خیابان ۱۰ × کوچه ۱۲ × کارخانه ۳۰ = ۱۸۰۰۰

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل ، ۱۰ رنگ ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟ ۵×۱۰×۳×۲=۳۰۰

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد ، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟ ۵×۱×۳×۲=۳۰ نوع

پ) با چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

۵×۱×۳×۱=۱۵ نوع

مدل	رنگ	حجم	دنده
۵	۱	۳	۱

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

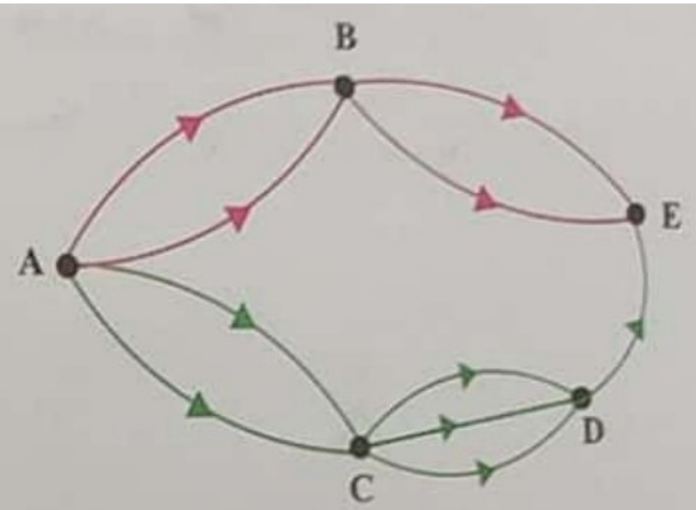
پرسش نامه‌ای دارای ۳ سؤال ۲ گزینه‌ای و ۳ سؤال ۳ گزینه‌ای است اگر شخصی موظف باشد صرفاً به هر شش سوال پاسخ دهد ؟ چند طریق می‌تواند پرسش نامه را پر کند ؟

$۲\times۲\times۲+۳\times۳\times۳=۳۵$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

۷ اگر شکل مقابل نشان دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



$A \to B \to E \Rightarrow ۲ \times ۲ = ۴$

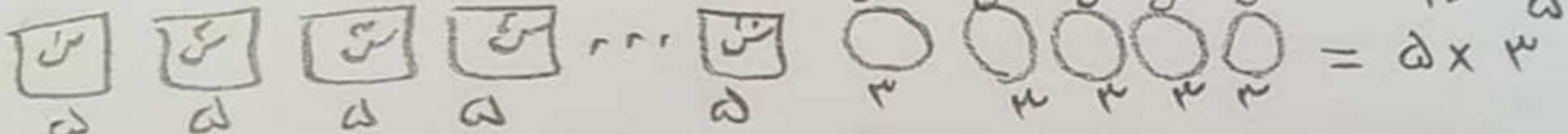
$E,D,B,C,C,A \Rightarrow ۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$

$\to ۴ + ۶ = ۱۰$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

ب)



$3^5 \times 5^{10} =$

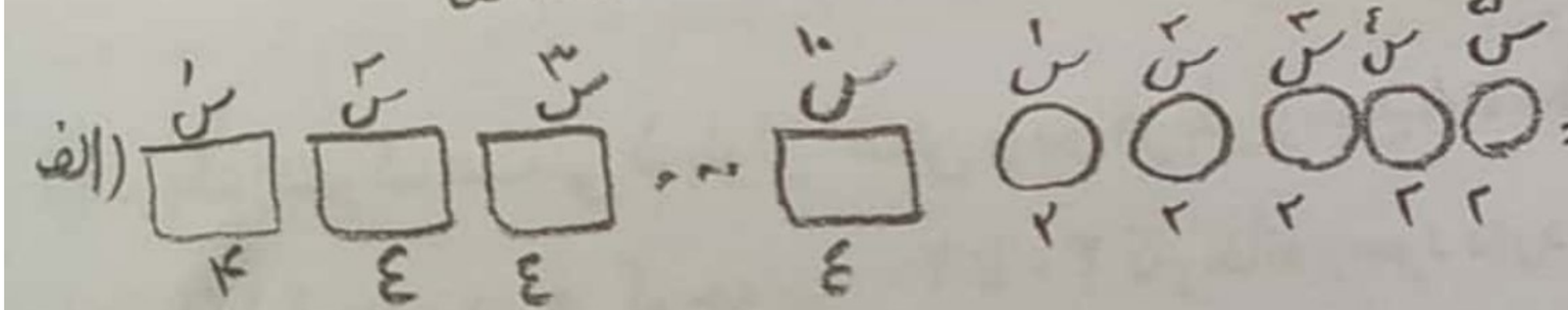
۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر :

الف) اگر مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟ $4^{10} \times 2^5 = 2^{25}$

$4^{10} \times 2^5$

$5^{10} \times 3^5$

ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟



$\Rightarrow 4^{10} \times 2^5 = (2^2)^{10} \times 2^5 = 2^{20} \times 2^5 = 2^{25}$

۷ اگر شکل مقابل نشان دهندهٔ

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

مثال

با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ ⟵ $۳ \times ۴ \times ۴ = ۴۸$

صدگان ۲ — دهگان ۳ — یکان ۴

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

صدگان ۳ — دهگان ۳ — یکان ۲

$۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

یکان ۱ — صدگان ۳ — دهگان ۲

$۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$

$۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$

$۴ + ۴ = ۸$

ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

یکان ۱ — دهگان ۲ — صدگان ۳

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

$۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$

$۶ + ۴ = ۱۰$

حل:

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی‌تواند باشد؛ بنابراین تعداد

Scanned with CamScanner

کار در کلاس

۱ با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۵۲
و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صور
پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور درنظر گرفت.

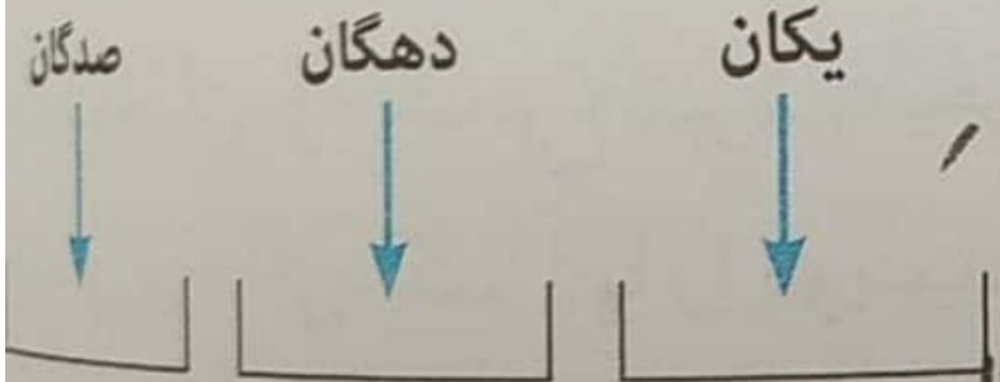
یکان دهگان صدگان

۳ ۴ ۳

۳×۳×۳=۲۷

۳ ۲ ۱

۳×۲×۱=۶



Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به‌طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m_1 روش، برای انجام مرحلهٔ دوم m_2 روش ، ... و برای انجام مرحلهٔ kام m_k روش وجودداشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$ روش قابل انجام است.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل: طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها ۶=۳×۲ است که عبارت‌اند از:

a,۱ a,۲ a,۳

b,۱ b,۲ b,۳

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

یادآوری:

۱)پدیده ی تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه ی آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش بینی کرد در واقع از همه ی حالات ممکن در به وقوع پیوستن آنها مطلع هستیم اما از این که کدام حالت قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداریم.

۲)فضای نمونه ای: مجموعه ی تمام نتایج ممکن یک پدیده ی تصادفی را فضای نمونه ای آن پدیده نامیم.فضای نمونه ای را با S نمایش می دهیم.

۳) فضای نمونه ای گسسته: اگر اعضای فضای نمونه ای S قابل شمارش باشند آن را فضای نمونه ای گسسته می نامیم و تعداد اعضای ان را با $n(S)$ نمایش می دهیم.

۴) پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای S را یک پیشامد تصادفی می گوییم.

۵) پیشامد نشدنی(غیر ممکن): پیشامد تهی را پیشامد نشدنی می نامیم زیرا $\varnothing \subset S$ است.

۶) پیشامد حتمی(قطعی): پیشامد S را پیشامد حتمی می نامیم زیرا $S \subseteq S$ است.

پیشامدها و اعمال روی آنها:

فرض کنیم A, B پیشامد هایی از فضای نمونه ای S باشند

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می دهد که هر دو پیشامد A, B رخ دهند.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A-B$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یا A^C) وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۷) پیشامد های ناسازگار: دو پیشامد A,B را ناسازگار می گوییم هر گاه A,B با هم رخ ندهند یعنی $A\cap B=\varnothing$

احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد همه حالات های مطلوب}}$$

جمع احتمالات:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

درس دوم : ریشه n ام و توان گویا

مثال : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$(\frac{۲}{۵})^{۴} = \frac{۱۶}{۶۲۵}$ $\quad (۲)^{-۷} = (\frac{۱}{۲})^{۷} = \frac{۱}{۲۵۶}$ $\quad ۴^{۳} = ۶۴$

$(-۳)^{۶} = ۷۲۹$ $\quad -۳^{۶} = -۷۲۹$ $\quad (۱\frac{۱}{۲})^{۰} = ۱$ $\quad ۷۳^{۱} = ۷۳$

قوانین اعداد توان دار :

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\Rightarrow$ $(۲,۱)^{۹} \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^{۴} = (۲,۱)^{۱۱}$

② $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\Rightarrow$ $(\frac{۴}{۵})^{۵} \div (\frac{۴}{۵})^{۸} = (\frac{۴}{۵})^{۵-۸} = (\frac{۴}{۵})^{-۳}$

③ $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ $\Rightarrow$ $(-۴)^{۳} \times (-۵)^{۳} = ۲۰^{۳}$

④ $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$ $\Rightarrow$ $(-۳۶)^{۷} \div ۹^{۷} = (-۴)^{۷}$

⑤ $(a^m)^n = a^{mn}$ $\Rightarrow$ $(۱۰^{۹})^{۸} = ۱۰^{۷۲}$

⑥ $a^{-n} = (\frac{۱}{a})^n$ $\Rightarrow$ $۳^{-۵} = (\frac{۱}{۳})^{۵}$

⑦ $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$ $\Rightarrow$ $(\frac{۴}{۷})^{-۳} = (\frac{۷}{۴})^{۳}$

نکته : اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم a هستند. به عبارت دیگر ریشه های دوم a همان ریشه های معادله درجه دوم $x^۲ = a$ هستند.

مثال : ریشه های دوم عدد ۱۶ ریشه های معادله $x^۲ = ۱۶$ می باشند، چون $۴^۲ = ۱۶$ و $(-۴)^۲ = ۱۶$ پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه های دوم عدد ۱۶ هستند.

نتیجه : ریشه های زوج ام عدد a را به صورت $\pm \sqrt[\text{زوج}]{a}$ نمایش می دهند. (a عددی حقیقی و مثبت است)

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

نکته: ۱- اعداد منفی ریشه دوم ندارند. ۲- ریشه دوم عدد صفر برابر صفر است. ۳- اعداد مثبت ۲ ریشه دوم دارند که یکی قرینه دیگری است.

مثال: ریشه های دوم اعداد زیر را به دست آورید

$\sqrt{7}$ ، $-\sqrt{7}$ ← ۷

۳۶- ندارد

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ ، $-\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$ ← $\frac{1}{9}$

$\sqrt{25} = 5$ ، $-\sqrt{25} = -5$ ← ۲۵

نکته: ریشه سوم هر عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. ریشه سوم عدد ۲۷ ، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر ۳ می باشد.

مثال: ریشه سوم اعداد زیر را بیابید.

$\sqrt[3]{64} = 4 \leftarrow 64$ $\quad \sqrt[3]{-8} = -2 \leftarrow -8$ $\quad \sqrt[3]{1} = 1 \leftarrow 1$ $\quad \sqrt[3]{5} \leftarrow 5$

نکته: ریشه پنجم عدد -32 یا پنج معادله $x^5 = -32$ است که برابر -2 است.

ریشه های ششم عدد ۶۴ ، ریشه های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر ۲ و -2 می باشند.

نکته: در حالت کلی درباره ریشه nام عددی مانند a می توان گفت

① $a \geq 0$

- n زوج ← ریشه nام a $= \pm\sqrt[n]{a}$ ، $\sqrt[n]{a}$
- n فرد ← ریشه nام a $= \sqrt[n]{a}$

② $a < 0$

- n زوج ← ریشه ندارد
- n فرد ← ریشه nام a $= \sqrt[n]{a}$

مثال: در هر قسمت برای هر عدد ریشه مورد نظر را با نماد رادیکالی مشخص کنید.

الف) ریشه هشتم ۲۲ ← $\sqrt[8]{22}$ ، $-\sqrt[8]{22}$

ب) ریشه چهارم -35 ← ۴ زوج و -35 عددی منفی است. پس -35 ریشه چهارم ندارد. در حالت کلی اعداد منفی ریشه زوج ندارند.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

ج) ریشه پنجم ۸۵ ← $\sqrt[5]{85}$

د) ریشه هفتم ۱۸- ← $\sqrt[7]{-18}$

نکته: با توجه به این که $\sqrt{a^2}=|a|$ و $\sqrt[3]{a^3}=a$ این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n\geq 2$ برقرار است.

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & n \text{ زوج است}\\ a & n \text{ فرد است}\end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدون نماد رادیکال بنویسید.

$\sqrt[8]{(-9)^8}=|-9|=9$

$\sqrt[12]{(15)^{12}}=|15|=15$ $\qquad$ $\sqrt[8]{-9^8}=\longrightarrow$ تعریف نشده چون زیر رادیکال با فرجه زوج منفی می شود.

$\sqrt[5]{10^5}=10$ $\qquad$ $\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$ $\qquad$ $\sqrt[9]{-5^9}=-5$

$\sqrt{(-\frac{7}{2})^2}=|-\frac{7}{2}|=\frac{7}{2}$ $\qquad$ $\sqrt[6]{(-\frac{4}{3})^6}=|-\frac{4}{3}|=\frac{4}{3}$

توان های گویا:

تعریف: برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

(توان: $\frac{1}{n}$، فرجه: n)

مثال: $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}$

نکته: در این قسمت n عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ و عدد زیر رادیکال باید مثبت باشد.

تذکر: $\sqrt[7]{-3}$ را به صورت توان گویا نمی توان نوشت.

تعریف: به طور کلی هرگاه a عددی مثبت ($a>0$) و m و n دو عدد طبیعی باشند داریم:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

(صورت کسر: m، مخرج کسر: n)

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

تذکر: تمام روابطی که در مورد محاسبات اعداد توان دار با توان صحیح به کار می‌بردیم برای توان های گویا نیز برقرار است.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

① $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}} = 5^{\frac{3}{4}} = 5^{1} = 5$

② $4^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} = (4\times5)^{\frac{3}{4}} = 20^{\frac{3}{4}}$

③ $5^{\frac{3}{4}} \div 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{4}-\frac{1\times2}{2\times2}} = 5^{\frac{1}{4}}$

④ $8^{\frac{1}{4}} \div 2^{\frac{1}{4}} = (8\div2)^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{4}}$

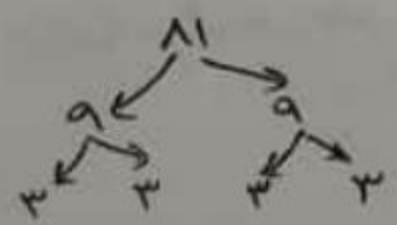
⑤ $(5^{\frac{1}{4}})^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{4}}$

⑥ $(2^{\frac{1}{4}})^{6} = 2^{\frac{1}{4}\times6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{2} = 4$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

① $10^{\frac{3}{4}} \times 10^{-\frac{3}{4}} = 10^{\frac{3}{4}+(-\frac{3}{4})} = 10^{0} = 1$

② $27^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = (27\times3)^{\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}} = (3^{4})^{\frac{1}{4}} = 3^{4\times\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{4}}$



③ $\left(\frac{a^{-\frac{1}{4}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} = \frac{(a^{-\frac{1}{4}})^{-4}}{(a^{-\frac{1}{4}})^{-4}} = \frac{a^{\frac{4}{4}}}{a^{\frac{4}{4}}} = \frac{a^{1}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{1-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

④ $(a^{\frac{3}{5}}\cdot b^{\frac{2}{5}})^{5}(a^{2}\cdot b^{14})^{\frac{1}{14}} = (a^{\frac{3}{5}})^{5}\cdot(b^{\frac{2}{5}})^{5}\cdot(a^{2})^{\frac{1}{14}}\cdot(b^{14})^{\frac{1}{14}}$

$= a^{\frac{15}{5}}\cdot b^{\frac{10}{5}}\cdot a^{\frac{2}{14}}\cdot b^{\frac{14}{14}} = a^{3}\cdot b^{2}\cdot a^{\frac{1}{7}}\cdot b^{1} = a^{\frac{3\times7}{1\times7}+\frac{1}{7}}\cdot b^{3} = a^{\frac{22}{7}}b^{3}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

نکته:

$$a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

مثال: اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$۶^{\frac{۷}{۹}} = \sqrt[۹]{۶^{۷}} \qquad ۵^{\frac{۳}{۴}} = \sqrt[۴]{۵^{۳}}$$

$$\left(۲\frac{۱}{۳}\right)^{-\frac{۸}{۳}} = \left(\frac{۷}{۳}\right)^{-\frac{۸}{۳}} = \left(\frac{۳}{۷}\right)^{\frac{۸}{۳}} = \sqrt[۳]{\left(\frac{۳}{۷}\right)^{۸}} \qquad ۲^{-\frac{۲}{۱۱}} = \left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{\frac{۲}{۱۱}} = \sqrt[۱۱]{\left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{۲}}$$

$$(۰/۰۰۰۱)^{\frac{۱۴}{۴}} = \left(\frac{۱}{۱۰۰۰}\right)^{\frac{۱۴}{۴}} = \sqrt{\left(\frac{۱}{۱۰۰۰}\right)^{۷}} \qquad \frac{۱۴\div۲}{۴\div۲} = \frac{۷}{۲}$$

مثال: عبارت های رادیکالی زیر را به صورت توان گویا بنویسید.

$$\sqrt[۱۰]{۱} = ۱ \qquad \sqrt[۳]{۲۵} = ۲۵^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\sqrt[۴]{۳^{۶}} = ۳^{\frac{۶\div۲}{۴\div۲}} = ۳^{\frac{۳}{۲}} \qquad \sqrt[۸]{۱۰^{\frac{۴}{۳}}} = ۱۰^{\frac{\frac{۴}{۳}}{۸}} = ۱۰^{\frac{۴\div۴}{۲۴\div۴}} = ۱۰^{\frac{۱}{۶}}$$

مثال: عددهای زیر را به صورت ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$۱۰۰^{\frac{۱}{۲}} = (۱۰^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰$$

$$۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}} = (۵^{۳})^{-\frac{۱}{۳}} = ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}$$

$$۴^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲\times\frac{۱}{۲}} = ۲^{۱} = ۲$$

$$۳۲^{\frac{۱}{۵}} = (۲^{۵})^{\frac{۱}{۵}} = ۲^{\frac{۵}{۵}} = ۲^{۱} = ۲$$

مثال: آیا نوشتن $\sqrt[۳]{-۸}$ را به صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ می توان نوشت؟ چرا؟

خیر- زیرا اعداد منفی را نمی توان به صورت توان های گویا نوشت. دلیل:

$$\sqrt[۳]{-۸} = \sqrt[۳]{(-۲)^{۳}} = -۲$$

$$(-۸)^{\frac{۱}{۴}} = (-۸)^{\frac{۲}{۴}} = \sqrt[۴]{(-۸)^{۲}} = \sqrt[۴]{۶۴} = \sqrt[۴]{۲^{۶}} = ۲$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

تمرین: مقدار x را از هریک از تساوی های زیر بیابید.

الف) $(4^{x-1})^{3} = (4^{2})^{x+5}$

حل: $4^{3x-3} = 4^{2x+10} \Rightarrow 3x-3=2x+10 \Rightarrow 3x-2x=3+10 \Rightarrow x=13$

ب) $2^{2x-5} = 16^{4}$

حل: $2^{2x-5} = (2^{4})^{4} \Rightarrow 2^{2x-5} = 2^{16} \Rightarrow 2x-5=16 \Rightarrow 2x=5+16$

$\Rightarrow 2x=21 \Rightarrow x=\frac{21}{2}$

تمرین: ساده ترین حالت ممکن را برای هریک از موارد زیر بیان کنید.

الف) $(2\times 8)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^{4}} = 2$

ب) $-8(1000)^{\frac{1}{3}} = -8\sqrt[3]{1000} = -8\sqrt[3]{10^{3}} = -8\times 10 = -80$

تمرین: $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از 2 بنویسید.

حل: $\sqrt{2} = 2^{b} \xrightarrow[\text{طرفین را به توان } 2]{\text{هر دو طرف تساوی را}} (\sqrt{2})^{2} = (2^{b})^{2} \Rightarrow 2^{1} = 2^{2b} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

تمرین: $\sqrt[3]{5}$ را به صورت توانی از 5 بیان کنید.

حل: $\sqrt[3]{5} = 5^{b} \xrightarrow[\text{به توان } 3]{} (\sqrt[3]{5})^{3} = (5^{b})^{3} \Rightarrow 5^{1} = 5^{3b} \Rightarrow 1=3b \Rightarrow b=\frac{1}{3}$

در نتیجه: $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

درس سوم : تابع نمایی

تابع نمایی : هر تابع به صورت $y=a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود (متغیر x در نما یا توان قرار دارد.)

تذکر : حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است.

تذکر : تابع نمایی را به زبان ریاضی می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \qquad (a>0 \ , \ a\neq 1)$$

منظور از $\mathbb{R}^+$، مجموعه $\{x \mid x\in\mathbb{R} \ , \ x>0\}$ است.

مثال: تابع نمایی را مشخص کنید

$y=(-\frac{1}{3})^x$ ✗ پایه عددی منفی است.

$y=3^x$ ✓ چون پایه عددی مثبت است.

$y=(\frac{1}{3})^x$ ✓ پایه عددی مثبت است

$y=1^x$ ✗ پایه عدد $\neq 1$ است.

$y=2^{-x} \Rightarrow y=(\frac{1}{2})^x$ ✓ پایه عددی مثبت است

$y=0^x$ ✗ پایه صفر است

نکته: توابع نمایی $y=a^x$ با توجه به پایه‌ها به دو دسته کلی زیر تقسیم می‌شوند.

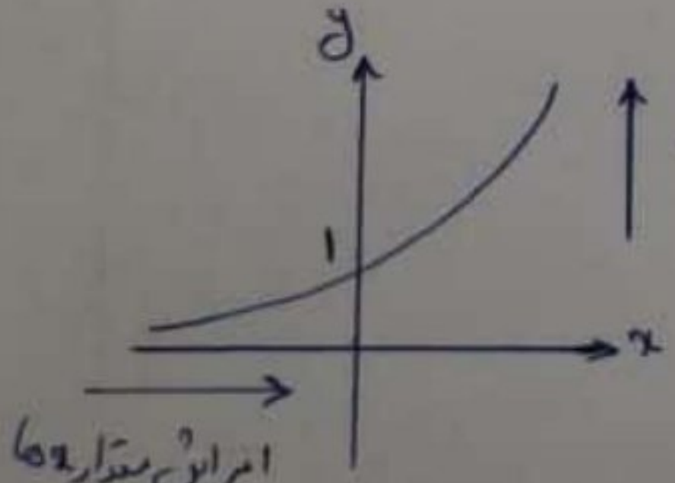
① $y=a^x$: $a>1$

② $y=a^x$: $0<a<1$

رسم نمودار توابع نمایی :

نمودار تابع نمایی $y=a^x$ با توجه به مقدار پایه آن‌ها به ۲ دسته کلی تقسیم می‌شود :

الف) اگر $a>1$ آن‌گاه نمودار تابع نمایی به صورت زیر است.

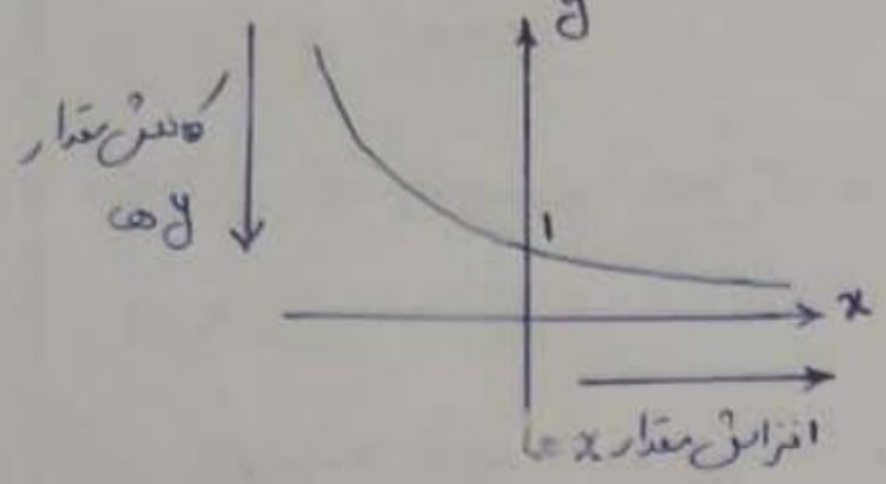


در این حالت تابع نمایی افزایشی است چون با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها نیز افزایش پیدا می‌کند

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

ب) اگر $0<a<1$ باشد، تابع نمایی $y=a^x$ به صورت زیر است.



در این حالت می‌گوییم تابع نمایی کاهشی است. چون با افزایش مقدار x ها مقدار y ها کاهش پیدا می‌کند.

نکته: ① دامنه توابع نمایی برابر اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) و برد توابع نمایی برابر اعداد حقیقی مثبت ($\mathbb{R}^+$) است.

② نمودار تابع نمایی $y=a^x$، محور y ها را همواره در نقطه 1 قطع می‌کند.

مثال: نمودار تابع $y=2^x$ را رسم کنید و مشخص کنید کاهشی است یا افزایشی؟

x	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	...
y		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	

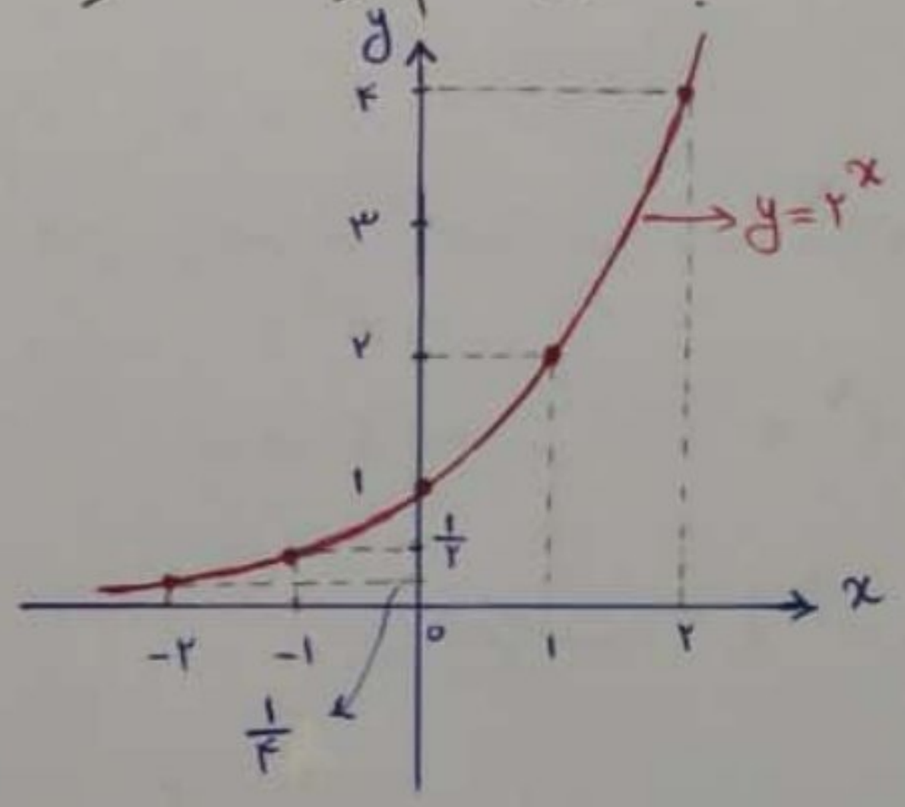
$x=-2 \Rightarrow y=2^{-2}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$x=-1 \Rightarrow y=2^{-1}=(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{2}$

$x=0 \Rightarrow y=2^0=1$

$x=1 \Rightarrow y=2^1=2$

$x=2 \Rightarrow y=2^2=4$



نوع تابع افزایشی است. زیرا $a>1$ است.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

مثال: نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

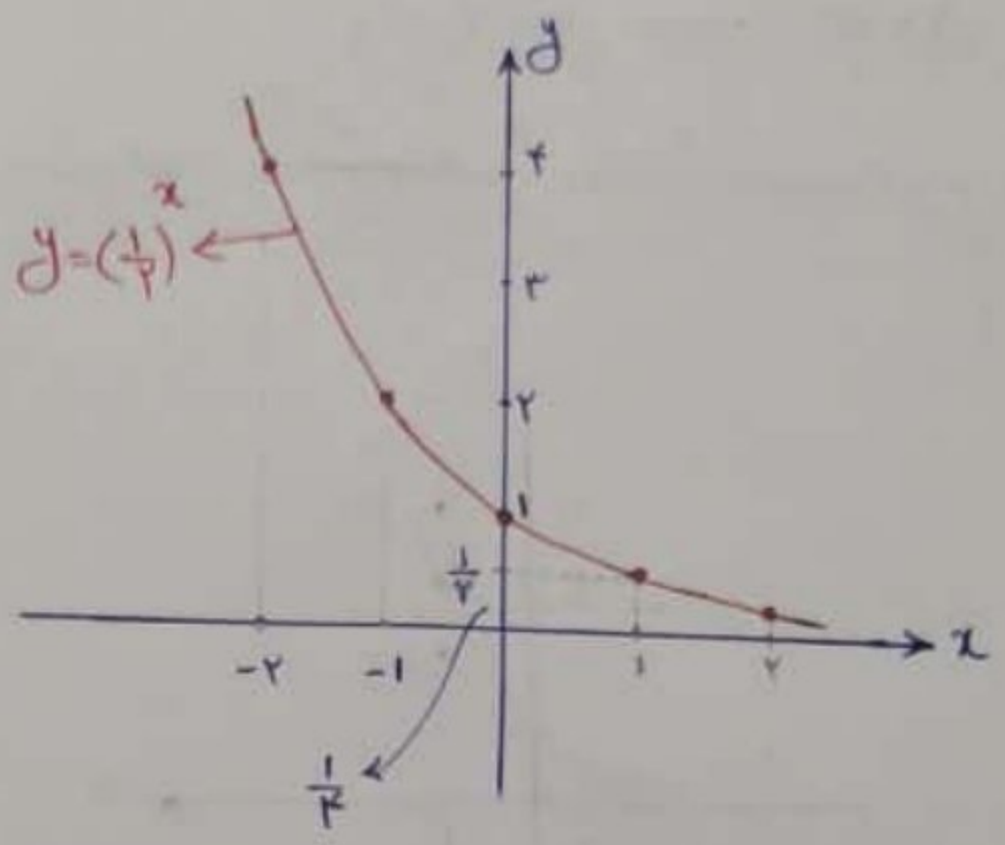
$x=-2 \Longrightarrow y=(\frac{1}{2})^{-2}=2^2=4$

$x=-1 \Longrightarrow y=(\frac{1}{2})^{-1}=2^1=2$

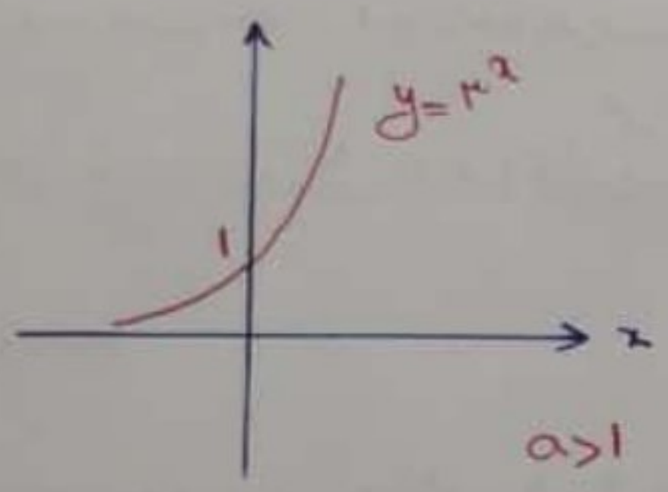
$x=0 \Longrightarrow y=(\frac{1}{2})^0=1$

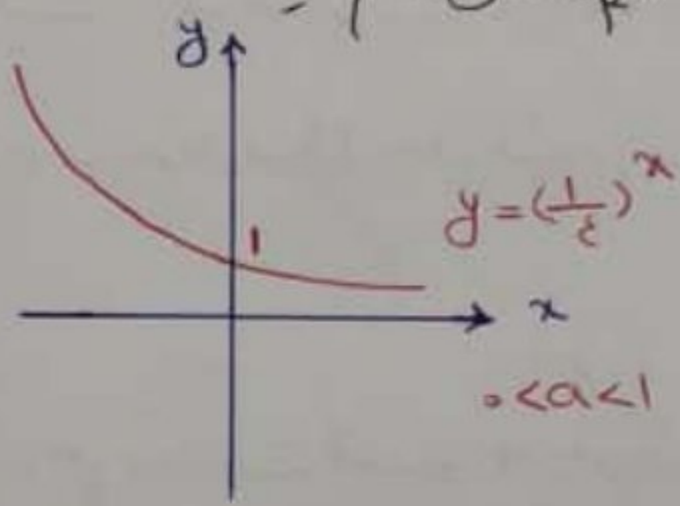
$x=1 \Longrightarrow y=(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{2}$

$x=2 \Longrightarrow y=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$



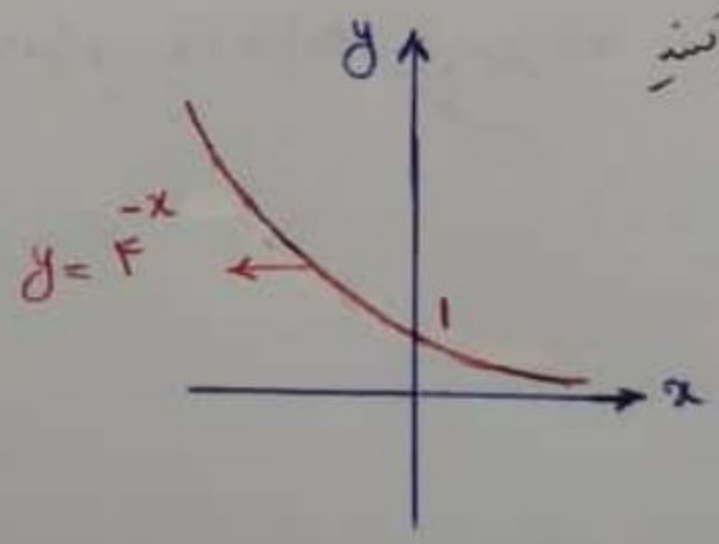
مثال: نمودار توابع $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.



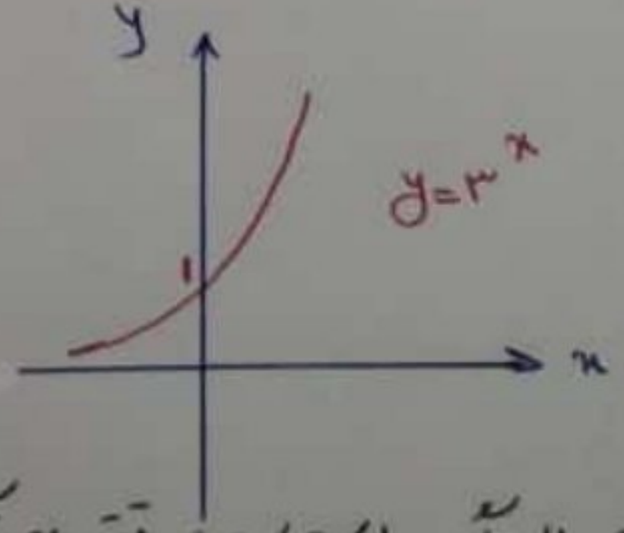


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=4^{-x} \longrightarrow y=(\frac{1}{4})^x$



ب) $y=(\frac{1}{3})^{-x} \longrightarrow y=(\frac{3}{1})^x=3^x$



نکته: در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $0<a<1$، وقتی x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچکتر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

نکته: برای رسم توابع نمایی به صورت $y=a^{-x}$ ابتدا با معکوس کردن پایه آن را به صورت توان مثبت می نویسیم سپس نمودار آن را رسم می کنیم.

$$y=5^{-x} \Longrightarrow y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$$

مثال: نمودار توابع $y=2^x$ ، $y=3^x$ و $y=4^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید سپس تله و تکه و شبه هست های بین این سه تابع را بنویسید.

(۱) $y=2^x$ →

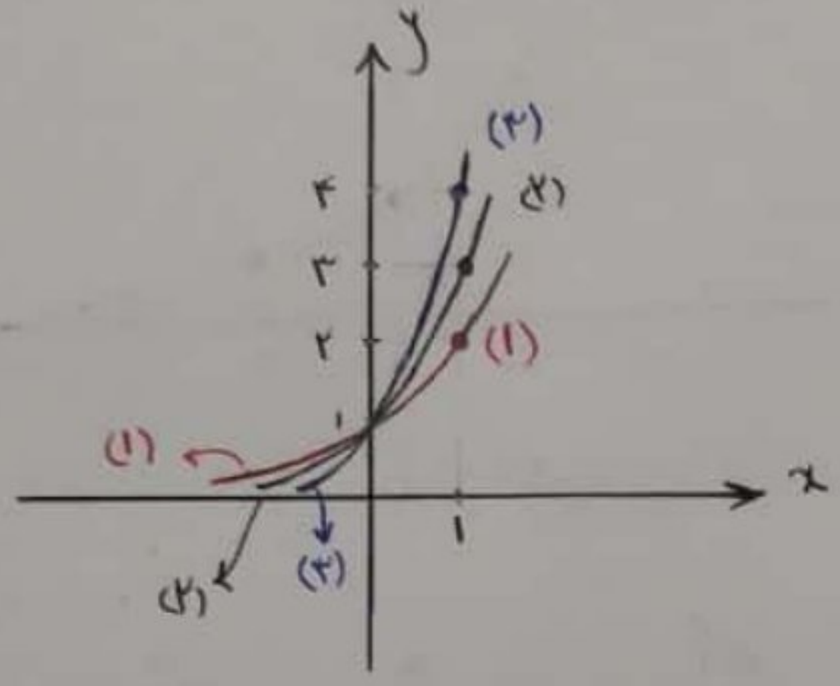
x	۰	۱
y	۱	۲

(۲) $y=3^x$ →

x	۰	۱
y	۱	۳

(۳) $y=4^x$ →

x	۰	۱
y	۱	۴



$2^x < 3^x < 4^x$

شبهت ها: ۱- دامنه هر سه تابع $\mathbb{R}$ است. ۲- برد هر سه تابع $(0,+\infty)$ است. ۳- هر سه تابع محور y ها را در نقطه $(0,1)$ قطع می کنند. ۴- هر سه نمودار محور طول ها را قطع نمی کنند ۵- هر سه تابع صعودی یا افزایشی هستند.

تفاوت ها: ۱- به ازای $x=1$ ، y هایی که با هم متفاوت است. یعنی این که مقدار تابع $y=4^x$ از مقدار تابع $y=3^x$ و $y=2^x$ در نقطه $x=1$ بیشتر است. ۲- با مزان افزایش x ، مقدارهای y فرق دارد.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

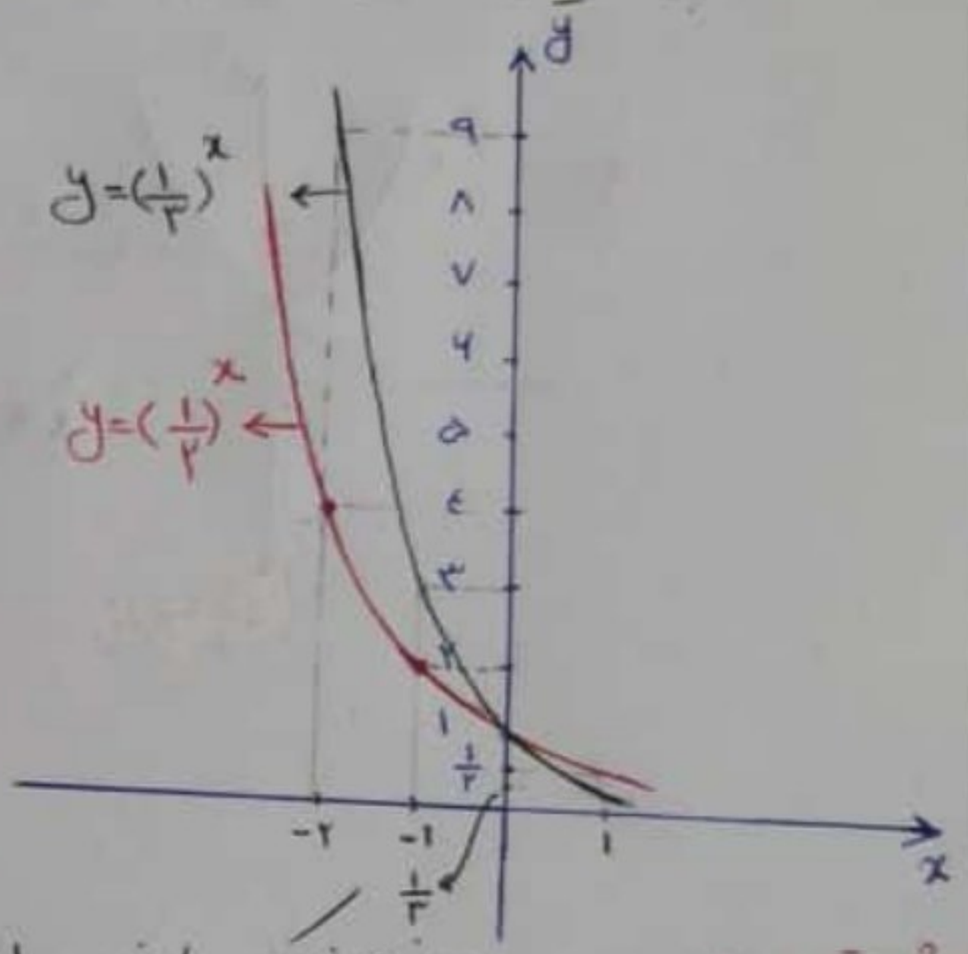
مثال: دو تابع نمایی $y=(\frac{1}{2})^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و این دو تابع را با هم مقایسه کنید.

x	-2	-1	0	1
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$

$y=(\frac{1}{2})^x$

x	-2	-1	0	1
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$

$y=(\frac{1}{3})^x$



شباهت: ۱- هر دو با یک نقطه صفر دارند. $(0,1)$ ۲- هر دو محور y ها را در نقطه $\frac{1}{2}$ قطع کرده‌اند.

۳- هر دو کاهشی هستند. ۴- با محور طول‌ها برخورد ندارند.

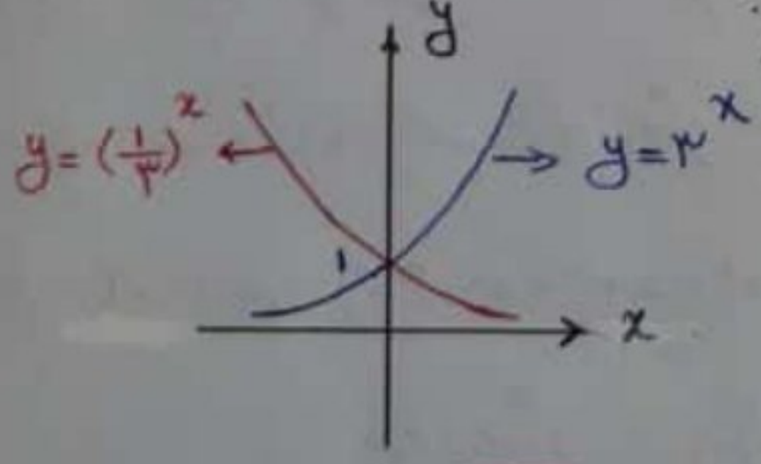
تفاوت: ۱- به ازای مقادیر بزرگ‌تر از صفر، تابع $y=(\frac{1}{2})^x$، مقادیر بزرگ‌تری از تابع $y=(\frac{1}{3})^x$ دارد.

۲- به ازای مقادیر کوچک‌تر از صفر تابع $y=(\frac{1}{2})^x$، مقادیر کوچک‌تری از تابع $y=(\frac{1}{3})^x$ دارد.

نکته: دو تابع نمایی با پایه‌های معکوس هم نسبت به محور yها قرینه هم‌اند. یعنی دو تابع $y=a^x$ و $y=(\frac{1}{a})^x$ نسبت به محور yها قرینه هستند.

مثال: دو تابع نمایی $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ را در یک عکس دقیق رسم کنید.

عکس آن‌ها نسبت به محور yها قرینه‌اند.



تمرین:

① $2^n = 1024 \longrightarrow 2^n = 2^{10} \longrightarrow n=10$

② $(2^{n-1})^4 = 256^7 \longrightarrow 2^{4n-4} = (2^8)^7 = 2^{56} \longrightarrow 2^{4n-4} = 2^{56} \longrightarrow 4n-4=56 \longrightarrow 4n=4+56$

$\Rightarrow 4n=60 \Rightarrow n=\frac{60}{4}=15$

تمرین: جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

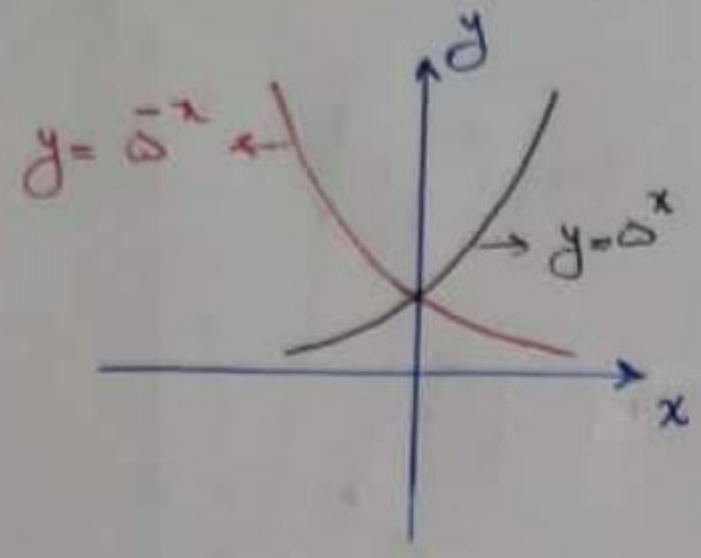
۱- تابع نمایی $y=2^x$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند و محور عرض‌ها را در نقطه $(0,1)$ قطع می‌کند.

۲- در تابع نمایی $y=a^x$ مقدار a باید $a>0$ و $a\neq 1$ باشد.

۳- در رابطه $(2^{n-1})^3 = (\frac{n-1}{2})^4$ مقدار n برابر است با 1.

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

تمرین: دو تابع نمایی $y=5^x$ و $y=5^{-x}$ را در یک دستگاه مختصاتی رسم کنید و با هم مقایسه کنید.



حل: $y=5^{-x} \rightarrow y=(\frac{1}{5})^x$

۱- هر دو محور y ها را در نقطه 1 قطع می کنند

۲- نسبت به محور y ها قرینه اند.

۳- $y=5^x$ افزایشی و $y=(\frac{1}{5})^x$ کاهشی است.

کاربرد توابع نمایی: ① رشد نمایی ② زوال نمایی

رشد نمایی: مسائلی که بر حسب زمان به صورت یک تابع نمایی افزایشی است. مانند: رشد جمعیت در هر سال یا افزایش سود بانکی سپرده ها بانکی در هر ماه.

نکته: معادله کلی مسائل رشد نمایی به صورت $f(t)=c(1+r)^t$ است. که در آن

$f(t)$: نشان دهنده مقدار نهایی c: نشان دهنده مقدار اولیه

r: میزان رشد (تغییرات) t: متغیر زمان است. (t بر حسب سال است)

مثال: جمعیت یک شهر ۲۰۰۰۰۰ نفر است. اگر رشد جمعیت $\frac{2}{}$ درصد در سال باشد.

الف) معادله رشد نمایی جمعیت این شهر را بنویسید. ب) جمعیت این شهر را بعد از ۲ سال به دست آورید.

حل: الف) هر سال $\frac{2}{}$ درصد به جمعیت اضافه می شود. پس مسئله رشد نمایی است.

$f(t)=c(1+r)^t$ $c=200000$ میزان رشد $r=2\%=\frac{2}{100}=0.02$

$f(t)=200000(1+\frac{2}{100})^t=200000(1.02)^t$

ب) $t=2$

$f(2)=200000(1.02)^2=200000(1.0404)=208080$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

مثال: یک شرکت سرمایه گذاری مبلغ ده میلیون تومان را از سرمایه گذاران دریافت و پس از ۲ سال مبلغ ۱۲ میلیون و یکصد هزار تومان در اختیار سرمایه گذاران قرار خواهد داد. نرخ سود سالیانه محاسبه شده در این شرکت سرمایه گذاری را محاسبه کنید

حل: چون سود اکن افزایش یابنده پس معادله رشد نمایی آن به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است. که با قرار دادن

$c = 10,000,000$ (مقدار اولیه) $t = 2$ (پس از دو سال) و $f(t) = 12,100,000$

مقدار درصد سود سالیانه (r) را به صورت زیر به دست می آوریم

$$12,100,000 = 10,000,000(1+r)^2 \xrightarrow[100000]{\text{تقسیم طرفین بر}} 121 = 100(1+r)^2 \Longrightarrow (1+r)^2 = \frac{121}{100} \xrightarrow{\text{جذر}} 1+r = \frac{11}{10}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{11}{10} - \frac{1}{1} \Longrightarrow r = \frac{11-10}{10} = \frac{1}{10} \Longrightarrow r = 0/1$$

مثال: اگر سرمایه اولیه شرکتی ۱۰۰ میلیون تومان و سود سالیانه آن را ۲۰٪ و فرض در آمد را در تمام مدت یکسان در نظر بگیریم مطلوبست محاسبه سرمایه شرکت: الف) در طی ۵ سال آینده ب) در طی ۱ سال و ۲ ماه آینده.

ج) در طی ۲۰۰ روز ($(1/2)^5 \simeq 2/9$ و $(1/2)^{\frac{7}{6}} \simeq 1/23$ و $(1/2)^{\frac{5}{9}} \simeq 1/11$)

حل: $f(t) = c(1+r)^t \Longrightarrow$ تابع رشد $t = 5$, $r = \frac{20}{100} = 0/2$, $c = 100,000,000$ (الف

$$f(5) = 100,000,000(1+0/2)^5 = 100,000,000 \times (1/2)^5 = 100,000,000 \times 2/9 = 290,000,000$$

ب) $c = 100,000,000$ $r = 0/2$ $t = 1 + \frac{2}{12} = \frac{1}{1\times 6} + \frac{1}{6} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$

$$f(\tfrac{7}{6}) = 100,000,000(1+0/2)^{\frac{7}{6}} = 100,000,000(1/2)^{\frac{7}{6}} = 100,000,000 \times 1/23 \simeq 123,000,000$$

ج) $c = 100,000,000$, $r = 0/2$ $t = \frac{200}{360} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{تابع رشد}} f(t) = c(1+r)^t \Longrightarrow$

$$f(\tfrac{5}{9}) = 100,000,000(1+0/2)^{\frac{5}{9}} = 100,000,000(1/2)^{\frac{5}{9}} = 100,000,000 \times 1/11 \simeq 111,000,000$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

زوال نمایی: مسائلی که بر حسب زمان به صورت یک تابع نمایی کاهشی باشند، زوال نمایی نامیده می‌شوند. مانند فرار سرمایه‌گذاری در هر ماه یا میزان کاهش جمعیت در هر سال.

نکته: معادله کلی مسائل زوال نمایی به صورت $f(t) = c(1-r)^t$ است که در آن

$f(t)$: نشان دهنده مقدار نهایی c: نشان دهنده مقدار اولیه

r: نرخ زوال دهنده میزان کاهش یا زوال و t نشان دهنده زمان است. (تا بر حسب سال است)

مثال: جمعیت یک کشور ۲۰۰,۰۰۰ نفر است. اگر به دلیل مهاجرت، هر سال جمعیت این کشور ۲ درصد کاهش پیدا کند

الف) معادله زوال نمایی جمعیت این شهر را بنویسید. ب) جمعیت این شهر را بعد از ۲ سال به دست آورید.

حل: چون هر سال ۲ درصد از جمعیت این شهر کم می‌شود. پس معادله زوال نمایی است.

$$f(t) = c(1-r)^t \quad , \quad c = 200{,}000 \quad , \quad r = 2\% = \frac{2}{100}$$

الف)

$$\Rightarrow f(t) = 200000\left(\frac{1\times 100 - 2}{1\times 100}\right)^t = 200000\,(0/98)^t$$

ب)

$$t = 2 \Rightarrow f(t) = 200000\,(0/98)^t \Longrightarrow f(2) = 200000\,(0/98)^2 = 200000\,(0/9604)$$

$$= 192080$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

به نام خدا

آزمون ریاضی و آمار ۳

۱ با توجه به فرمول عمومی دنباله حسابی $a_n = ۳ + (n-۱)۵$

الف: چهار جمله‌ی اول دنباله را بیابید ب) مجموع ۲۰ جمله از این دنباله را بدست آورید

۲ بین ۲۲ و ۸- ۵ تا عدد چنان درج کنید که اعدادحاصل تشکیل دنباله حسابی دهند

۳ مقدار x را طوری بیابید که تا جمله $۳x-۵ ، x+\frac{۱}{۲} ، ۹x+۷$ جمله دنباله حسابی باشند

۴ با توجه به دنباله‌ی مقابل $۳ ، \frac{۳}{۲} ، \frac{۳}{۴} ، ...$

الف) نام دنباله را بنویسید ب) جمله دهم این دنباله را بدست آورید

پ) جمله‌ی چندم از این دنباله $\frac{۳}{۱۲۸}$ می باشد

۵ مجموع سی جمله‌ی اول اعداد طبیعی فرد را بیابید ۱ و ۳ و ۵ و ... و ۵۹

۶ عبارت های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید

الف) $(m^{۴}.n^{۳})^{۲}.(m^{۲}.n^{۶})^{\frac{۱}{۲}}$ ب) $(۱\frac{۱}{۲})^{۲} \div (\frac{۳}{۲})^{۴}$

۷ مقدار x را در تساوی مقابل بیابید $(\frac{۱}{۲})^{۲x-۱} = \frac{۱}{۱۲۸}$

۸ عبارت های توانی را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توانی بیان کنید

الف) $\sqrt[۷]{a^{۳}}$ ب) $۲^{\frac{۴}{۵}}$ پ) $\sqrt[۳]{۲^{۲} \times ۳^{۵}}$

۹ نمودار تابع نمایی $y = ۲^{x}$ را رسم کنید دامنه و برد آن را مشخص کنید

۱۰ نمودار دو تابع $y = ۳^{x}$ و $y = (\frac{۱}{۳})^{x}$ را رسم کرده و تفاوت‌ها و شباهت‌ها را بیان کنید

موفق باشید: محمد نعیمیان

۱۴۰۰/۱/۲۴

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

به نام خدا

پاسخ نامه

۱

$a_n = ۳ + ۵(n-۱)$ ۳, ۸, ۱۳, ۱۸, ...

$n=۱ \to a_۱ = ۳ + ۵(۱-۱) = ۳ + ۰ = ۳$ $a_۲ = ۳ + ۵(۲-۱) = ۳ + ۵(۱) = ۸$

$n=۳ \to a_۳ = ۳ + ۵(۳-۱) = ۳ + ۵(۲) = ۱۳$ $a_۴ = ۳ + ۵(۴-۱) = ۳ + ۱۵ = ۱۸$

$S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n-۱)d] = \frac{۴۰}{۲}[۲(۳) + (۴۰-۱)(۵)] = ۲۰(۶ + ۱۹۵) = ۲۰ \times ۲۰۱ = ۴۰۲۰$

۲

$-۸, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۲۲$ $t_n = a + (n-۱)d$

$n = ۷$

$a = -۸$ $۲۲ = -۸ + (۷-۱)d \to ۳۰ = ۶d \to d = ۵$

$t_n = ۲۲$

$d = ?$ $-۸, -۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲$

۳

$\underbrace{۳x-۵}_{a}, \underbrace{x+\frac{۱}{۲}}_{b}, \underbrace{x+۷}_{c}$ $۲b = a + c \to ۲(x+\frac{۱}{۲}) = ۴x + ۲$

$۲x + ۱ = ۴x + ۲ \to -۲x = ۱ \to x = -\frac{۱}{۲}$

۴ نام دنباله هندسی زیرا $q = \frac{۳}{۲} \div ۲ = \frac{۳}{۴} \div \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$ ۳, $\frac{۳}{۲}$, $\frac{۳}{۴}$, ...

الف) $t_n = a q^{n-۱} = ۳ \times (\frac{۱}{۲})^{۱۰-۱} = ۳ \times (\frac{۱}{۲})^{۹} = ۳ \times \frac{۱}{۵۱۲} = \frac{۳}{۵۱۲}$

ب) $t_n = a q^{n-۱} \to \frac{۳}{۱۲۸} = ۳(\frac{۱}{۲})^{n-۱} \to \frac{۱}{۱۲۸} = (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = (\frac{۱}{۲})^{۷}$

جمله هشتم دنباله برابر $\frac{۳}{۱۲۸}$ می باشد $n-۱ = ۷ \to n = ۸$

۵ $۱, ۳, ۵, ...$ $t_{۳۰} = a + ۲۹d = ۱ + ۲۹(۲) = ۱ + ۵۸ = ۵۹$

$S_n = \frac{n}{۲}[a + t_n] \Rightarrow S_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}[۱ + ۵۹] = ۱۵ \times ۶۰ = ۹۰۰$

روش تستی $۱ + ۳ + ۵ + ... + (۲n-۱) = n^۲$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$(m^4 \cdot n^3)^2 \cdot (m^7 \cdot m^4)^{\frac{1}{2}} = m^8 n^6 \cdot m^{11} \cdot n^9 = m^{19} n^{15} = (mn)^{15}$ ۴

$(\frac{3}{2})^4 \div (1\frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{2})^4 \div (\frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$ ۶

$(\frac{1}{2})^{2x-1} = \frac{1}{128} \rightarrow (\frac{1}{2})^{2x-1} = (\frac{1}{2})^7 \rightarrow 2x-1=7 \rightarrow 2x=8$ ۷

$x=4$

۵ الف) $\sqrt[7]{a^3} = a^{\frac{3}{7}}$ ب) $2 = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$ ج) $\sqrt[3]{2^5 \times 3^2} = 2^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

۹ $y = 2^x$ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ دامنه اعداد حقیقی

برد تابع $R = (0, +\infty)$

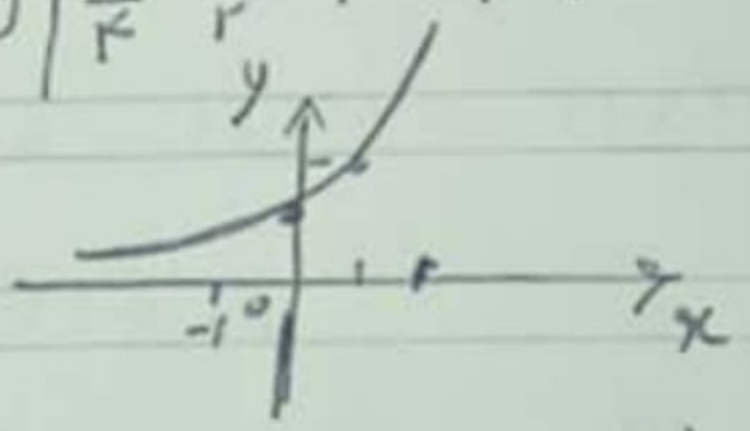
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$2^0 = 1$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ فرمول

محور x ها را قطع نمی‌کند



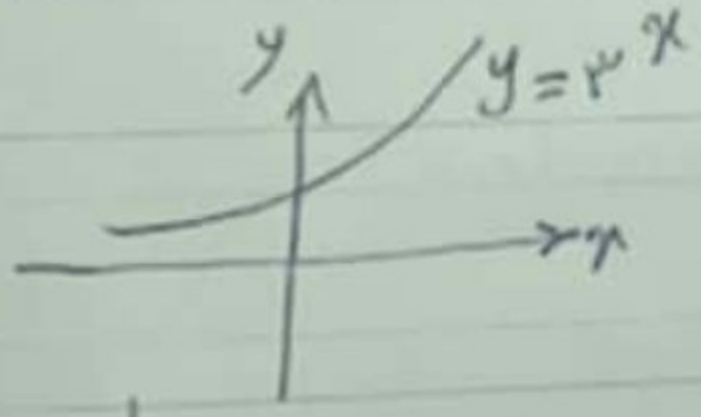
۱۰ هر دو محور عرض‌ها نقطه‌ی $(0,1)$ قطع می‌کنند

$y = 3^x$ $D = \mathbb{R}$ $R = (0, +\infty)$ شباهت‌ها

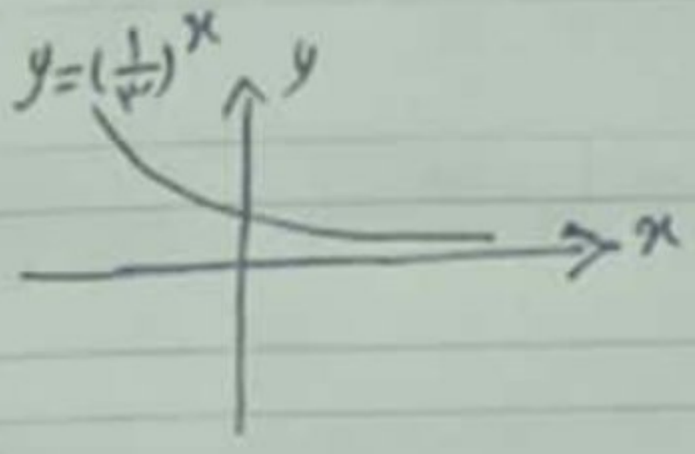
$y = (\frac{1}{3})^x$ $D = \mathbb{R}$ $R = (0, +\infty)$

دامنه و برد یکسان دارند ولی تفاوت‌ها: تابع $y = 3^x$ تابع صعودی یا افزایشی

تابع $y = (\frac{1}{3})^x$ تابع نزولی یا کاهشی است برای $y = 3^x$ $a > 1$ می‌باشد



ولی برای $y = (\frac{1}{3})^x$ است $0 < a < 1$



موفق باشید: محمد نقیبیان

۱۴۰۰/۱۰/۲۴

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner