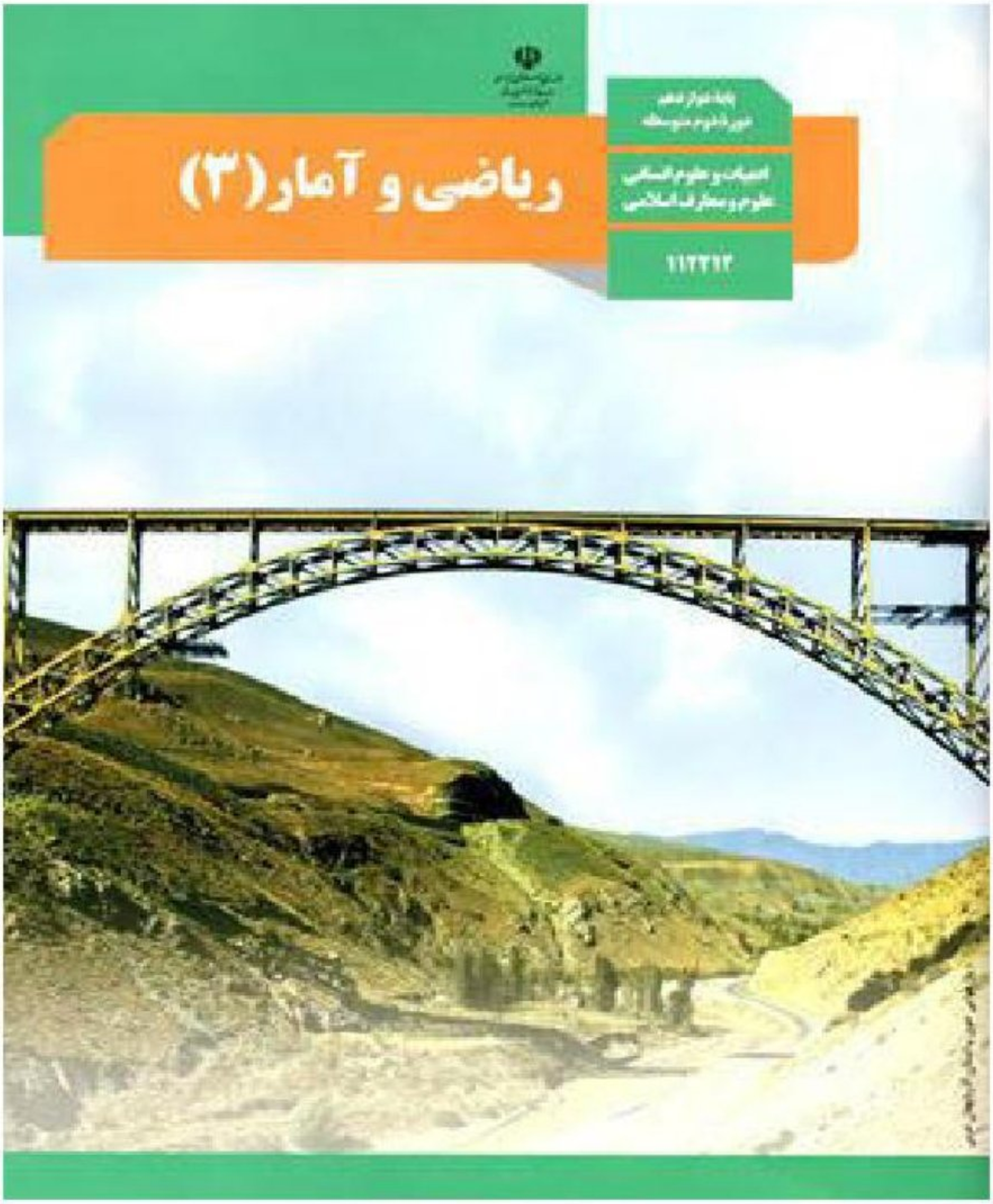
«یک لحظه جدا نیستم از یاد تو هر دم   در خانه‌ی دل نقش هویدای تو بینم»

جزوه ریاضی و آمار (۳)
دوازدهم انسانی

تنظیم و نگارش: زهره صفار
دبیر ریاضی شهرستان گرگان



به نام او که دانا و تواناست

سخنی با شما

با استعانت از الطاف الهی، این جزوه برای استفاده دانش‌آموزان عزیزی تهیه و تدوین شده است که به هر دلیلی نتوانسته‌اند در کلاس‌های حضوری و غیر حضوری از محضر اساتید و همکاران بزرگوار رشته ریاضی استفاده کنند.

در تدوین این جزوه سعی بر آن بوده که مطالب بر پایه مباحث کتاب درسی پایه دوازدهم رشته انسانی باشد و در جمع‌آوری مثالها از کتاب درسی ریاضی و آمار (۳)، کتب کمک درسی و برخی از جزوات همکاران نیز استفاده شده است.

در بخشی از جزوه به حل سؤالهای امتحانات نهایی سال‌های گذشته پرداخته شده تا دانش‌آموزان عزیز با چگونگی طراحی سؤال‌ها و پاسخ آنها بیشتر آشنا شوند.

در صورت وجود هرگونه اشتباه از شما پوزش می‌طلبم و امیدوارم بنده را از نظرات ارزشمند خود بهره‌مند فرمایید تا در اصلاح و تکمیل این جزوه استفاده نمایم.

بارالها بندگی کردن به درگاهت کمال سروری است

مور در ملک سلیمانیم این ما را بس است

با تشکر و احترام

زهره صفار

سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

فهرست مطالب

فصل اول: آمار و احتمال

فصل دوم : الگوهای خطی

فصل سوم : الگوهای غیر خطی

درس (۱): شمارش

مقدمه:

مسائل زیادی وجود دارند که در آنها دانستن تعداد حالات موجود و چگونگی قرار گرفتن اشیاء، اعداد یا افراد، می‌تواند در برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری نقش مهمی ایفا کند. برای حل چنین مسائلی شمردن تمام حالات مورد نظر همیشه امکان‌پذیر نیست، بنابراین با استفاده از روش‌های محاسباتی و روابط ریاضی شمارش این حالات آسانتر خواهد شد. استفاده از دو اصل جمع و ضرب که به اصول شمارش معروفند در این زمینه کارساز است.

اصل جمع:

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، طوریکه این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (این اصل را می‌توان به بیش از دو عمل نیز تعمیم داد)

مثال ۱: اگر برای انتخاب رئیس شورای دانش‌آموزی از بین ۸ دانش آموز سال یازدهم یا ۵ دانش‌آموز سال دهم، قرار باشد یک نفر برگزیده شود، تعداد حالتهای این انتخاب را بیابید.

پاسخ: چون فقط مجاز به انتخاب یک نفر هستیم (یا دانش‌آموز یازدهم یا دهم) پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

$$۸+۵=۱۳$$ تعداد راههای انتخاب

مثال ۲: برای ورود به یک استادیوم ورزشی در ضلع شرقی ۲ در، ضلع جنوبی ۳ در و در ضلع شمالی ۱ در وجود دارد. هر تماشاگر برای ورود به استادیوم به چند طریق می‌توانند وارد شود؟

پاسخ: چون برای ورود به استادیوم فقط می‌توان از یکی از درها وارد شد بنابراین از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

$$۲+۳+۱=۶$$

مثال ۳: از بین ۵ دانشجوی اقتصاد، ۶ علوم اجتماعی و ۴ روانشناسی قرار است یک نفر برای اجرای همایشی علمی انتخاب شود. به چند طریق می‌توان مجری انتخاب کرد؟

پاسخ:
$$۵+۶+۴=۱۲$$

مثال ۴: شخصی برای رفتن به مسافرت می‌تواند از طریق دو نوع اتوبوس یا دونوع قطار یا یک پرواز با هواپیما به مقصد برسد. او از چند طریق می‌تواند به مقصد برسد؟

پاسخ:
$$۲+۲=۱=۵$$

مثال ۵: دانش آموزی ۳ خودکار به رنگهای آبی، مشکی و قرمز و دو مداد به رنگهای مشکی و قرمز و یک روانویس آبی دارد. برای نوشتن چند انتخاب می‌تواند داشته باشد؟

پاسخ:
$$۳+۲=۱=۶$$

اصل ضرب:

اگر عملی طی دو مرحله انجام پذیر باشد، طوری‌که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش قابل انجام باشد، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق قابل انجام است. (اصل ضرب را می‌توان به بیش از دو عمل نیز تعمیم داد)

مثال ۶: سارا سه مانتو به رنگهای مشکی، سفید و سبز و دو شلوار به رنگهای مشکی و سفید دارد. برای پوشیدن یک دست لباس کامل چند انتخاب دارد؟

پاسخ: چون برای پوشیدن یک دست لباس کامل لازم است به طور همزمان مانتو و شلوار را پوشید پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. بنابراین ۶ مدل انتخاب وجود دارد. $۳ \times ۲ = ۶$

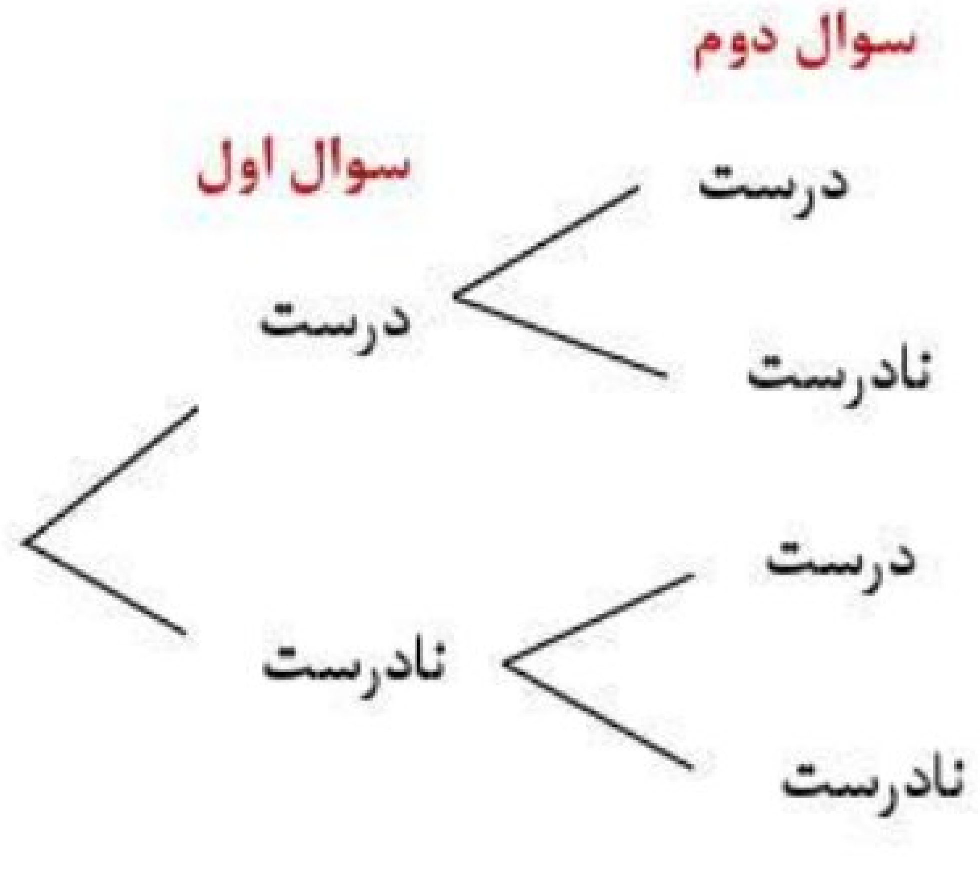
مثال ۷: در یک مهمانی شام، دو نوع پلو، دو نوع خورشت، دو نوع سالاد و سه نوع نوشیدنی موجود است. به چند طریق می‌توان از بین این موارد یک شام کامل خورد؟

پاسخ: $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$

مثال ۸: یک آزمون درست و نادرست با ۲ سوال موجود است. برای پاسخگویی به سوالات این آزمون چند راه وجود دارد، در صورتی که قرار باشد به هر ۲ سوال پاسخ داده شود. نمودار درختی مربوطه را رسم کنید.

پاسخ: در این آزمون سوال اول ۲ انتخاب و سوال دوم۲ انتخاب دارد.(درست، نادرست)، چون قرار است تمام سوالات مورد بررسی قرار گیرد پس از اصل ضرب استفاده می کنیم. پس۴ حالت برای پاسخگویی به این آزمون وجود دارد. $۲ \times ۲ = ۴$

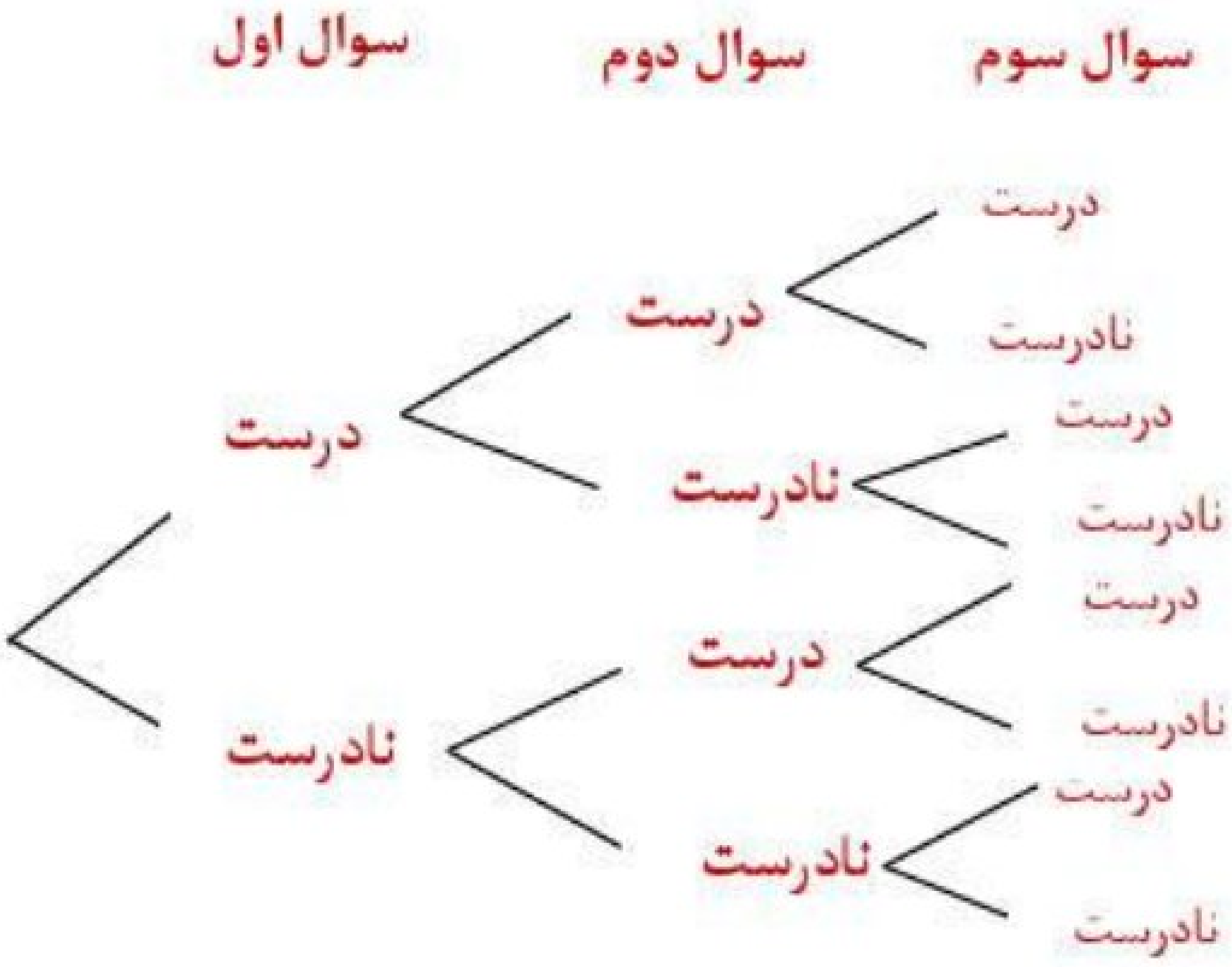
در نمودار درختی اگر تعداد سرشاخه‌های انتهایی را بشمارید با تعداد حالتهای انتخاب برابر است.



مثال ۹: یک آزمون درست و نادرست با ۳ سوال موجود است. برای پاسخگویی به سوالات این آزمون چند راه وجود دارد، در صورتی که قرار باشد به هر ۳ سوال پاسخ داده شود.

پاسخ: در این آزمون سوال اول ۲ انتخاب، سوال دوم۲ انتخاب و سوال سوم نیز ۲ انتخاب دارد.(درست یا نادرست)، چون قرار است تمام سوالات مورد بررسی قرار گیرد پس از اصل ضرب استفاده می کنیم. $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

پس ۸ حالت برای پاسخگویی به این آزمون وجود دارد. در واقع تعداد پاسخ‌ها را به اندازه‌ی تعداد سوالات در هم ضرب می‌کنیم. ۲ را ۳ بار ضرب کردیم. برای سهولت در محاسبه از توان استفاده می‌کنیم. $۲^۳ = ۸$



تذکر: برای تعیین تعداد حالات پاسخگویی به سوالات چند گزینه‌ای می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\text{تعداد حالات} = \text{تعداد گزینه‌ها}^{\text{تعداد سوالات}}$$

مثال ۱۰: در یک آزمون تستی که هر سوال دارای چهار گزینه است، ۱۰سوال مطرح شده است.

الف) به شرط آنکه تمام سوالات پاسخ داده شود، چند راه برای پاسخ‌گویی وجود دارد؟

پاسخ: تعداد راههای پاسخگویی برابرا است با $۴^{۱۰}$

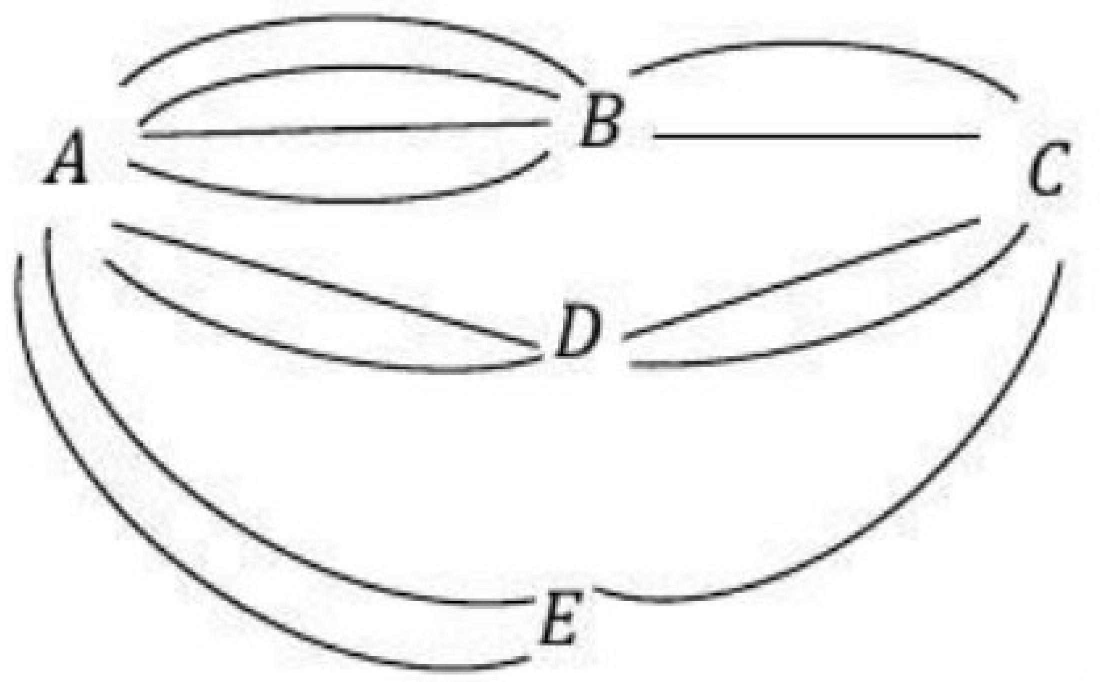
ب) اگر داوطلب مجاز باشد به سوالات پاسخ ندهد،چطور؟

پاسخ: چون پاسخ ندادن به سوالات نیز مجاز است، پس برای هر سوال ۵ حالت انتخاب وجود دارد به صورت زیر:

الف ☐ ب ☐ ج ☐ د ☐ بدون پاسخ ☐

بنابراین $۵^{۱۰}$ راه برای انتخاب وجود دارد.

مثال ۱۱: بین پنج شهر E, D, C, B, A مطابق شکل زیر راه‌های مختلفی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند، به چند طریق می‌توان:



الف) از شهر A به شهر B سفر کرد؟

پاسخ: به ۴ طریق (از ۴ راه)

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

پاسخ: چون دو انتخاب در دو مرحله باید انجام شود پس اصل ضرب است.

۴ راه از A به B و ۲ راه از B به C پس جواب برابر است با $۴ \times ۲ = ۸$

ج) از شهر A به شهر C و از طریق شهر D سفر کرد؟

پاسخ: مشابه قسمت قبل $۲ \times ۲ = ۴$

د) از شهر A به شهر C و از طریق شهر E سفر کرد؟ **پاسخ:** $۲ \times ۱ = ۲$

ه) از شهر A به شهر C سفرکرد؟

پاسخ: چون گذشتن از شهر خاصی را ذکر نکرده، همه‌ی حالتهای قبل را باید با هم جمع کنیم. یعنی می‌توان از طریق B یا D یا E به شهر C رسید.

$$(۴ \times ۲) + (۲ \times ۲) + (۲ \times ۱) = ۸ + ۴ + ۲ = ۱۴$$

و) از شهر A به شهر C مسافرت کرد بدون آنکه از شهر D گذشت؟

پاسخ: فقط دو حالت گذشتن از B و E را در نظر می‌گیریم. $(۴ \times ۲) + (۲ \times ۱) = ۸ + ۲ = ۱۰$

فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال داریم:

$$
\begin{gathered}
۱! = ۱ \\
۲! = ۲ \times ۱ \\
۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ \\
۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \\
۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \\
\vdots \\
n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times (n-۳) \times (n-۴) \times \ldots \times ۱
\end{gathered}
$$

قرارداد: $۰! = ۱$

توصیه: برای سرعت عمل بیشتر بهتر است اعداد زیر را به خاطر بسپاریم:

$$۰! = ۱ \qquad ۱! = ۱ \qquad ۲! = ۲ \qquad ۳! = ۶ \qquad ۴! = ۲۴ \qquad ۵! = ۱۲۰ \qquad ۶! = ۷۲۰$$

مثال ۱۲: حاصل عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) $۲! + ۴! = (۲ \times ۱) + (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۲ + ۲۴ = ۲۶۰$

ب) $۶ + ۵! - ۳! = ۶ + ۱۲۰ - ۶ = ۱۲۰$

ج) $\frac{۷!}{۴!} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۴\times۳\times۲\times۱} = ۷ \times ۶ \times ۵ = ۲۱۰$

د) $\frac{(۳!)!}{۵!} = \frac{۶!}{۵!} = \frac{۶\times۵!}{۵!} = ۶$

مثال ۱۳: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. (با ذکر دلیل)

الف) $۳! = \frac{۶!}{۲!}$ نادرست زیرا: $\frac{۶!}{۲!} = \frac{۷۲۰}{۲} = ۳۶۰$ اما $۶ = ۳!$ واضح است که $۳۶۰ \neq ۶$

ب) $۵! = ۳! + ۲!$ نادرست زیرا: $۳! + ۲! = ۶ + ۲ = ۸$ اما $۵! = ۱۲۰$ واضح است که $۱۲۰ \neq ۸$

ج) $۶! = ۶ \times ۵!$ درست زیرا: $۵! \times ۶ = ۱۲۰ \times ۶ = ۷۲۰$ و $۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$

د) $۸! = ۸ \times ۷ \times ۶!$ درست زیرا: $۸ \times ۷ \times ۶! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ که با $۸!$ برابر است.

■**تذکر:** دقت کنید در محاسبه ی فاکتوریل‌ها اعمال محاسباتی به صورت مستقیم روی اعداد با فاکتوریل انجام نمی‌شود به عنوان مثال نمی‌توان $۲! + ۴!$ را با $۶!$ برابر دانست، چون حاصل برابر ندارند.

همچنین برای سهولت در محاسبه در مباحث بعدی گاهی لازم است فاکتوریلها را تا جایی که لازم است باز کنیم. مانند:

$$۶! = ۶ \times ۵! \qquad ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴! \qquad ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!$$

پس با توجه به نیازی که در مسئله وجود دارد، عمل می‌کنیم.

مثال ۱۴: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) $۸! \times ۷ = ۸!$ نادرست

ب) $n! \times (n + ۱) = (n + ۱)!$ درست

ج) $\frac{m\times(m-۱)\times(m-۲)\times(m-۳)!}{(m-۲)!} = m \times (m - ۱)$

درست زیرا: $\frac{m\times(m-۱)\times(m-۲)\times(m-۳)!}{(m-۲)!} = \frac{m\times(m-۱)\times(m-۲)!}{(m-۲)!} = m \times (m - ۱)$

د) $\frac{(k-۱)!}{k!} = \frac{۱}{k}$

درست زیرا اگر مخرج کسر را باز کنیم داریم: $\frac{(k-۱)!}{k!} = \frac{(k-۱)!}{k\times(k-۱)!} = \frac{۱}{k}$

جایگشت:

سه حرف a ,b و c را در نظر بگیرید، این سه حرف می‌توانند به حالتهای مختلفی در کنار یکدیگر قرار گیرند، به عنوان مثال

$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$

با کمی دقت می‌توان دریافت این ۳ حرف به ۶ حالت مختلف می‌توانند کنار هم قرار گیرند. به هر کدام از این حالتها یک جایگشت ۳ تایی از این ۳ حرف می‌گویند.

پس به طور کلی به هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز یک جایگشت n تایی از آن n شیء گویند. تعداد این جایگشت‌ها برابر با $n!$ است.

$$P_n = n!$$

در مثال قبل که ۳ حرف (شیء متمایز) در اختیار داشتیم به $۶ = ۳!$ حالت اشیاء کنار هم قرار گرفتند. پس $P_۳ = ۶$

تذکر: در مسائل مربوط به جایگشت تمام اشیائی که در اختیار داریم می‌توانند با جابجایی همه جا قرار گیرند و حالتهای مختلفی را بسازند. ترتیب قرار گرفتن اشیاء در کنار هم مهم است.

مثال ۱۵: با حروف کلمه‌ی " دانش" چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت؟ (با معنا بودن کلمات لازم نیست)

پاسخ: دانش از ۴ حرف مختلف تشکیل شده است (د، ا، ن، ش) که همگی قابلیت انتخاب و جابجایی با هم دارند. پس جایگشت ۴ تایی حروف را باید بدست آوریم و تعداد کلماتی که می‌توان ساخت برابر است با:

$$P_۴ = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

مثال ۱۶: فرض کنید ۵ کتاب مختلف در اختیار شما قرار گرفته باشد، تعداد کل حالات قرار گرفتن این کتابها را در کنار هم تعیین کنید.

پاسخ: $P_۵ = ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

مثال ۱۷: با حروف کلمه‌ی" مهستان" چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت؟

پاسخ: مهستان از ۶ حرف مختلف تشکیل شده است که همگی قابلیت انتخاب و جابجایی با هم دارند. پس جایگشت ۶ تایی حروف است و تعداد کلماتی که می‌توان ساخت برابر است با:

$$P_۶ = ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$$

مثال ۱۸: با ارقام ۹ , ۱ , ۸ , ۴ , ۲ چند عدد ۵ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ: با پنج رقم داده شده اعداد پنج رقمی باید بسازیم پس جایگشت است و داریم:

$$P_۵ = ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

مثال ۱۹: با حروف کلمه‌ی " دانشجو" و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ: $P_۶ = ۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ: برای نوشتن کلمه‌ی ۴حرفی به ۴ جای خالی نیاز داریم، پس $\underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۳۶۰$

ج) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که با حرف "ج" شروع و به حرف "د" ختم شود؟

پاسخ: برای اولین و آخرین حرف فقط یک انتخاب داریم. پس ۲ حرف حذف شده و ۴ حرف باقی می‌ماند، با هر بار جاگذاری یک حرف کم می‌شود. ۲۴ کلمه‌ی مختلف می‌توان ساخت.

د ج

$\underline{۱}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۲۴$

د) چند کلمه‌ی۳ حرفی می‌توان نوشت که حرف "ش" در وسط آن باشد.

پاسخ: ابتدا حرف"ش" را در وسط قرار می‌دهیم پس یکی از تعداد حروف کم می‌شود و ۵ حرف باقی می‌ماند، در مرحله‌ی بعد یکی دیگر از حروف کم می‌شود و ۴ حرف می‌ماند. $\underline{۵}\times\underline{۱}\times\underline{۴}=۲۰$

ش

مثال ۲۰: ۳کتاب روانشناسی و ۴ کتاب جغرافیا در اختیار داریم.

الف) به چند طریق می‌توان تمام کتابها را در قفسه کنار هم چید؟

پاسخ: تعداد کل کتابها ۷ تاست پس تعداد انتخابها برابر است با $P_{۷}=۷!=۵۰۴۰$

ب) چند راه برای چیدن کتابها وجود دارد که کتابهای هر رشته همیشه کنار هم باشند؟

پاسخ: کتابهای روانشناسی به !۳ حالت و کتابهای جغرافیا به !۴ حالت دیگر قابل جابجایی‌اند، این ۲ دسته کتاب می‌توانند با هم نیز جابجا شوند، پس تعداد حالتها برابر است با $۳!\times۴!\times۲=۶\times۲۴\times۲=۲۸۸$

مثال ۲۱: با ارقام ۲ ،۳، ۵ ، ۶ ،۸ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که:

الف) یکان همگی ۲ باشد.

پاسخ: اولین رقم از سمت راست یکان عدد است. برای یکان فقط یک انتخاب داریم. پس از این انتخاب یکی از تعداد اعداد کم می‌شود و ۴ عدد باقی می‌ماند.

یکان۲

تعداد انتخابها $\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۱}=۱۲$

ب) عدد زوج باشد.

پاسخ: برای ساختن عدد زوج باید یکان را عددی زوج انتخاب کرد. در بین اعداد سه عدد زوج داریم (۲، ۶، ۸) پس یکان ۳ انتخاب دارد اما در نهایت یکی از این اعداد در یکان قرار می‌گیرد.

۲ یا ۶ یا ۸

تعداد انتخابها $\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۳} = ۳۶$

ج) عدد مورد نظر فرد باشد.

پاسخ: برای ساختن عدد فرد باید یکان را عددی فرد انتخاب کرد. در بین اعداد دو عدد فرد داریم (۳، ۵) پس یکان ۲ انتخاب دارد.

تعداد انتخابها $\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} = ۲۴$

۳ یا ۵

د) عدد مورد نظر مضرب ۵ باشد.

پاسخ: برای ساختن عددی که مضرب ۵ باشد باید یکان را صفر یا ۵ انتخاب کرد. در بین اعداد صفر که وجود ندارد پس یکان فقط می‌تواند ۵ باشد.

تعداد انتخابها $\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۱} = ۱۲$

فقط ۵

مثال ۲۲: با ارقام ۰ ، ۱ ،۲، ۵ ، ۴ ، ۷ ، ۹ و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

پاسخ: چون بین اعداد صفر وجود دارد باید دقت بیشتری داشته باشید زیرا صفر نمی‌تواند در اولین جایگاه از سمت چپ قرار گیرد. اگر صفر در این جایگاه قرار گیرد عدد چهار رقمی به سه رقمی تبدیل می‌شود. پس ۶ رقم دیگر می‌توانند انتخاب شوند. اما در انتخاب بعدی می‌توانیم صفر را انتخاب کنیم و یکی از اعداد دیگر را که انتخاب کردیم حذف می‌کنیم.

تعداد انتخابها $\underline{۶} \times \underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} = ۷۲۰$

غیر از صفر

ب) چند عدد چهار رقمی فرد می‌توان نوشت؟

پاسخ: یکان باید فرد باشد و اولین عدد از سمت چپ غیر صفر باشد .

$\underline{۵} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۴} = ۴۰۰$

غیر از صفر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۹

ج) چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت؟

پاسخ: روش اول:　　تعداد ۴ رقمی‌های فرد _ تعداد کل ۴ رقمی‌ها = تعداد ۴ رقمی‌های زوج

۳۲۰ = ۴۰۰ − ۷۲۰ = تعداد ۴ رقمی‌های زوج

روش دوم: (محاسبه‌ی مستقیم)

پاسخ: می‌دانیم عددی زوج است که یکانش زوج باشد. در بین اعداد داده شده ۰، ۲و ۴ زوجند. اما برای بدست آوردن جواب باید ۲ حالت زیر را در نظر بگیریم و سپس جوابها را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر یکان صفر باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها　　۶ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۲۰

صفر

حالت دوم: اگر یکان ۲ یا ۴ باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها　　۵ × ۵ × ۴ × ۲ = ۲۰۰

غیر از صفر　　۲ یا ۴

پس در حالت کلی ۳۲۰ = ۲۰۰ + ۱۲۰ عدد زوج چهار رقمی می‌توان نوشت.

د) چند عدد چهار رقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟

پاسخ: می‌دانیم برای ساختن عددی که مضرب ۵ باشد باید یکان را صفر یا ۵ انتخاب کرد. پس۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم و سپس جوابها را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر یکان صفر باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها　　۶ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۲۰

صفر

حالت دوم: اگر یکان ۵ باشد در این حالت داریم:

تعداد انتخابها　　۵ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۰۰

غیر از صفر　　۵

پس در حالت کلی ۲۲۰ = ۱۰۰ + ۱۲۰ عدد چهار رقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت.

مثال ۲۳: با ارقام ۰ ، ۱ ،۲، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۷ و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد پنج رقمی بزرگتر از ۵۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

پاسخ: با توجه به صورت سوال عددی بزرگتر از پنجاه هزار است که اولین رقم سمت چپ آن (دهگان هزار آن) بزرگتر یا مساوی ۵ باشد. در بین اعداد بالا این جایگاه می‌تواند ۵ یا ۷ باشد.

$$\underset{\uparrow\ \text{۵ یا ۷}}{\underline{۲}} \times \underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۷۲۰$$ تعداد انتخابها

ب) چند عدد پنج رقمی کوچکتر از ۴۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

پاسخ: با توجه به صورت سوال عددی کوچکتر از چهل هزار است که اولین رقم سمت چپ آن (دهگان هزار آن) کوچکتر از عدد ۴ باشد. در بین اعداد بالا این جایگاه می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ باشد.

$$\underset{\uparrow\ \text{۱ یا۲یا۳}}{\underline{۳}} \times \underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۱۰۸۰$$ تعداد انتخابها

مثال ۲۴: با اعضای مجموعه {۰,۱,۳,۵,۶,۸,۹} چند عدد ۳ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

الف) ۶۸ ب) ۱۲۰ ج) ۱۰۰ د) ۹۰

پاسخ: گزینه (ج) زیرا در جایگاه یکان یکی از اعداد ۹ و۵و۳و۱می‌توانند قرار گیرند پس یکان ۴ انتخاب دارد. از طرفی دقت کنید عدد صفر نمی‌تواند در جایگاه صدگان بنشیند.

$$\underset{\uparrow\ \text{صفر نباشد}}{\underline{۵}} \times \underline{۵} \times \underset{\uparrow\ \text{۱ یا ۵ یا ۳ یا ۹}}{\underline{۴}} = ۱۰۰$$

مثال ۲۵: با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸چند عدد ۷ رقمی می‌توان ساخت طوریکه رقم‌های زوج و فرد به صورت یک درمیان قرار گیرند؟

الف) ۲۱۶ ب) ۴۱۸ ج) ۷۲ د) ۱۴۴

پاسخ: گزینه (د)

$$\underset{\text{زوج}}{\underline{۴}} \times \underset{\text{فرد}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{زوج}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{فرد}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{زوج}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{فرد}}{\underline{۱}} \times \underset{\text{زوج}}{\underline{۱}} = ۱۴۴$$

مثال ۲۶: به چند طریق می‌توان ۳ گل نرگس و ۳ گل لاله را می‌توان یک درمیان کنار هم چید؟

الف) ۳۶　　ب) ۱۴۴　　ج) ۷۲　　د) ۹

پاسخ: گزینه (ج)　حالت اول:

$$\underset{\text{نرگس}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{لاله}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{نرگس}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{لاله}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{نرگس}}{\underline{۱}} \times \underset{\text{لاله}}{\underline{۱}} = ۳۶$$

حالت دوم: با جابجا کردن جای گلهای نرگس و لاله ۳۶ حالت دیگر نیز به‌دست می‌آید.

$$\underset{\text{لاله}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{نرگس}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{لاله}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{نرگس}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{لاله}}{\underline{۱}} \times \underset{\text{نرگس}}{\underline{۱}} = ۳۶$$

$$۳۶ + ۳۶ = ۷۲$$

علاوه بر راه حلهای گفته شده می‌توان از رابطه‌های زیر نیز استفاده کرد.

■ برای تعیین تعداد حالات قرار گرفتن یک در میان n شیء متمایز و $n-۱$ شیء متمایز دیگر از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$n!\,(n-۱)!$$

■ برای تعیین تعداد حالات قرار گرفتن یک در میان n شیء متمایز و n شیء متمایز دیگر از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$۲ \times n! \times n!$$

تبدیل r شیء از بین n شیء: (جایگشت r شیء از بین n شیء)

تعداد انتخابهای r شیء از بین n شیء متمایز (که جابجایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نمایش می‌دهند و برای محاسبه آن از رابطه زیر استفاده می‌شود: $(n \geq r)$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۲۷: در یک شرکت خصوصی ۸ نفر برای استخدام داوطلب شده‌اند. از بین این افراد به چند طریق می‌توان ۱ منشی، ۱ حسابدار و ۱ مسئول روابط عمومی انتخاب نمود، طوریکه هر نفر حداکثر یک شغل داشته باشد.

پاسخ: قرار است از بین ۸ نفر، ۳ نفر انتخاب کنیم که هر یک سمت و شغل خاصی داشته باشند، در این انتخاب ترتیب اهمیت دارد زیرا با عوض شدن شغل افراد حالات جدیدی بوجود می‌آید پس داریم:

$$P(۸,۳) = \frac{۸!}{(۸-۳)!} = \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۳۳۶$$ تعداد راههای انتخاب

مثال ۲۸: در یک پارکینگ با ۱۰ جای خالی که در کنار یکدیگر قرار دارند ۴ خودروی مختلف به چند طریق می‌توانند پارک کنند؟

پاسخ: قرار گرفتن خودروها در پارکینگ دارای ترتیب است یعنی اگر خودروها جای پارک خود را عوض کنند حالت جدیدی در مدل پارک آنها بوجود می‌آید پس داریم:

$$P(۱۰,۴) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!} = \frac{۱۰!}{۶!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!} = ۵۰۴۰$$ تعداد راههای انتخاب

مثال ۲۹: به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد و در قفسه چید؟

پاسخ: $$P(۹,۴) = \frac{۹!}{(۹-۴)!} = \frac{۹!}{۵!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۳۰۲۴$$ تعداد راههای انتخاب

مثال ۳۰: از بین ۱۵ دانش‌آموز ۱۰ نفر می‌خواهند در یک ردیف صف تشکیل دهند، این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

پاسخ: با جابجا شدن دانش آموزان حالت جدیدی در شکل صف بوجود می‌آید پس تبدیل است.

$$P(۱۵,۱۰) = \frac{۱۵!}{(۱۵-۱۰)!} = \frac{۱۵!}{۵!}$$ تعداد راههای انتخاب

مثال ۳۱: به چند طریق می‌توان از بین ۷ دونده‌ی یک مسابقه، نفرات اول تا سوم را مشخص نمود طوری‌که هیچ دو نفری هم زمان به خط پایان نرسند؟

الف) ۲۲۲ ب) ۵۱۲ ج) ۳۳۶ د) ۲۱۰

پاسخ: در تعیین نفرات برتر یا مشخص کردن رتبه‌ی نفرات در مسابقات ترتیب اهمیت دارد، پس داریم:

$$P(۷,۳) = \frac{۷!}{(۷-۳)!} = \frac{۷!}{۴!} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = ۲۱۰$$ تعداد راههای انتخاب

گزینه (د) درست است.

مثال ۳۲: حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $P(۱۲,۸) + P(۹,۶) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۸)!} + \frac{۹!}{(۹-۶)!} = \frac{۱۲!}{۴!} + \frac{۹!}{۳!} = \frac{۱۲!}{۲۴} + \frac{۹!}{۶}$

ب) $P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{۰!} = \frac{n!}{۱} = n!$

ج) $P(n,۱) = \frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n\times(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$

مثال ۳۳: درستی رابطه $P(n,۰) = ۱$ را نشان دهید.

پاسخ: $$P(n,۰) = \frac{n!}{(n-۰)!} = \frac{n!}{n!} = ۱$$

ترکیب r شیء از بین n شیء:

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز که جابجایی اشیاء انتخاب شده حالت جدیدی را تولید نکرده و ترتیب اهمیت نداشته باشد را با نماد $C(n,r)$ نمایش می‌دهند. برای محاسبه‌ی تعداد ترکیب‌های r تایی از بین n شیء متمایز از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

■**تذکر:** به جای نماد $C\,(n,r)$ از نماد $\binom{n}{r}$ نیز استفاده می‌شود.

مثال ۳۴: به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر یک تیم ۳ نفره برای کوهنوردی انتخاب کرد؟

پاسخ: چون انتخاب افراد گروه کوهنوردی دارای ترتیب خاصی نیست و جابجایی آنها گروه جدیدی را نمی‌سازد پس از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$C(۱۲,۳)=\frac{۱۲!}{۳!\,(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۳!\ \times ۹!}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹!}{۳!\times ۹!}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{۶}=۲۲۰$$

مثال ۳۵: مجموعه ۷ عضوی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,,۶,۷\}$ چند زیرمجموعه‌ی چهارعضوی دارد؟

پاسخ: چون جابجا شدن اعضا در مجموعه‌ها حالت جدیدی را بوجود نمی‌آورد و مهم نیست پس از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$C(۷,۴)=\frac{۷!}{۴!\,(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۴!\ \times ۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۴!\times ۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵}{۶}=۳۵$$

۳۵ زیر مجموعه ۴ عضوی دارد.

مثال ۳۶: از یک کیسه که شامل ۲ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است به چند طریق می‌توان ۲ مهره خارج کرد؟

پاسخ: خارج کردن مهره ترتیب خاصی ندارد پس ترکیب است، ترکیب ۲ مهره از بین ۶ مهره

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!\times ۴!}=\frac{۶\times ۵\times ۴!}{۲\times ۴!}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$ تعداد راههای انتخاب

مثال ۳۷: حاصل $C(n,n)$ را بیابید.

پاسخ: $C(n,n)=\frac{n!}{n!\times(n-n)!}=\frac{n!}{n!\times ۰!}=\frac{n!}{n!\times ۱}=۱$

مثال ۳۸: حاصل را بیابید.

الف) $C(n,۰)=$

ب) $C(۵,۰)+C(۷,۱)-P(۴,۳)=$

پاسخ:

الف) $C(n,۰)=\frac{n!}{۰!\times(n-۰)!}=\frac{n!}{۱\times n!}=۱$

ب) $C(۵,۰)+C(۷,۱)-P(۴,۳)=\frac{۵!}{۰!\times(۵-۰)!}+\frac{۷!}{۱!\times ۶!}-\frac{۴!}{(۴-۳)!}=\frac{۵!}{۵!}+\frac{۷\times ۶!}{۶!}-\frac{۴!}{۱!}=۱+۷-۲۴=-۱۶$

مثال ۳۹: درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$C(n,n)=C(n,۰)$

پاسخ:

سمت چپ تساوی $C(n,n)=\frac{n!}{n!\times(n-n)!}=\frac{n!}{n!\times ۰!}=۱$

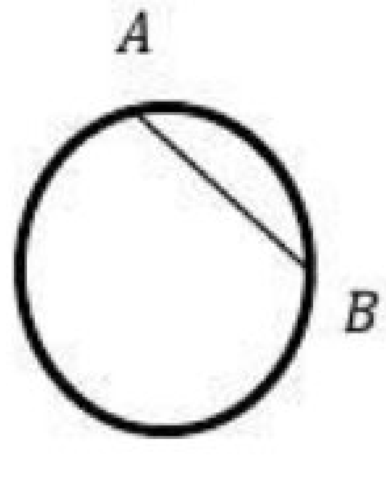
سمت راست تساوی $C(n,۰)=\frac{n!}{۰!\times(n-۰)!}=\frac{n!}{۱\times n!}=۱$

دو طرف تساوی با هم برابرند پس تساوی برقرار است.

مثال ۴۰: هفت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. با استفاده از این نقاط:

الف) چند وتر می‌توان رسم کرد؟

ب) چند مثلث می‌توان کشید؟



پاسخ: الف) از وصل کردن هر دو نقطه مانند A , B روی دایره به یکدیگر، یک وتر بدست می‌آید.

با جابجا کردن نقاط B , A وتر جدیدی بدست نمی‌آید و ترتیب مهم نیست پس داریم:

$$C(۷,۲)=\frac{۷!}{۲!\ (۷-۲)!}=\frac{۷!}{۲!\ \times ۵!}=\frac{۷\times ۶\times ۵!}{۲!\times ۵!}=\frac{۷\times ۶}{۲}=۲۱$$

ب) برای تشکیل مثلث باید ۳ نقطه انتخاب کنیم، ترتیب قرار گرفتن راسهای مثلث اهمیت ندارد پس:

$$C(۷,۳) = \frac{۷!}{۳!\,(۷-۳)!} = \frac{۷!}{۳! \times ۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۳! \times ۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} = ۳۵$$

■**تذکر:** اگر در قسمت (الف) به جای وتر، بردار گفته می‌شد باید از رابطه‌ی تبدیل استفاده می‌کردیم زیرا اگر ابتدا و انتهای بردار جابجا شود بردار جدیدی بوجود می‌آید.

تعداد انتخابها $P(۷,۲) = \frac{۷!}{(۷-۲)!} = \frac{۷!}{۵!} = \frac{۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۴۲$

مثال ۴۱: از یک کیسه که شامل ۲ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است به تصادف ۲ مهره خارج می‌کنیم. تعداد حالتهای انتخاب را در هر مورد تعیین کنید.

الف) رنگ مهره‌ها مهم نباشد.

پاسخ: چون رنگ مهره‌ها مهم نیست پس ۲ مهره را از بین ۶ مهره انتخاب می‌کنیم. هیچ ترتیبی در برداشتن و انتخاب مهره تاثیر ندارد بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم.

تعداد انتخابها $\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!\times(۶-۲)!} = \frac{۶!}{۲!\times۴!} = \frac{۶\times۵\times۴!}{۲\times۴!} = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵$

ب) یکی سفید و دیگری قرمز باشد.

پاسخ: قرار است ۲ مهره از بین ۶ مهره انتخاب کنیم که یک سفید از بین ۲ سفید و یک قرمز از بین ۴ قرمز برداشته شود. پس

$$\binom{۲}{۱} \times \binom{۴}{۱} = \frac{۲!}{۱! \times (۲-۱)!} \times \frac{۴!}{۱! \times (۴-۱)!} = \frac{۲}{۱ \times ۱} \times \frac{۴!}{۱ \times ۳!} = ۲ \times \frac{۲۴}{۶} = ۲ \times ۴ = ۸$$

ج) هر دو مهره قرمز باشد.

پاسخ: ۲ مهره قرمز از بین ۴ مهره قرمز انتخاب شود. پس

تعداد انتخابها $\binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\times(۴-۲)!} = \frac{۴!}{۲!\times۲!} = \frac{۴!}{۲\times۲} = \frac{۲۴}{۴} = ۶$

د) مهره‌های انتخاب شده همرنگ باشند.

پاسخ: دو مهره همرنگ باشند یعنی یا دو مهره سفید باشند یا هر دو قرمز باشند.

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۴}{۲}=\frac{۲!}{۲!\times(۲-۲)!}+\frac{۴!}{۲!\times(۴-۲)!}=\frac{۲!}{۲!\times ۰!}+\frac{۴!}{۲!\times ۲!}=۱+۶=۷$$

■تذکر: رابطه‌های خیلی مهم و کاربردی $\binom{n}{n-۱}=n$ $\binom{n}{۰}=۱$ $\binom{n}{n}=۱$ $\binom{n}{۱}=n$

مثال ۴۲: از بین ۳ داور ایرانی و ۵ داور خارجی قرار است ۲ داور برای مسابقات آسیایی انتخاب شوند تعداد راههای ممکن برای انتخاب حداقل یک داور ایرانی را بیابید.

پاسخ: حداقل یک ایرانی یعنی یکی و بیشتر. پس دو حالت داریم:

حالت اول: یک داور ایرانی $\binom{۳}{۱}$ و یک داور خارجی $\binom{۵}{۱}$ باشد.

$$\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۳\times ۵=۱۵$$

یا

حالت دوم: هر ۲ داور ایرانی باشند.

$$\binom{۳}{۲}=\frac{۳!}{۲!\times(۳-۲)!}=\frac{۶}{۲\times۱}=۳$$

پس تعداد راههای انتخاب برابر است با $۱۵+۳=۱۸$

انتخاب‌های شامل و فاقد:

شامل:

❋ برای انتخاب r شیء از بین n شیء که همواره یک شیء خاص در بین انتخاب‌شده‌ها باشد، ابتدا عضو مورد نظر را انتخاب می‌کنیم، حال کافی است از بین $n-۱$ شیء باقی‌مانده $r-۱$ شیء انتخاب کنیم. پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر با $\binom{n-۱}{r-۱}$ است. (شامل از هر دو قسمت کم می‌کند) ☹

مثال ۴۳: تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل عضو a کدام است؟

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۵

پاسخ: تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه شش عضوی برابر $\binom{۶}{۳}$ است که اگر قرار باشد همیشه شامل a باشند

پس از حضور a مطمئن هستیم و آن را کنار می‌گذاریم. $\binom{۶}{۳}$ به $\binom{۶-۱}{۳-۱}$ تبدیل می‌شود یعنی: $۱۰ = \binom{۵}{۲}$.

پس گزینه (ب) صحیح است.

مثال ۴۴: یک مربی فوتبال می‌خواهد لیست ۱۱ بازیکن را از بین تیم ۲۰ نفره انتخاب و معرفی کند. با فرض آنکه دروازه‌بان و کاپیتان مشخصی از این تیم ثابتند و حتما جزء نفرات انتخابی هستند، تعداد راه‌های انتخاب بازیکنان را محاسبه کنید.

پاسخ: چون دروازه‌بان و کاپیتان ثابتند و حتما جزء نفرات انتخابی هستند پس به $\binom{۱۸}{۹} = \binom{۲۰-۲}{۱۱-۲}$ حالت انتخاب وجود دارد.

فاقد:

❋ اگر قرار باشد یک شیء خاص بین اشیاء انتخاب شده نباشد، ابتدا آن شیء را کنار می‌گذاریم، سپس تعداد اشیاء مورد نظر را از انتخاب می‌کنیم. پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر با $\binom{n-۱}{r}$ است. (فاقد از قسمت بالا کم می‌کند)☺

مثال ۴۵: می‌خواهیم از بین کتابهای $\{$فلسفه، اقتصاد، جغرافیا، زبان، عربی، ریاضی$\}$ ۴ کتاب انتخاب کنیم طوریکه کتاب فلسفه جزء آنها نباشد. این کار به چند طریق انجام می‌شود؟

پاسخ: از همان ابتدا کتاب فلسفه را حذف می‌کنیم پس فقط به کتابهای $\{$اقتصاد، جغرافیا، زبان، عربی، ریاضی$\}$ نیاز داریم یعنی ۵ کتاب برایمان باقی می‌ماند. حال ۴ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۶-۱}{۴} = \binom{۵}{۴} = \frac{۵!}{۴! \times ۱!} = \frac{۱۲۰}{۲۴} = ۵$$

❋ مثالی از ترکیب دو حالت بالا:

مثال ۴۶: تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ که شامل عدد ۳ باشند اما شامل عدد ۷ نباشند را تعیین کنید.

پاسخ: از دو نکته‌ی گفته شده استفاده می‌شود. $\binom{7-1-1}{4-1}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\times 2!}=\frac{120}{12}=10$

خرداد ۹۹:

۱- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۲۵)

الف) تساوی $2!=\frac{6!}{3!}$ همواره برقرار است. پاسخ: نادرست

۲- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد. (۰/۷۵)

پاسخ: $C(9,4)=\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!\times(9-4)!}==\frac{9\times8\times7\times6\times5!}{24\times5!}=126$

۳- با ارقام ۱و۲و۴و۶ و ۸ و۷و۹ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (۱)

پاسخ: $\underline{7}\times\underline{6}\times\underline{5}=210$ تعداد راههای انتخاب

۴- به چند طریق می‌توان ۳ توپ همرنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟ (۱)

پاسخ: هر ۳ توپ قرمز یا هر ۳ آبی باشند $\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=\frac{5!}{3!\times2!}+\frac{4!}{3!\times1!}=\frac{120}{6\times2}+\frac{24}{6}=10+4=14$

۵- روی محیط یک دایره ۵ نقطه وجود دارد، مشخص کنید با این ۵ نقطه چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد. (۱)

پاسخ: برای کشیدن هر وتر دایره به ۲ نقطه نیاز داریم.

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\times3!}=\frac{120}{2\times6}=\frac{120}{12}=10$$

۶- به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و به دوستمان هدیه بدهیم؟ (۱)

پاسخ: $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\times4!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{3!\times4!}=\frac{7\times6\times5}{6}=35$

درس ۲: احتمال

پدیده‌های تصادفی:

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

در پدیده‌های تصادفی از همه‌ی نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. مانند پرتاب یک سکه یا یک تاس.

پدیده‌های قطعی:

در پدیده‌های قطعی، نتیجه آزمایش یا مشاهده را قبل از وقوع می‌توان به طور قطع مشخص کرد.

مثال ۴۷: کدام پدیده تصادفی نیست؟

الف) پیش‌بینی نتیجه مسابقه قبل از شروع آن　　ب) جنسیت فرزند یک خانواده

ج) پرتاب سکه‌ای که هر دو طرف آن یک شکل باشد.　　د) مدت زمان لازم برای رسیدن به مدرسه

پاسخ: گزینه (ج). چون نتیجه پرتاب سکه‌ای که هر دو طرف آن یک شکل باشد مشخص است، بنابراین پدیده قطعی است اما در سایر گزینه‌ها نتیجه از قبل مشخص نیست پس پدیده تصادفی است.

فضای نمونه:

مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ی آن آزمایش گویند که با S نمایش می‌دهند.

تعداد اعضای فضای نمونه S را با $n(S)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۴۸: فضای نمونه‌ی پدیده‌های تصادفی را مشخص کنید و تعداد اعضای آنها را بدست آورید.

الف) پرتاب یک سکه:　**پاسخ:** $S = \{\text{رو ، پشت}\} \rightarrow n(S) = ۲$

ب) پرتاب یک تاس:　**پاسخ:** $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(S) = ۶$

ج) خانواده‌ای با یک فرزند:　**پاسخ:** $S = \{\text{پسر، دختر}\} \rightarrow n(S) = ۲$

د) پرتاب دو سکه:　**پاسخ:** $S = \{(\text{پشت،پشت})(\text{رو، پشت})(\text{پشت،رو})(\text{رو،رو})\} \rightarrow n(S) = ۴$

در خانواده‌ای با ۲ فرزند:　**پاسخ:** $S = \{(\text{پسر،پسر})(\text{دختر، پسر})(\text{پسر،دختر})(\text{دختر،دختر})\} \rightarrow n(S) = ۴$

■**تذکر:** به طور کلی در پرتاب n سکه $n(S)=۲^n$، در پرتاب m تاس: $n(S)=۶^m$ و در پرتاب n سکه و m تاس با هم تعداد فضای نمونه به صورت $n(S)=۲^n\times ۶^m$ خواهد بود.

به عنوان مثال در پرتاب یک سکه و یک تاس: $n(S)=۲^۱\times ۶^۱=۱۲$ است.

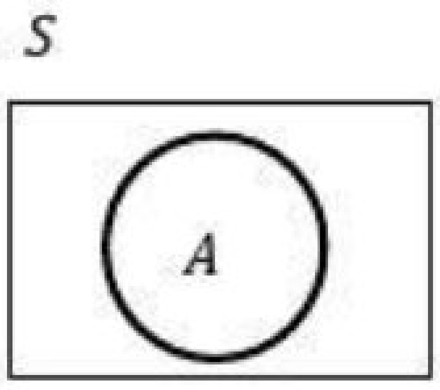
$$S=\{(ر,۱)(ر,۲)(ر,۳)(ر,۴)(ر,۵)(ر,۶)(پ,۱)(پ,۲)(پ,۳)(پ,۴)(پ,۵)(پ,۶)\}$$

در پرتاب ۲ سکه و یک تاس : $n(S)=۲^۲\times ۶^۱=۲۴$ است.

■**تذکر:** در فضای نمونه‌ی تولد n فرزند $n(S)=۲^n$ است. به عنوان مثال در خانواده‌ای با ۳ فرزند $n(S)=۲^۳=۸$ که اعضای S به صورت نمایش داده می‌شود.

$$S=\{(پ،پ،پ)(د،پ،پ)(پ،د،پ)(پ،پ،د)(د،د،پ)(د،پ،د)(پ،د،د)(د،د،د)\}\rightarrow n(S)=۸$$

پیشامد:



هر زیر مجموعه مانند A از فضای نمونه‌ی S را یک پیشامد گویند. $A\subseteq S$

به عنوان مثال آمدن پشت در پرتاب یک سکه یک پیشامد است یا ظاهر شدن عدد زوج در پرتاب یک تاس یک پیشامد است. پیشامدها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می‌دهیم.

■**تذکر:** تعداد پیشامدها با تعداد زیر مجموعه‌های فضای نمونه‌ی S برابر است یعنی:

$$\text{تعداد پیشامدها}=۲^{n(S)}$$

مثال ۴۹: در پرتاب یک سکه تعداد پیشامدها را به دست آورده و آنها را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در پرتاب یک سکه ممکن است دو حالت پیش آید، $S=\{\text{رو ، پشت}\}$ پس: $n(S)=۲$

بنابراین تعداد پیشامدها برابر $۲^۲=۴$ خواهد بود. پیشامدها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\emptyset,\{\text{پشت}\},\{\text{رو}\},\{\text{رو ، پشت}\}$$

■دقت کنید مجموعه‌ی تهی، $\emptyset$ ، همیشه در پیشامدها حضور دارد.

مثال ۵۰: در پرتاب یک تاس پیشامدهای زیر را بنویسید:

الف) عدد زوج بیاید. پاسخ: $A = \{۲,۴,۶\}$

ب) عدد اول بیاید. پاسخ: $B = \{۲,۳,۵\}$

مثال ۵۱: در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را بنویسید:

الف) اعداد مساوی ظاهر شوند.

پاسخ: $A = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)\}$

ب) مجموع دو عدد از ۹ بیشتر شود.

پاسخ: $B = \{(۴,۶)(۵,۵)(۵,۶)(۶,۴)(۶,۵)(۶,۶)\}$

ج) هر دو عدد اول باشند.

پاسخ: $C = \{(۲,۲)(۲,۳)(۲,۵)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۵)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۵)\}$

د) حاصل‌ضرب اعداد برآمده برابر ۲۴ باشد.

پاسخ: $D = \{ (۴,۶)(۶,۴)\}$

مثال ۵۲: در پرتاب دو سکه پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) حداقل یک‌بار رو ظاهر شود. پاسخ: $A = \{(\text{ر},\text{پ})(\text{پ},\text{ر})(\text{ر},\text{ر})\}$

ب) فقط یک‌بار پشت دیده شود. پاسخ: $B = \{(\text{ر},\text{پ})(\text{پ},\text{ر})\}$

ج) حداکثر یک‌بار رو ظاهر شود. پاسخ: $C = \{(\text{ر},\text{پ})(\text{پ},\text{ر})(\text{پ},\text{پ})\}$

مثال ۵۳: در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را بنویسید:

الف) هر دو عدد مربع کامل بیاید.

پاسخ: $A = \{(۱,۱)(۱,۴)(۴,۱)(۴,۴)\}$

ب) حاصل‌ضرب اعداد برآمده بزرگتر از ۳۶ باشد.

پاسخ: چنین حالتی رخ نمی‌دهد، این پیشامد غیر ممکن است. $B = \emptyset$

ج) مجموع اعداد رو شده کوچکتر از ۱۳ باشد.

پاسخ: در تمام حالاتی که دو تاس ظاهر می‌شوند مجموع اعداد کوچکتر از ۱۳ است. این پیشامد حتمی و برابر S است.

تعداد اعضای این پیشامد برابر ۳۶ است.

$$C = \{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵)(۱,۶)(۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶)\ldots(۶,۵)(۶,۶)\}$$

مثال ۵۴: در خانواده‌ای با سه فرزند، پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) حداقل یکی از فرزندان دختر باشد.

پاسخ: $A = \{(د،د،د)(د،د،پ)(د،پ،د)(پ،د،د)(د،پ،پ)(پ،د،پ)(پ،پ،د)\}$

ب) دقیقا یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

پاسخ: $B = \{(د،پ،پ)(پ،د،پ)(پ،پ،د)\}$

ج) حداکثر یکی از فرزندان دختر باشد.

پاسخ: $C = \{(د،پ،پ)(پ،د،پ)(پ،پ،د)(پ،پ،پ)\}$

مثال۵۵: از جعبه‌ای که در آن ۵ کارت سبز، ۴ کارت سفید و ۳ کارت قرمز است، ۳ کارت را به طور تصادفی برمی‌داریم،

تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) از هر رنگ یک کارت انتخاب شود.

پاسخ: $\binom{۵}{۱} \times \binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$

ب) ۲ کارت سبز و ۱ کارت قرمز باشد.

پاسخ: $\binom{۵}{۲} \times \binom{۳}{۱} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} \times ۳ = \frac{۱۲۰}{۱۲} \times ۳ = ۱۰ \times ۳ = ۳۰$

ج) هر ۳ کارت سفید باشند.

پاسخ: $\binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۳! \times ۱!} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$

د) هر ۳ کارت همرنگ باشند.

پاسخ: هر ۳ سبز یا هر ۳ سفید یا هر ۳ قرمز باشند.

تعداد حالتهای پیشامد هر ۳ کارت همرنگ　$\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}=۱۰+۴+۱=۱۵$

ه) حداقل ۲ کارت قرمز باشند.

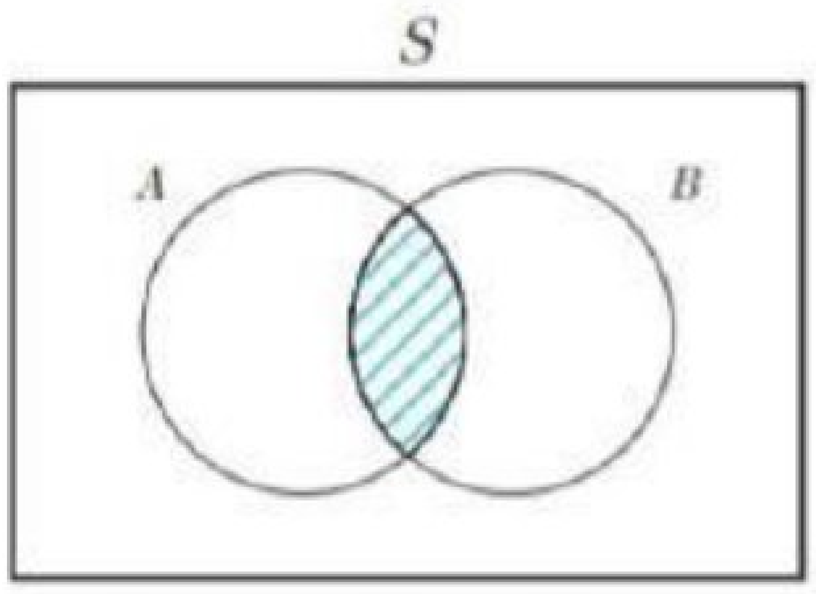
پاسخ: حالت اول: ۲ کارت قرمز و ۱ کارت باقی‌مانده از بقیه رنگها　$\binom{۳}{۲}\times\binom{۹}{۱}=۳\times۹=۲۷$

حالت دوم: هر ۳ کارت قرمز باشد　$\binom{۳}{۳}=\frac{۳!}{۳!\times۰!}=۱$

تعداد عضوهای پیشامد = $۲۷+۱=۲۸$

پیشامدها و اعمال روی آنها:

الف) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A\cap B$ هنگامی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد با هم اتفاق بیفتد، یعنی هم A و هم B اتفاق بیفتد.



$A\cap B=\{x\in S|x\in A\land x\in B\}$

$$A\cap B=\{x\in S|x\in A\land x\in B\}$$

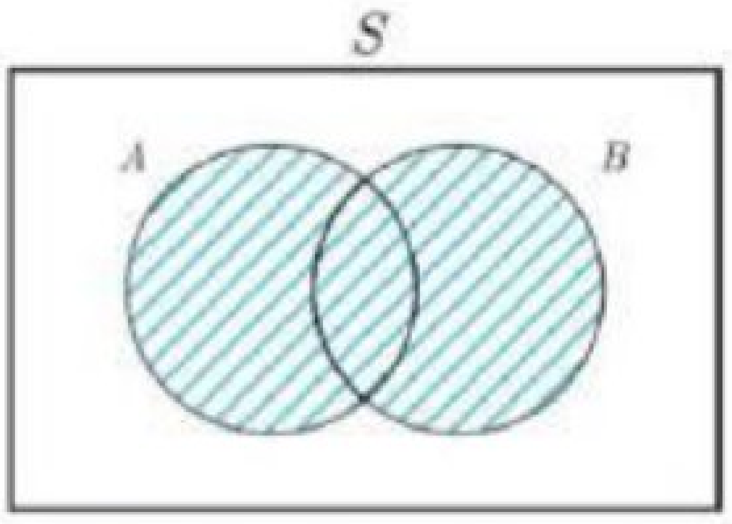
مثال۵۶ : دو تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامد آن را بنویسید که مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۵ و هر دو عدد اول بیاید.

پاسخ:　مجموع دو عدد ۵ باشد $A=\{(۱,۴)(۲,۳)(۳,۲)(۴,۱)\}$

هر دو عدد اول باشند $B=\{(۲,۲)(۲,۳)(۲,۵)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۵)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۵)\}$

مجموع دو تاس برابر ۵ و هر دو عدد اول:　$A\cap B=\{(۲,۳)(۳,۲)\}$

ب) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ هنگامی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدها اتفاق بیفتد، یعنی یا A یا B یا هر دو اتفاق بیفتد.



$A \cup B = \{x \in S | x \in A \vee x \in B\}$

$$A \cup B = \{x \in S | x \in A \ \vee x \in B\}$$

مثال۵۷ : دو تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامد آن را بنویسید که دو تاس یکسان یا اعدادکوچکتر از ۳ بیایند.

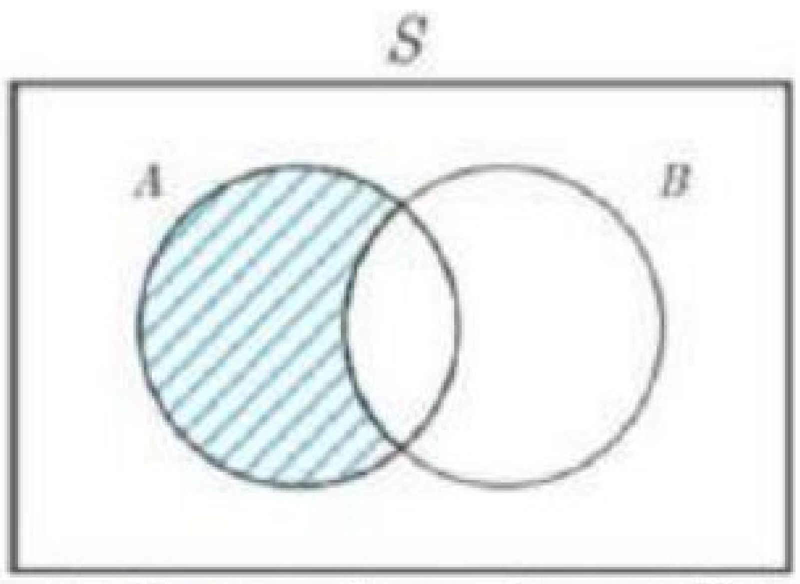
پاسخ: $A = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)\}$ دو تاس یکسان بیایند

$B = \{(۱,۱)(۱,۲)(۲,۱)(۲,۲)\}$ دو تاس اعداد کوچکتر از ۳ بیایند

$A \cup B = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)(۱,۲)(۲,۱)\}$ دو تاس یکسان یا اعدادکوچکتر از ۳ بیایند

پ) تفاضل دو پیشامد:

پیشامد $A - B$ هنگامی رخ می‌دهد که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد، یا به عبارتی فقط A اتفاق بیفتد.



$A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$

$$A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$$

مثال۵۸: در پرتاب یک تاس پیشامد آن را بنویسید که عدد ظاهر شده زوج باشد اما اول نباشد.

پاسخ: $A = \{۲,۴,۶\}$ تاس زوج بیاید

$B = \{۲,۳,۵\}$ عدد اول باشد

$A - B = \{۲,۴,۶\} - \{۲,۳,۵\} = \{۴,۶\}$ عدد زوج باشد اما اول نباشد

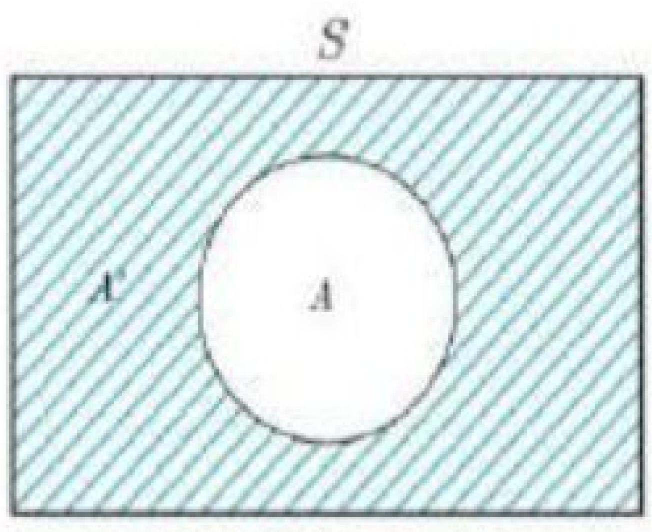
■**تذکر:** با در نظر گرفتن شرایط سوال در انجام اعمال ذکر شده روی پیشامدها و تمرین بیشترمی‌توانید جواب‌ها را سریعتر به دست آورید.

مثال ۵۹: در پرتاب دو تاس پیشامد آن را بنویسید که اعداد رو آمده هر دو یکسان باشند اما هر دو بزرگتر از۵ نباشند.

پاسخ: $A - B = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)\}$

ت)متمم یک پیشامد: اگر پیشامد A را در فضای نمونه‌ای S فرض کنیم، متمم آن را با A' نمایش می‌دهیم، A' زمانی اتفاق می‌افتد که پیشامد A اتفاق نیفتد.

$$A' = S - A$$



$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$

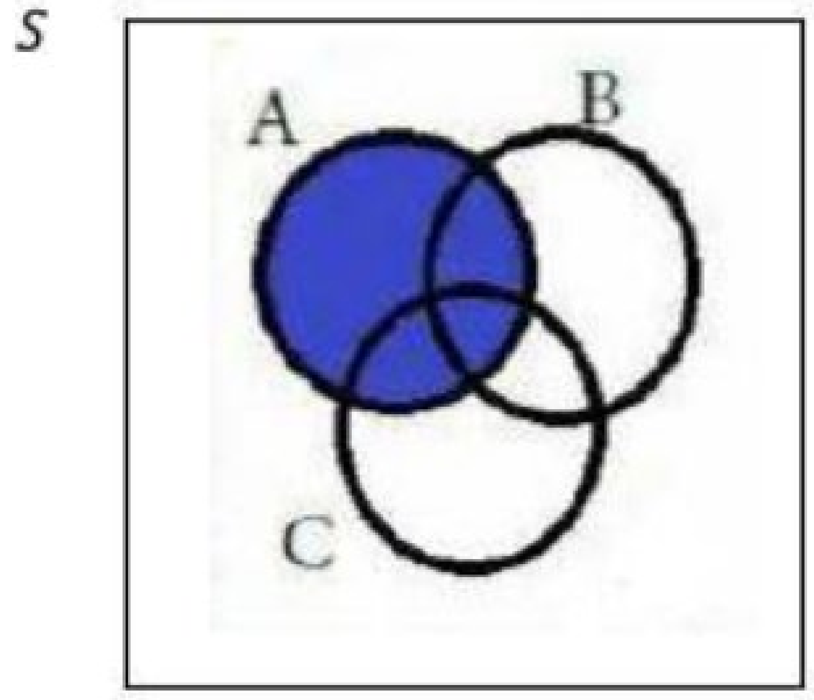
$$A' = \{x \in S | x \notin A\}$$

مثال ۶۰: در پرتاب یک تاس پیشامد آن را بنویسید که عدد اول نیاید.

پاسخ: می‌دانیم فضای نمونه پرتاب یک تاس $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است اگر پیشامد آمدن عدد اول $A = \{۲,۳,۵\}$ باشد

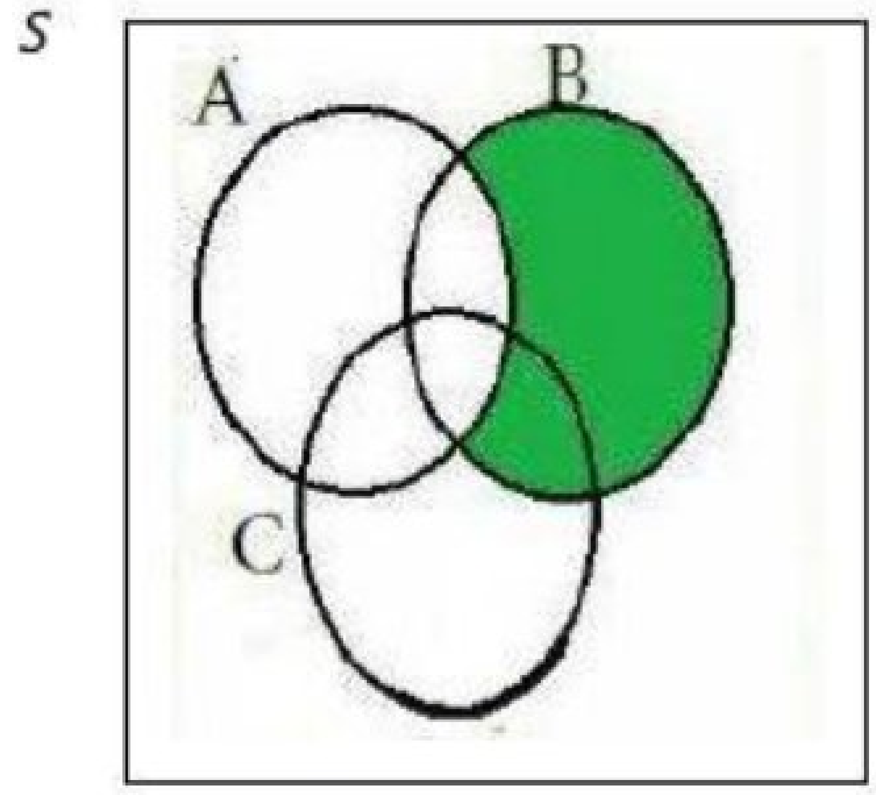
پس متمم آن یعنی نیامدن عدد اول را با A' نمایش می‌دهیم و داریم: $A' = S - A = \{۱,۴,۶\}$

مثال ۶۱: فرض کنید A, B, C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید.سپس عبارت مجموعه‌ای مربوط به آن را بنویسید.



الف) پیشامد A رخ دهد. **پاسخ:** A

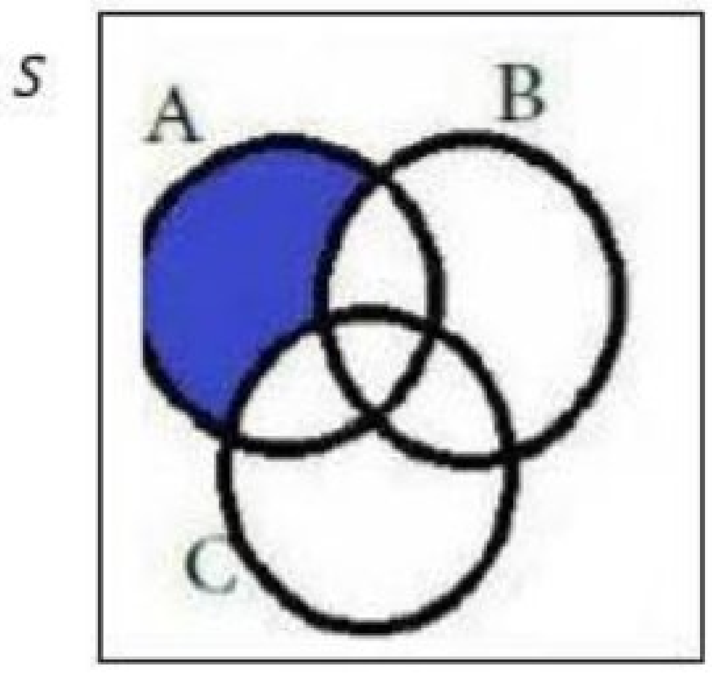
ب) پیشامد B رخ دهد اما پیشامد A رخ ندهد.



پاسخ: $B - A$

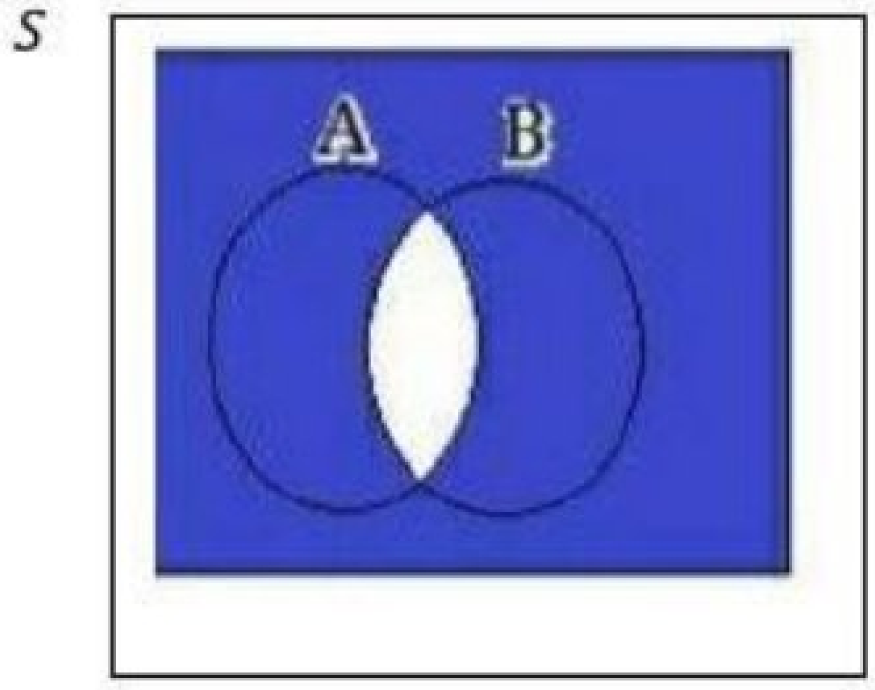
ج) فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهند.

پاسخ: $A - (B \cup C)$



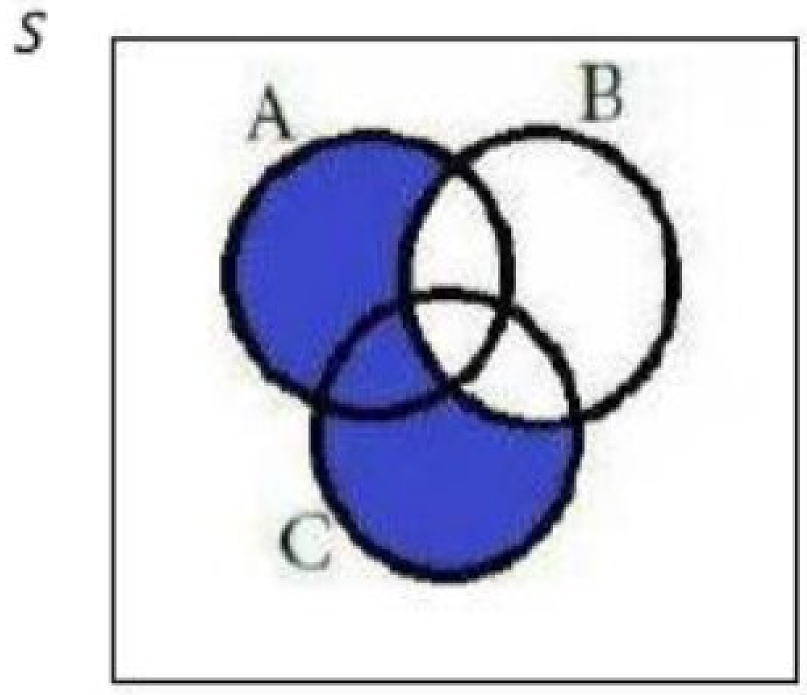
د) پیشامد A و B رخ ندهد.

پاسخ: $(A \cap B)'$



ه) پیشامدهای A یا C رخ دهند ولی پیشامد B رخ ندهد.

پاسخ: $(A \cup C) - B$



دو پیشامد ناسازگار:

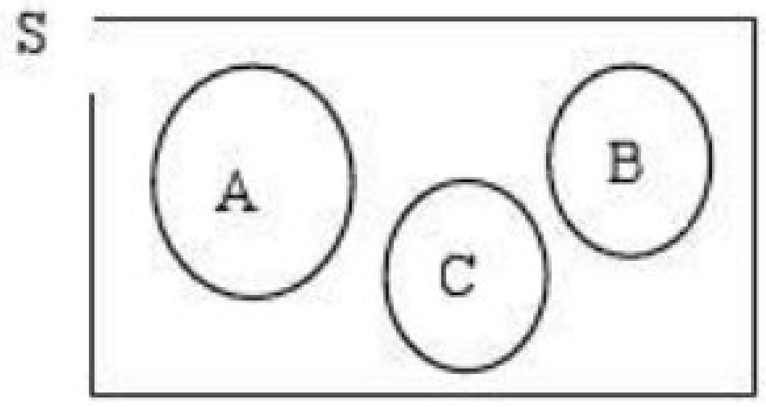
پیشامدهای A و B از فضای نمونه‌ای S را دو پیشامد ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک آنها تهی باشد. $A \cap B = \emptyset$

چنین پیشامدهایی نمی‌توانند با هم رخ دهند، مانند پیشامد ظاهر شدن اعداد زوج و اعداد فرد در پرتاب یک تاس.

تذکر: سه پیشامد A و B و C را دو به دو ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک هر دو پیشامد تهی باشد.

$$B \cap C = \emptyset \quad , \quad A \cap C = \emptyset \quad , \quad A \cap B = \emptyset$$

توجه کنید شرط $A \cap B \cap C = \emptyset$ برای ناسازگاری دو به دو پیشامدها کافی نیست.



مثال ۶۲: سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.دو پیشامد A, B به صورت زیر داده شده‌اند. آیا این دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟

پیشامد A : هر سه سکه یکسان ظاهر شوند.

پیشامد B : حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید.

پاسخ:
$$A = \left\{(\text{پ،پ،پ})(\text{ر،ر،ر})\right\}$$

$$B = \left\{(\text{ر،پ،پ})(\text{پ،ر،پ})(\text{پ،پ،ر})(\text{ر،ر،پ})(\text{ر،پ،ر})(\text{پ،ر،ر})(\text{ر،ر،ر})\right\}$$

پیشامدهای A, B ناسازگار نیستند، زیرا عضو مشترک دارند. $A \cap B = \left\{(\text{ر،ر،ر})\right\}$

مثال ۶۳: در پرتاب یک سکه و یک تاس پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) سکه پشت و تاس زوج بیاید.

پاسخ: $A = \left\{(\text{پ},۲)(\text{پ},۴)(\text{پ},۶)\right\}$

ب) تاس عدد فرد یا سکه رو بیاید.

پاسخ: $B = \left\{(\text{ر},۱)(\text{ر},۲)(\text{ر},۳)(\text{ر},۴)(\text{ر},۵)(\text{ر},۶)(\text{پ},۱)(\text{پ},۳)(\text{پ},۵)\right\}$

ج) سکه پشت بیاید.

پاسخ: $C = \left\{(\text{پ},۱)(\text{پ},۲)(\text{پ},۳)(\text{پ},۴)(\text{پ},۵)(\text{پ},۶)\right\}$

خرداد ۹۹:

۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. (هر مورد ۰/۲۵)

الف) اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو پیشامد A, B را .... ناسازگار........... می‌گوییم.

ب) فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و دو سکه ....۲۴ = ۲ × ۲ × ۶ .... عضو دارد.

پ) پیشامد ....A' .... وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (هر مورد ۰/۲۵)

ب) خارج کردن ۲ مهره سفید از جعبه‌ای که در آن ۵ مهره سفید است، یک پیشامد حتمی است. درست

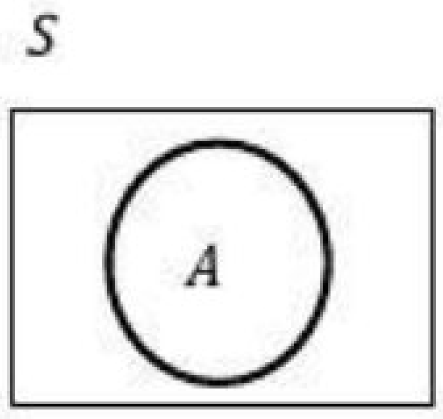
پ) در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگتر از ۶ نشدنی است. درست

احتمال: (اندازه‌گیری شانس)

همه ما کم و بیش در گفتگوها و گمانه‌زنی‌های روزانه از کلمه شانس استفاده می‌کنیم و تصور روشنی از مفهوم آن داریم. از دیرباز حدس زدن نتیجه یک مسابقه یا رقابت یا یک رویداد و شرط‌بندی روی آن مرسوم بوده است. این امر باعث شد شاخه‌ی جدیدی به نام علم احتمالات در ریاضی بوجود آید که با نگاهی علمی‌تر و دقیق‌تر به آن پرداخته شود.

احتمال یک پیشامد: فرض کنیم A پیشامدی در فضای نمونه‌ای $S \neq \emptyset$ باشد در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نمایش داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد } A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه}}$$



مثال ۶۴: تاسی را پرتاب کرده‌ایم، مطلوبست محاسبه احتمال آنکه:

الف) تاس عدد زوج بیاید.

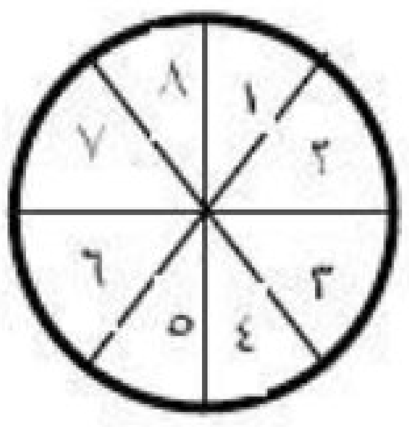
پاسخ: $A = \{۲,۴,۶\} \rightarrow n(A) = ۳ \ \ , n(S) = ۶ \ \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب) عدد بزرگتر از ۲ ظاهر شود.

پاسخ:

$$B = \{۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(B) = ۴ \ \rightarrow \ P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۶۵: صفحه‌ی عقربه‌داری به هشت قسمت مساوی تقسیم شده و روی قسمتهای آن به ترتیب اعداد ۱ تا ۸ نوشته شده است، عقربه را می‌چرخانیم. به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) احتمال آن را بیابید که عقربه روی عدد ۵ بایستد.

پاسخ: $A = \{۵\} \rightarrow n(A) = ۱ \ , \ S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\} \rightarrow n(S) = ۸ \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{۱}{۸}$

ب) احتمال آن را بیابید که عقربه روی عدد زوج و مضرب ۳ بایستد.

پاسخ: $B = \{۶\} \rightarrow n(B) = ۱ \ \ , \ n(S) = ۸ \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{۱}{۸}$

ج) احتمال آن را بیابید که عقربه عدد اول را نشان دهد.

پاسخ: $C = \{۲,۳,۵,۷\} \rightarrow n(C) = ۴ \quad , \ n(S) = ۸ \ \Rightarrow \quad P(C) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

مثال ۶۶: دو تاس را با هم انداخته‌ایم، مطلوبست محاسبه احتمال آنکه:

الف) حاصل‌ضرب اعداد ظاهر شده روی دو تاس برابر ۸ شود.

پاسخ: $A = \{(۲,۴)(۴,۲)\} \to n(A) = ۲ \quad , n(S) = ۳۶ \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{۲}{۳۶} = \frac{۱}{۱۸}$

ب) مجموع اعداد دو تاس حداکثر ۴ باشد.

پاسخ:

$$B = \{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)(۲,۱)(۲,۲)(۳,۱)\} \to n(B) = ۶ \quad , n(S) = ۳۶ \qquad P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

تذکر:

۱- برای هر پیشامد دلخواه در فضای نمونه S داریم: $\quad ۰ \le P(A) \le ۱$

۲- اگر A پیشامدی غیر ممکن باشد $P(A) = ۰$ و اگر A پیشامدی قطعی باشد $P(A) = ۱$ است در واقع می‌توان نوشت:

$$P(\emptyset) = ۰ \quad , \quad P(S) = ۱$$

به بیان دیگر احتمال رخ دادن پیشامد غیرممکن برابر صفر درصد و احتمال رخ دادن پیشامد حتمی برابر ۱۰۰ درصد است.

مثال ۶۷: یک سکه و یک تاس را با هم می‌اندازیم. مطلوبست احتمال آنکه:

الف) سکه رو بیاید.

پاسخ:

$$A = \{(۱,ر)(۲,ر)(۳,ر)(۴,ر)(۵,ر)(۶,ر)\} \to n(A) = ۶ \quad , \quad n(S) = ۱۲ \quad \Rightarrow P(A) = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) سکه پشت و تاس فرد بیاید.

پاسخ: $B = \{(پ,۱)(پ,۳)(پ,۵)\} \to n(B) = ۳ \quad , n(S) = ۱۲ \quad \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

ج) سکه پشت یا تاس فرد بیاید.

پاسخ: $C = \{(پ,۱)(پ,۲)(پ,۳)(پ,۴)(پ,۵)(پ,۶)(ر,۱)(ر,۳)(ر,۵)\} \to n(C) = ۹$

$$, n(S) = ۱۲ \quad \Rightarrow P(C) = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

احتمال پیشامد متمم:

اگر $P(A)$ احتمال رخ دادن پیشامد A در فضای نمونه S باشد،در این صورت احتمال رخ ندادن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

(A و A' متمم یکدیگرند)

همچنین می‌توان نوشت:

$$P(A') + P(A) = ۱ \quad , \quad \mathrm{P(A)} = ۱ - P(A')$$

مثال ۶۸: اگر $P(A) = \frac{۲}{۳}$ باشد مقدار $P(A')$ را بدست آورید.

پاسخ: $P(A') = ۱ - P(A) \Rightarrow P(A') = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$

مثال۶۹: اگر احتمال قبول شدن سارا در یک امتحان برابر $\frac{۵}{۷}$ باشد، احتمال قبول نشدن او در این امتحان چقدر است؟

پاسخ: پیشامد A را قبول شدن سارا فرض می‌کنیم، پس قبول نشدن او A' می‌شود.

احتمال قبول نشدن $P(A') = ۱ - P(A) \Rightarrow P(A') = ۱ - \frac{۵}{۷} = \frac{۲}{۷}$

مثال۷۰: احتمال آن را بیابید که در پرتاب دو تاس اعداد ظاهر شده یکسان نباشند.

پاسخ: با دقت در حالات بوجود آمده در پرتاب دو تاس درمی‌یابیم که تعداد حالاتی که دو تاس اعداد متفاوتی را نشان می‌دهند بیشتر از یکسان بودن اعداد رو شده است بنابراین از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

یکسان بودن اعداد رو شده در دو تاس $A = \{(۱,۱)(۲,۲)(۳,۳)(۴,۴)(۵,۵)(۶,۶)\} \to n(A) = ۶$

یکسان نبودن اعداد در دو تاس = A' متمم A

$$n(A') = n(S) - n(A) \to n(A') = ۳۶ - ۶ = ۳۰$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۳۰}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$

مثال۷۱: اگر با ارقام ۸ ,۶ ,۲ ,۱ یک عدد چهار رقمی بسازیم، احتمال آن که این عدد زوج باشد را تعیین کنید.

پاسخ: تعداد کل اعداد ۴ رقمی که می‌توان نوشت برابر است با $n(S) = ۴! = ۲۴$

تعداد اعداد زوج ۴ رقمی برابر است با $n(A) = \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} \times \underset{\uparrow \atop \text{۲ یا ۶ یا ۸}}{\underline{۳}} = ۱۸$

پس: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۸}{۲۴} = \frac{۳}{۴}$

مثال ۷۲: دو سکه را با هم می‌اندازیم، احتمال آن را بیابید که:

الف) حداقل یک بار پشت بیاید.

پاسخ:
$$n(S) = ۲ \times ۲ = ۴$$

$$A = \{(\text{پ}, \text{ر}) (\text{ر}, \text{پ}) (\text{پ}, \text{پ})\} \rightarrow n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

ب) حداکثر یک بار پشت بیاید.

پاسخ:
$$B = \{(\text{پ}, \text{ر}) (\text{ر}, \text{پ}) (\text{ر}, \text{ر})\} \rightarrow n(B) = ۳$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

مثال۷۳: از جعبه‌ای که حاوی ۸ لامپ سالم و ۳ لامپ سوخته است، ۳ لامپ به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که:

الف) هر ۳ لامپ سالم باشند.

پاسخ: می‌خواهیم ۳ لامپ از بین ۱۱ لامپ انتخاب کنیم پس تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳! \times ۸!} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۳! \times ۸!} = ۱۶۵$$

چون قرار است هر ۳ لامپ سالم باشند پس از بین ۸ لامپ سالم انتخاب می‌کنیم:

$$n(A) = \binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳! \times ۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۶ \times ۵!} = ۵۶ \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵۶}{۱۶۵}$$

ب) ۲ لامپ سوخته باشد.

پاسخ: اگر ۲ لامپ انتخابی سوخته باشد، یک لامپ باقی‌مانده باید سالم باشد یعنی ۲ لامپ سوخته و ۱ لامپ سالم:

$$n(B) = \binom{۳}{۲} \times \binom{۸}{۱} = ۳ \times ۸ = ۲۴ \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲۴}{۱۶۵}$$

مثال۷۴: از مجموعه $\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابیدکه عدد انتخاب شده اول یا مضرب ۳ باشد.

پاسخ:

$n(S) = ۹$ عدد اول یا مضرب ۳ : $A = \{۲,۳,۵,۷,۶,۹\} \rightarrow n(A) = ۶$

$$P(A) = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۷۵: خانواده‌ای دارای سه فرزند است. احتمال آن را بیابید که:

الف) تعداد پسرها حداکثر یکی باشد.

پاسخ:

$$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۳ = ۸$$

$$A = \{(\text{د،د،پ})(\text{د،پ،د})(\text{پ،د،د})(\text{د،د،د})\} \rightarrow P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

ب) فرزند اول دختر باشد.

پاسخ:

$$B = \{(\text{د،پ،پ})(\text{د،پ،د})(\text{د،د،پ})(\text{د،د،د})\} \rightarrow P(B) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

۷۶تست: با حروف کلمه $flower$ کلمه‌های چهارحرفی (بدون تکرار) ساخته‌ایم. احتمال آنکه کلمه ساخته شده با حرف " w "شروع شود کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۶}$ د) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه (ج) تعداد کلمات ۴ حرفی: $\underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۳۶۰$ بنابراین $n(S) = ۳۶۰$

تعداد کلمات ۴ حرفی که با حرف "w" شروع شود: $\underset{\uparrow \atop w}{\underline{۱}} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۶۰$ پس $n(A) = ۶۰$

$$P(A) = \frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{۱}{۶}$$

مثال ۷۷: در یک جمع ۴ نفری احتمال آن را بیابید که:

الف) همه افراد در روز یکشنبه متولد شده باشند.

پاسخ: هر کدام از این ۴ نفر می‌توانند در یکی از روزهای هفته به دنیا آمده باشند پس به طور کلی هر کدام ۷ انتخاب دارند.

برای هر کدام از این افراد یک جایگاه در نظر می‌گیریم، پس تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

تعداد کل انتخاب افراد : $\underline{۷} \times \underline{۷} \times \underline{۷} \times \underline{۷} \Rightarrow n(S) = ۷^۴$

برای تعیین تعداد اعضای پیشامد، هر کدام از افراد فقط یک انتخاب می‌توانند داشته باشند و آن انتخاب روز یکشنبه است

پس: تعداد انتخابها : $\underset{\uparrow \atop \text{یکشنبه}}{\underline{۱}} \times \underline{۱} \times \underline{۱} \times \underline{۱} \Rightarrow n(A) = ۱$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۷^۴}$$

که به صورت ساده‌تر برای هر شخص سهم $\frac{۱}{۷}$ نیز می‌توان در نظر گرفت و احتمال را به صورت زیر نوشت:

$$P(A) = \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$$

ب) همگی در یک روز از هفته متولد شده باشند.

پاسخ: چون روز مشخصی از هفته مشخص نشده است بنابراین هر یک از روزهای هفته می‌تواند انتخاب شود.

به عنوان مثال روز شنبه: $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$ روز یکشنبه: $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$

روز دوشنبه : $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$ ... روز جمعه: $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۷^۴}$

پس این حالت ۷ بار تکرار شده است بنابراین احتمال برابر خواهد بود با:

$$P(B) = ۷ \times \left(\frac{۱}{۷^۴}\right) = \frac{۷}{۷^۴} = \frac{۱}{۷^۳}$$

ج) همگی در یک فصل از سال متولد شده باشند.

پاسخ: یک سال از ۴ فصل تشکیل شده که هر کدام از آنها می‌توانند انتخاب شوند.

هر ۴ نفر بهار بدنیا آمده باشند. $\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴^۴}$

...

هر ۴ نفر زمستان بدنیا آمده باشند. $\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴^۴}$

پس $P(C) = ۴ \times \frac{۱}{۴^۴} = \frac{۴}{۴^۴} = \frac{۱}{۴^۳}$

د) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند.

پاسخ: یکسال شامل ۱۲ ماه است، در این حالت ماه تولد همه‌ی افراد باید متفاوت باشد. نفر اول از بین ۱۲ ماه سال تمام ماهها را می‌تواند انتخاب کند اما نفر دوم یک انتخاب را از دست می‌دهد و ۱۱ ماه باقی‌مانده را می‌تواند انتخاب کند. به همین ترتیب با انتخاب ماه تولد برای هر نفر یک انتخاب کم می‌شود پس داریم:

$$\frac{۱۲}{۱۲} \times \frac{۱۱}{۱۲} \times \frac{۱۰}{۱۲} \times \frac{۹}{۱۲} = \frac{۹۹۰}{۱۲^۳}$$

مثال ۷۸: در یک تیم ورزشی ۶ نفره احتمال آن را بیابید که:

الف) هر شش نفر در ماه مهر به دنیا آمده باشند.

پاسخ: هر سال ۱۲ ماه است و احتمال بدنیا آمدن در ماه مهر برای هر نفر برابر $\frac{۱}{۱۲}$ است. پس احتمال تولد هر ۶ نفر در ماه مهر برابر است با :

$$P(A) = \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۲} = (\frac{۱}{۱۲})^۶ = \frac{۱}{۱۲^۶}$$

ب) هیچ دو نفری در یک روز از سال به دنیا نیامده باشند. (منظور سال غیر کبیسه است)

پاسخ: هر سال غیر کبیسه ۳۶۵ روز است، نفر اول شانس انتخاب تمام روزهای سال را دارد. اما بعد از آن برای محاسبه‌ی احتمال تعداد روزها یکی یکی کم می‌شود.

$$P(B) = \frac{۳۶۵}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۴}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۳}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۲}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۱}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۰}{۳۶۵} = \frac{۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ... \times ۳۶۰}{۳۶۵^۵}$$

۷۹تست: از بین ۴ دانش‌آموز کلاس دهم و ۲ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۵ دانش‌آموز کلاس دوازدهم، به چند طریق می‌توان سه نفر را انتخاب نمود به طوری که در این انتخاب دانش‌آموزی از کلاس یازدهم وجود نداشته باشد؟

الف) ۹۶　　ب) ۸۴　　ج) ۷۸　　د) ۶۲

پاسخ: گزینه (ب) چون مجاز به انتخاب دانش‌آموز کلاس یازدهم نیستیم پس باید ۳ نفر را از بین ۹ نفر دیگر انتخاب کنیم.

$$C(۹,۳)=\frac{۹!}{۳!\times ۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۶\times ۶!}=۸۴$$

۸۰تست: اعداد طبیعی کوچکتر از ۲۱ را روی کارت‌هایی جداگانه نوشته و در یک جعبه قرار می‌دهیم. یک کارت به تصادف بیرون می‌آوریم، احتمال آنکه عدد روی کارت خارج شده اول و دو رقمی باشد، چقدر است؟

الف) $\frac{۱}{۴}$　　ب) $\frac{۳}{۷}$　　ج) $\frac{۱}{۵}$　　د) $\frac{۱}{۷}$

پاسخ: گزینه (ج)

$$S=\{۱,۲,۳,\ldots,۲۰\}\to n(S)=۲۰$$

$$A=\{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}\to n(A)=۴\qquad \to P(A)=\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

۸۱ تست: مقدار x در تساوی $C(x,۲)=\frac{۱}{۲}P(x,۳)$ کدام است؟

الف) ۹　　ب) ۶　　ج) ۴　　د) ۳

پاسخ: گزینه (د)

$$C(x,۲)=\frac{۱}{۲}P(x,۳)\to \frac{x!}{۲!(x-۲)!}=\frac{۱}{۲}\times\frac{x!}{(x-۳)!}$$

$$\to \frac{\cancel{x}(x\cancel{-}۱)(x-۲)!}{۲\times(x-۲)!}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\cancel{x}(x\cancel{-}۱)(x-۲)(x-۳)!}{(x-۳)!}$$

$$\xrightarrow{x\neq ۰,۱}\ \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times(x-۲)\to x-۲=۱\to x=۳$$

سوالات امتحان نهایی شهریور ۹۹:

۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. (هر مورد ۰/۲۵)

الف) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی .... می‌گوییم.

ب) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه .... عضو دارد.

پ) پیشامد .... وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A و B رخ دهند

پاسخ: الف) برآمد ب) $۸ = ۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲$ پ) $A \cap B$

۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (هر مورد ۰/۲۵)

پ) نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سوالات را شانسی پاسخ داده‌ایم یک پیشامد حتمی است.

ث) تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست.

پاسخ: پ) نادرست ث) درست

۵- می‌خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه یازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم.

مطلوبست احتمال انکه ۴ نفر از اعضای تیم دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۲ نفر از اعضای تیم دانش‌آموز پایه یازدهم باشند.(۱/۵)

پاسخ:
$$n(S) = \binom{۹}{۶} = \frac{۹!}{۳!\times۶!} = ۸۴ \quad , \quad n(A) = \binom{۵}{۴} \times \binom{۴}{۲} = ۵ \times ۶ = ۳۰$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{۳۰}{۸۴}$$

۶- هر یک از اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد. (۱ نمره)

پاسخ:
$$S = \{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\} \quad A = \{۳,۹,۱۵\} \quad \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۸}$$

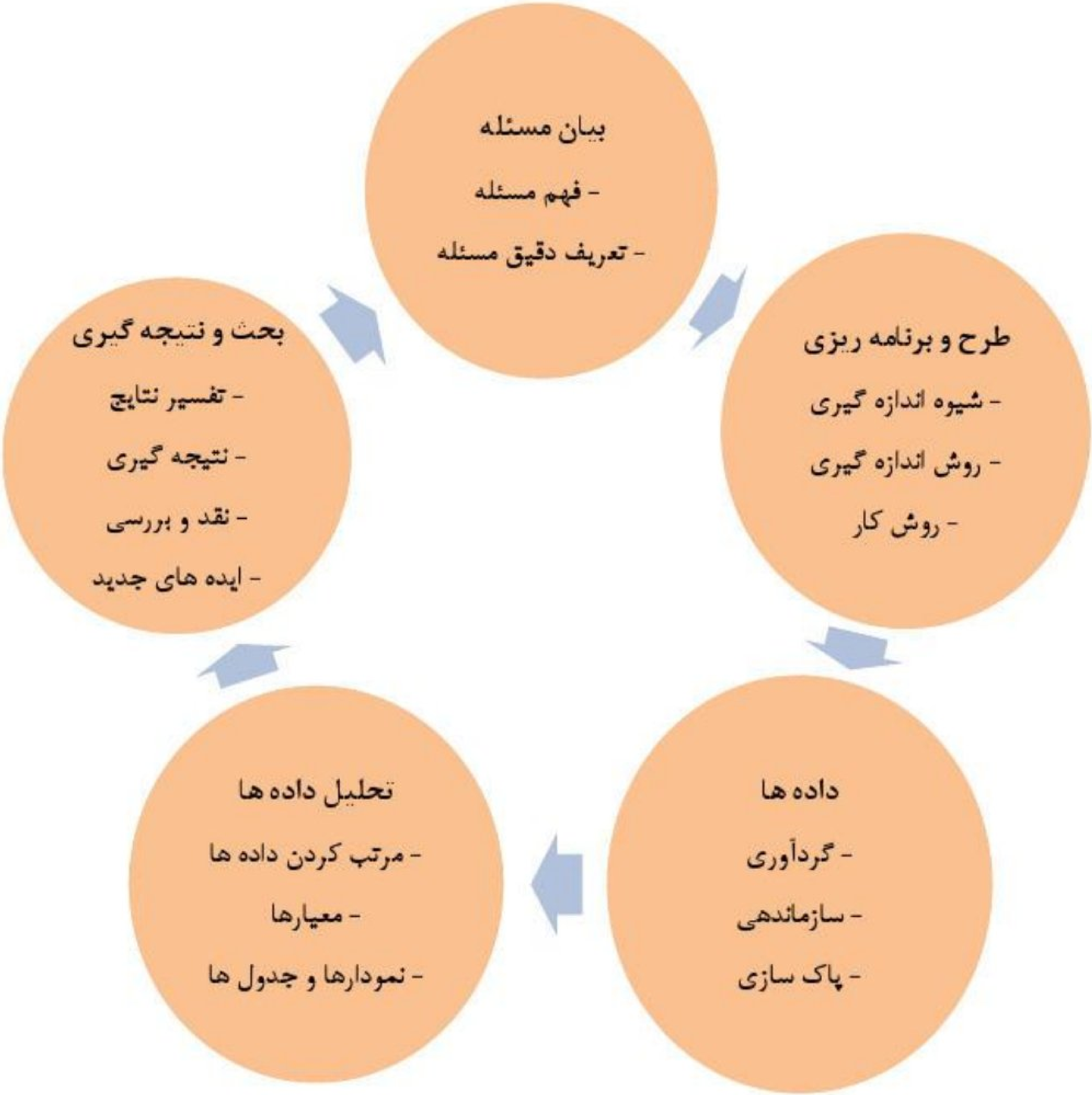
۷- در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)

الف) مجموع اعداد رو شده مساوی ۱۰ باشد.

ب) اعداد رو شده از هر دو تاس یکسان و هر دو زوج باشند.

پاسخ: الف) $A = \{(۴,۶)(۵,۵)(۶,۴)\}$ ب) $B = \{(۲,۲)(۴,۴)(۶,۶)\}$

درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل



مقدمه: دنیایی که ما امروزه با آن مواجه هستیم پر از اطلاعاتی است که در ابعاد مختلف زندگی بکار می‌آید. برای داشتن زندگی بهتر و تصمیم‌گیری درست‌تر لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم.

درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت‌های نتایج بدست آمده را بشناسیم و در نهایت با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم.

حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های زیر است:

گام اول(بیان مسئله)

به عنوان ابتدایی‌ترین گام حل یک مسئله مرتبط با آمار ابتدا مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.

فهم مسئله (طرح پرسش دقیق و شفاف برای درک بهتر مسئله)، تعریف دقیق مسئله با توجه به اهداف، بودجه، زمان و شرایط دیگر. جامعه آماری را محدود و هدف مطالعه را مشخص کنیم.

◆ طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است.

پس موارد زیر در گام اول بیشتر مورد توجه است:

۱- فهم مسئله

۲- تعریف دقیق

گام دوم (طرح و برنامه ریزی)

در این مرحله، پیدا کردن راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و شیوه‌ی تحلیل داده‌ها مورد توجه است.

در گام دوم موارد زیر بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد:

۱- شیوه‌ی اندازه‌گیری (مصاحبه، مشاهده، استفاده از دادگان، پرسشنامه و ...)

۲- روش نمونه گیری

۳- روش کار

◆ اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است.

در اندازه‌گیری، اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد امکان به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل می‌کنیم.

در هر مسئله واحد اندازه‌گیری متغیر مورد بررسی باید مشخص باشد. به عنوان مثال اگر واحد اندازه‌گیری میزان مطالعه درسی دانش‌آموزان (بر حسب دقیقه) مشخص نباشد ممکن است پاسخها بر حسب ساعت یا به صورت کیفی (کم، زیاد، متوسط) بیان شود که یکسان و دقیق نیست و تحلیل را مشکل می‌کند.

در این گام حضور افراد متخصص اهمیت دارد. مثلا اگر قرار است در مورد علت افت تحصیلی دانش‌آموزان مطالعه‌ای صورت گیرد باید از معلمین، متخصصین آموزش و پرورش، مشاوران تحصیلی و کسانی که در حوزه‌ی آموزش مطالعه داشته‌اند مشورت بگیریم.

تذکر: تعداد اعضای جامعه را اندازه‌ی جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه‌ی نمونه گوییم. انتخاب اندازه نمونه باید متناسب با اندازه ی جامعه باشد تا نمونه نماینده‌ی مناسبی از جامعه باشد. دقت کنید هر چه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد و جامعه از تنوع زیادی برخوردار باشد اندازه نمونه نیز باید بزرگتر باشد.

نمونه انتخابی در این گام باید یک نمونه تصادفی باشد تا تمام اعضای جامعه شانس حضور یکسان در نمونه داشته باشند.

مثال ۸۲: برای بررسی میزان رضایت شغلی کارکنان یک کارگاه تولیدی شبانه‌روزی نمونه زیر انتخاب شده است. علت عدم تناسب این نمونه با جامعه آماری را توضیح داده، برای بهبود نمونه گیری چه پیشنهادی دارید؟

نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

پاسخ: این نمونه مناسب نیست زیرا فقط مدیران ارشد آن هم در شیفت روز انتخاب شده‌اند، مدیران به تنهایی نمی‌توانند نماینده‌ی تمام کارکنان یک کارگاه باشند و کارکنان شیفت شب که دارای شرایط متفاوت‌تری هستند در نمونه حضور ندارند.

بهتر است نمونه تصادفی از کل کارکنان شیفت‌های شب و روز انتخاب شود.

گام سوم (گردآوری و پاک سازی داده‌ها)

در این مرحله به گردآوری، سازماندهی و پاکسازی داده‌ها می‌پردازیم. در هر مطالعه ممکن است در مرحله‌ی اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت و وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباه یا خطایی رخ دهد، با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این

اشتباهات را تصحیح کرد.

در گام سوم موارد زیر مورد توجه است:

۱- گردآوری

۲-سازماندهی

۳- پاکسازی

گام سوم به سازمان‌دهی داده‌ها می‌پردازد یعنی تبدیل واحدهای اندازه‌گیری یا محاسبه یک متغیر جدید بر اساس اطلاعات گردآوری شده (مثلا محاسبه‌ی شاخص توده بدنی با استفاده از قد و وزن)

با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از اشتباهاتی که در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم افزار رخ داده را تصحیح کرد.

پس از گردآوری و سازماندهی آنها مرحله‌ی پاکسازی یا حذف داده‌هایی است که نادرست یا ناسازگار هستند و می‌توانند منجر به نتیجه‌گیری غلط شوند. داده‌هایی که ناقص، دارای تکرار یا اشتباه هستند به پاکسازی نیاز دارند.

گام چهارم (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله به مرتب کردن داده‌ها، تعیین معیارها، تنظیم نمودارها و جدول‌ها می‌پردازیم تا بتوانیم داده‌ها را تحلیل و نتایج را ارائه کنیم. در واقع این مرحله صرفا به ارائه گزارش معیارها، نمودارها و دیگر نتایج آماری می‌پردازد و تفسیر نتایج در مرحله‌ی بعد انجام می‌شود.

موارد زیر در گام چهارم مورد توجه است:

۱- مرتب کردن داده‌ها

۲- معیارها و شاخص‌ها (شاخص‌های مرکزی یا پراکندگی)

۳- نمودارها و جدولها (نمودارهای دایره‌ای، میله‌ای، جعبه‌ای، میانگین و انحراف معیار)

برای توصیف داده‌های کمی از شاخص‌های مرکزی (میانه و میانگین) و شاخص‌های پراکندگی (دامنه تغییرات، انحراف معیار، دامنه میان چارکی) استفاده می‌شود.

◆ اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، استفاده از میانگین و انحراف معیار مناسب نیست و بهتر است از میانه و دامنه میان چارکی استفاده کنیم.

گام پنجم (بحث و نتیجه‌گیری)

در انتهای چرخه‌ی آمار و پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج برای مسئله پاسخی پیدا کنیم. بنابراین در این مرحله به تفسیر نتایج و نتیجه‌گیری با توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم می‌پردازیم.

◆ در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم. اگر تمام افراد جامعه را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما قطعی نیستند. برای انتخاب نمونه‌ای با اندازه n از جامعه‌ای با اندازه N از رابطه $\binom{N}{n}$ استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثال در یک جامعه با اندازه ۵۰۰ می‌توان نمونه‌های ۱۰۰تایی را به $\binom{500}{100}$ طریق مختلف انتخاب نمود.

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل:

در انجام یک مطالعه یا در جریان گام‌های حل مسئله مرتبط با آمار، آمارگیران باید از اهداف کلی مطالعه باخبر باشند، فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، باید ویژگیهای جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی بشناسد. در تمامی این مراحل لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را به خوبی بشناسیم. این امر بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه‌ی موضوع مورد بررسی ممکن نیست. کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه آمار بر گام‌های دیگر به شدت تاثیر می‌گذارد.

۸۳-تست: کدام گزینه جزء گام تحلیل داده‌ها در چرخه آمار محسوب نمی‌شود؟

۱) مرتب کردن داده‌ها　　۲) گزارش معیارها　　۳) تفسیر داده‌ها　　۴) ارائه نمودارها و جداول

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. تفسیر داده‌ها در گام بحث و نتیجه‌گیری است.

مثال ۸۴: جملات زیر را کامل کنید.

الف) ۵۰ درصد داده‌ها قبل از ....میانه...... و ۵۰ درصد آنها بعد از ....میانه...... قرار دارند.

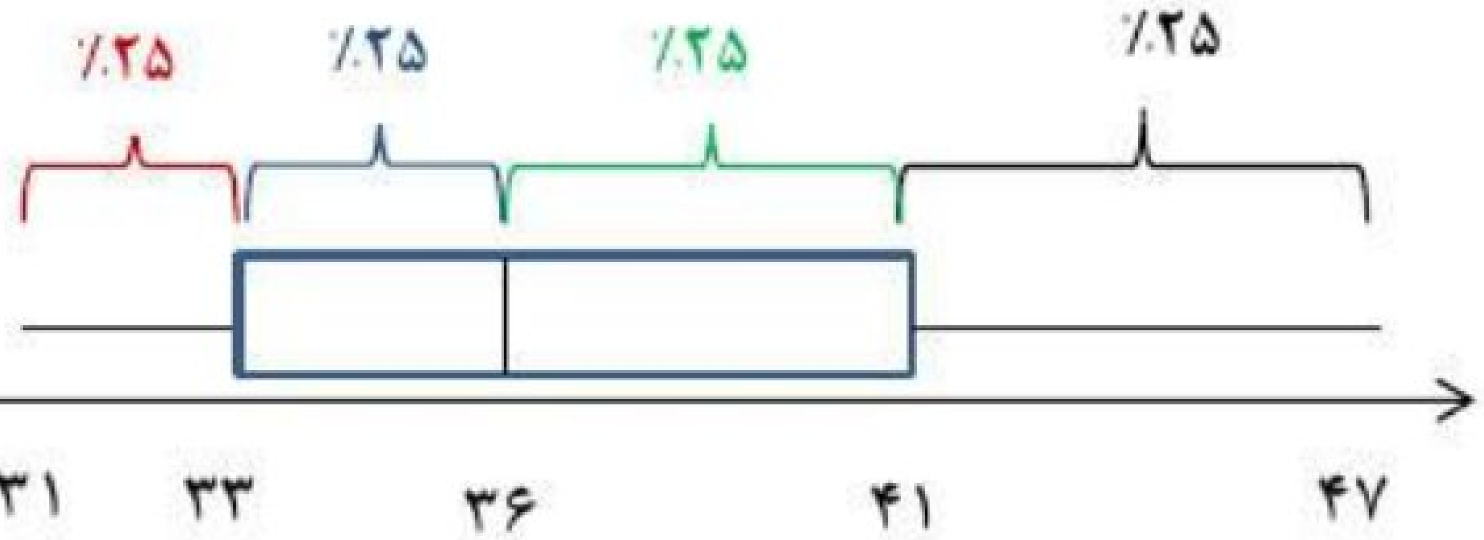
ب) ۲۵ درصد داده‌ها قبل از ....چارک اول...... قرار دارند و ۷۵ درصد داده‌ها قبل از ....چارک سوم...... قرار دارند.

ج) ۷۵ درصد از داده‌ها بعد از ....چارک اول...... قرار دارند و ۲۵ داده‌ها بعد از .... چارک سوم..... قرار دارند.

مثال ۸۵: در نمودار زیر به سوالات پاسخ دهید:

الف) ۲۵درصد داده‌ها از چه عددی کوچکترند؟

پاسخ: ۲۵ درصد داده‌ها از $Q_۱$ یعنی از ۳۳ کوچکترند.



ب) ۷۵ درصد داده‌ها از چه عددی کوچکترند؟

پاسخ: ۷۵ درصد داده‌ها از $Q_۳$ یعنی از ۴۱ کوچکترند.

ج) ۵۰ درصد داده‌ها از چه عددی بزرگترند؟

پاسخ: ۵۰ درصد داده‌ها به میانه داده‌ها اشاره می‌کند. ۵۰ درصد از داده‌ها از $Q_۲ = ۳۶$ بزرگترند.

مثال ۸۶: دامنه تغییرات، واریانس و انحراف معیار داده‌های مقابل را تعیین کنید.   ۱۸ ۱۶ ۱۴ ۲۰

پاسخ: دامنه تغییرات را با R نمایش می‌دهیم و از رابطه زیر بدست می‌آوریم:

$$R = max - min = ۲۰ - ۱۴ = ۶$$

برای بدست آوردن واریانس و انحراف معیار ابتدا باید میانگین اعداد را تعیین کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۱۸ + ۱۶ + ۱۴ + ۲۰}{۴} = \frac{۶۸}{۴} = ۱۷$$

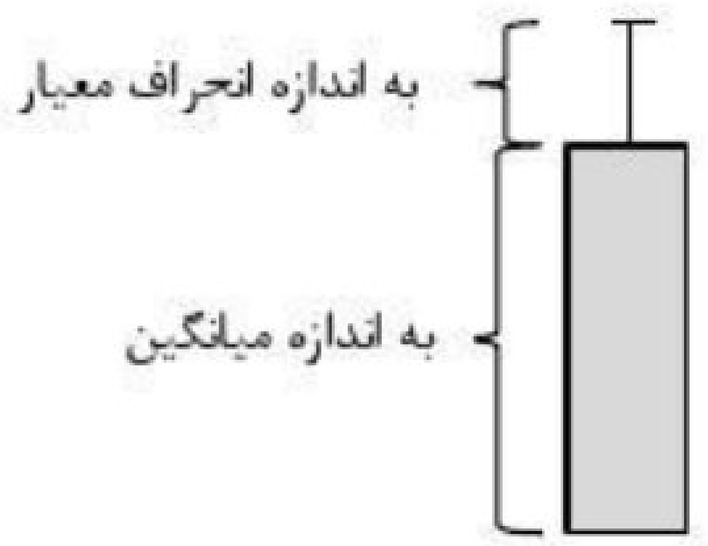
سپس واریانس که با نماد $\sigma^۲$ نشان داده می‌شود را از رابطه زیر بدست می‌آوریم:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_n - \bar{x})^۲}{n}$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۸ - ۱۷)^۲ + (۱۶ - ۱۷)^۲ + (۱۴ - ۱۷)^۲ + (۲۰ - ۱۷)^۲}{۴} = \frac{۱ + ۱ + ۹ + ۹}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

نمودار میانگین، انحراف معیار (نمودارجعبه، میله)

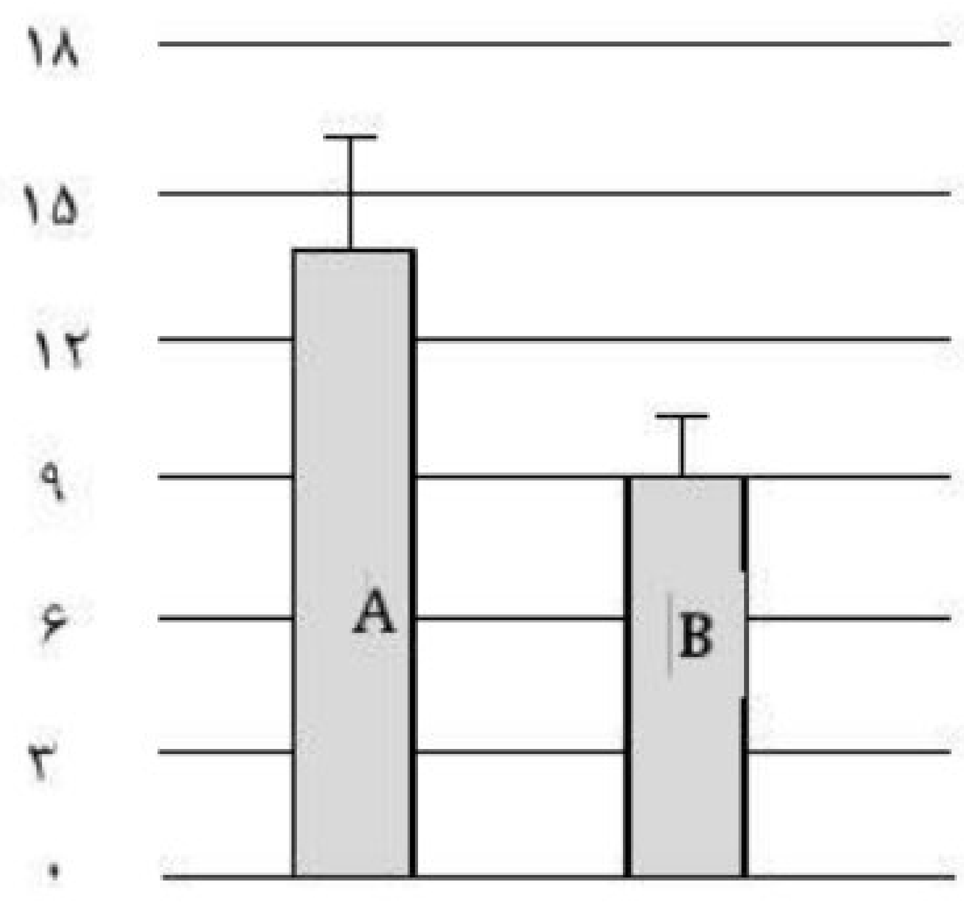
در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطای آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.



◆ دقت کنید اگر در بین داده‌ها، داده‌های دورافتاده وجود داشته باشد، استفاده تنها از نمودار میانگین و انحراف معیار نمی‌تواند کافی باشد بلکه باید از نمودار جعبه‌ای نیز استفاده کنیم. وجود داده‌های دورافتاده سبب می‌شود میانگین به سمت این داده‌ها کشیده شود گزارش بدست آمده از میانگین گمراه کننده باشد.

مثال۸۷: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های A به ترتیب برابر ۱۴ و ۲ و میانگین و انحراف معیار داده‌های B به ترتیب برابر ۹ و ۱/۵ باشد، نمودار میانگین و انحراف معیار داده‌ها را رسم کنید.

پاسخ: بلندی مستطیل A برابر ۱۴ و اندازه میله آن برابر ۲ واحد است. بلندی مستطیل B برابر ۹ و اندازه میله آن برابر ۱/۵ واحد است.



مثال۸۸: داده‌های زیر نمرات دانش‌آموزان یک کلاس است. نمودار میانگین و انحراف معیار رسم کنید.

۶　۱۰　۱۴　۱۶　۱۲　۷　۱۸　۱۱　۱۹　۱۷　۱۳

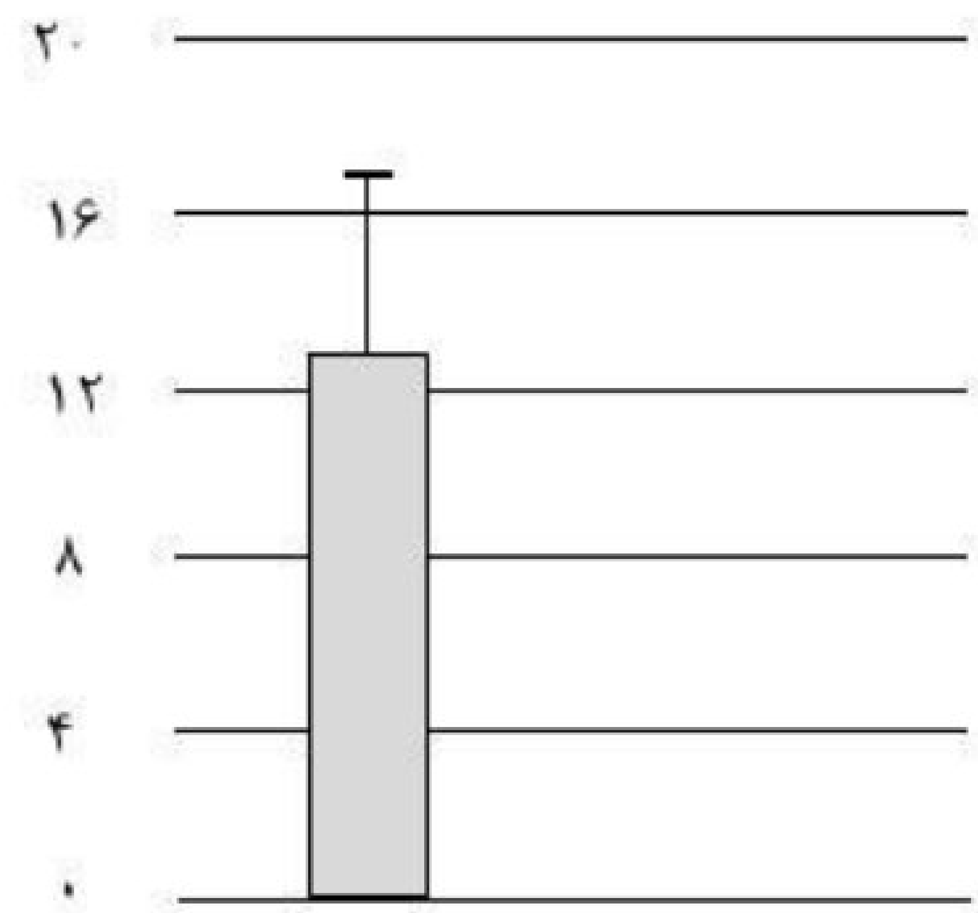
پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{۶+۱۰+۱۴+۱۶+۱۲+۷+۱۸+۱۱+۱۹+۱۷+۱۳}{۱۱} = \frac{۱۴۳}{۱۱} = ۱۳$$: میانگین

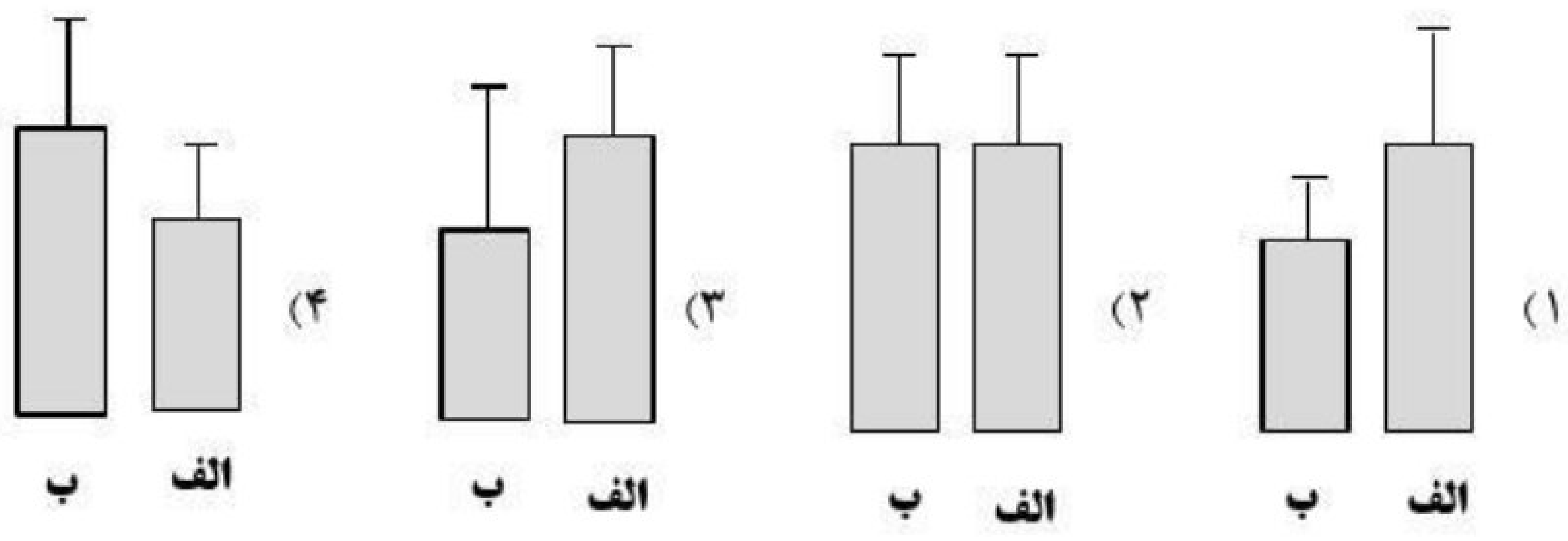
$$\sigma^{۲} = \frac{(۶-۱۳)^{۲} + (۱۰-۱۳)^{۲} + (۱۴-۱۳)^{۲} + (۱۶-۱۳)^{۲} + (۱۲-۱۳)^{۲} + \cdots + (۱۳-۱۳)^{۲}}{۱۱}$$

$$= \frac{۴۹+۹+۱+۹+۱+۳۶+۲۵+۴+۳۶+۱۶+۰}{۱۱} = \frac{۱۸۶}{۱۱} = ۱۶/۹$$

$$\to \sigma = \sqrt{۱۶/۹} = ۴/۱۱$$

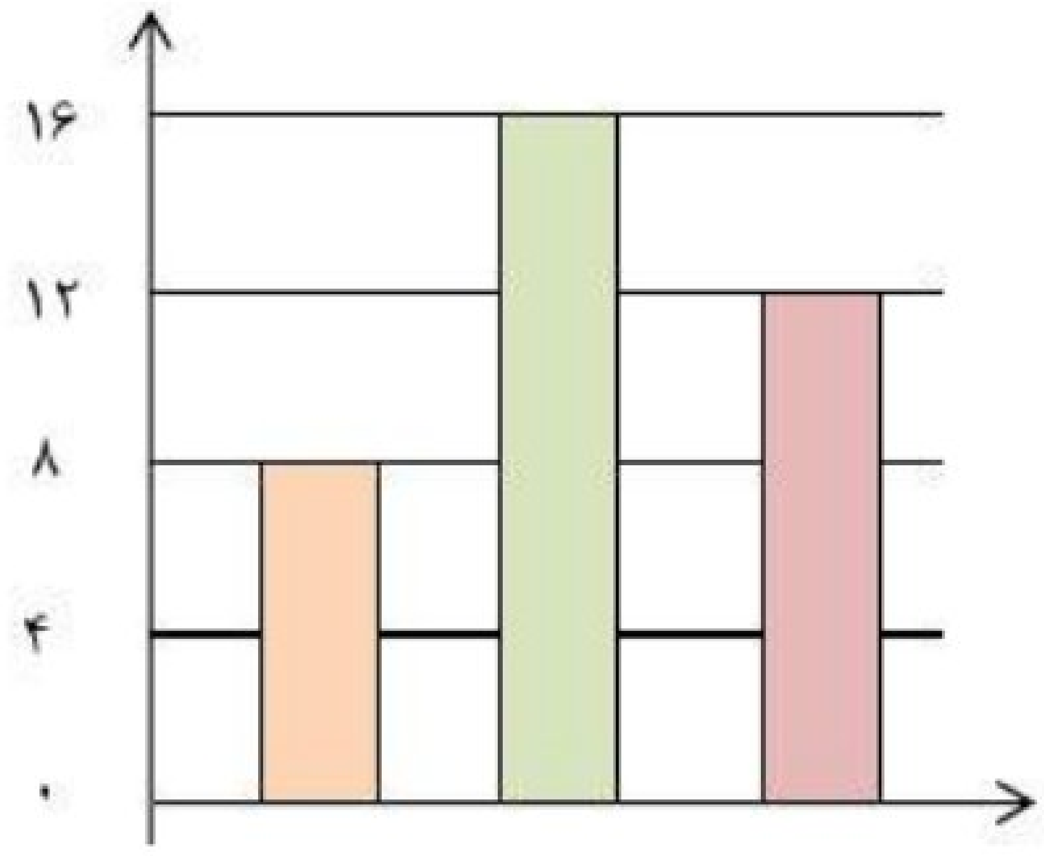


۸۹-تست: میانگین مجموعه (الف) از میانگین مجموعه (ب) و انحراف معیار مجموعه (ب) از انحراف معیار مجموعه (الف) بیشتر است کدام نمودار این وضعیت را نشان می‌دهد؟



پاسخ: گزینه ۳ صحیح است. در نمودار (۱) میانگین (الف) از (ب) بیشتر است اما انحراف معیار (ب) از نمودار (الف) کمتر است. در نمودار (۲) هر دو مساویند. در نمودار (۴) انحراف معیار (ب) از نمودار (الف) بیشتر است اما میانگین (الف) کمتر از (ب) است.

مثال ۹۰: در نمودار میله‌ای زیر تعداد دانش‌آموزانی که در فعالیتهای فوق برنامه مدرسه شرکت کرده‌اند نشان داده شده است، اگر هر یک از دانش‌آموزان فقط در یک فعالیت شرکت کرده باشند به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) تعداد دانش‌آموزانی که در فعالیت‌های فوق برنامه شرکت کرده‌اندرا تعیین کنید. $۸ + ۱۶ + ۱۲ = ۳۶$

ب) کدام فعالیت شرکت کننده بیشتری دارد؟ ورزشی

پ) با توجه به نمودار تعیین کنید هر یک از فعالیتها چند درصد از کل شرکت کننده‌ها را به خود اختصاص داده‌اند؟

پاسخ: برای پیدا کردن درصد باید تعداد هر قسمت را به کل تقسیم کنیم سپس حاصل را در ۱۰۰ ضرب کنیم.

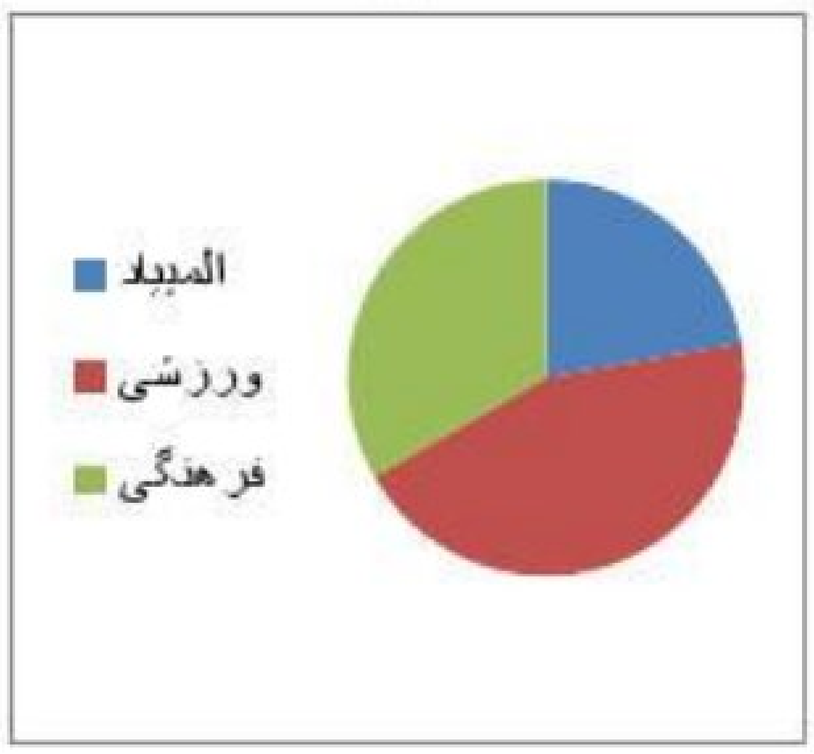
فرهنگی: $\frac{۱۲}{۳۶} \times ۱۰۰ = ۳۳/۳$ ورزشی: $\frac{۱۶}{۳۶} \times ۱۰۰ = ۴۴/۴$ المپیاد: $\frac{۸}{۳۶} \times ۱۰۰ = ۲۲/۲$

ت) نمودار دایره‌ای مربوط به اطلاعات داده شده را رسم کنید.

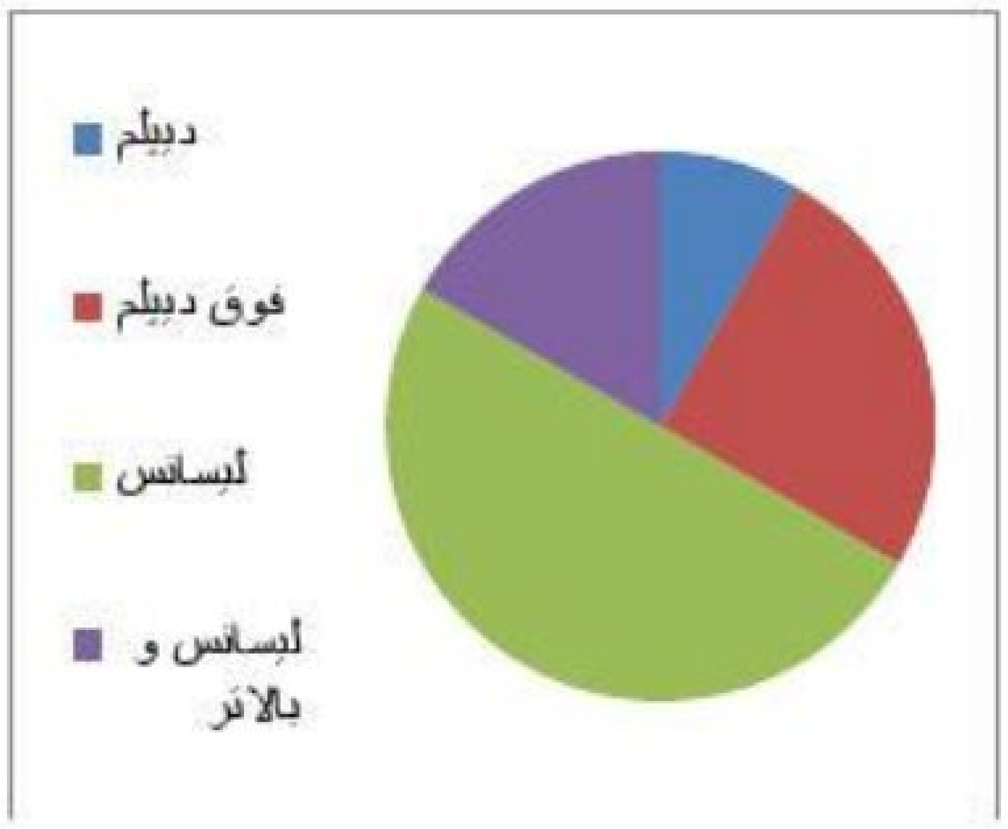
پاسخ: ابتدا باید زاویه مرکزی مربوط به هر قسمت را پیدا کنیم. برای این کار تعداد مربوط به هر قسمت را به کل داده‌ها تقسیم کرده سپس حاصل را در ۳۶۰ درجه ضرب می‌کنیم.

$$\text{زاویه مرکزی} = \frac{\text{فراوانی هر قسمت}}{\text{فراوانی کل}} \times ۳۶۰^\circ$$

فرهنگی: $\frac{۱۲}{۳۶} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ ورزشی: $\frac{۱۶}{۳۶} \times ۳۶۰^\circ = ۱۶۰^\circ$ المپیاد: $\frac{۸}{۳۶} \times ۳۶۰^\circ = ۸۰^\circ$



مثال ۹۱: با توجه به اطلاعات داده شده که در مورد سطح تحصیلات افراد شاغل در یک شرکت خصوصی است جدول فراوانی زیر را به صورت مناسب پرکنید، سپس نمودار میله‌ای مربوط به آن را رسم کنید.



سطح تحصیلات	فراوانی	زاویه مرکزی
دیپلم		۳۰°
فوق دیپلم		۹۰°
لیسانس		۱۸۰°
بالاتر از لیسانس		۶۰°

تعداد کل افراد = ۳۶

پاسخ: از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

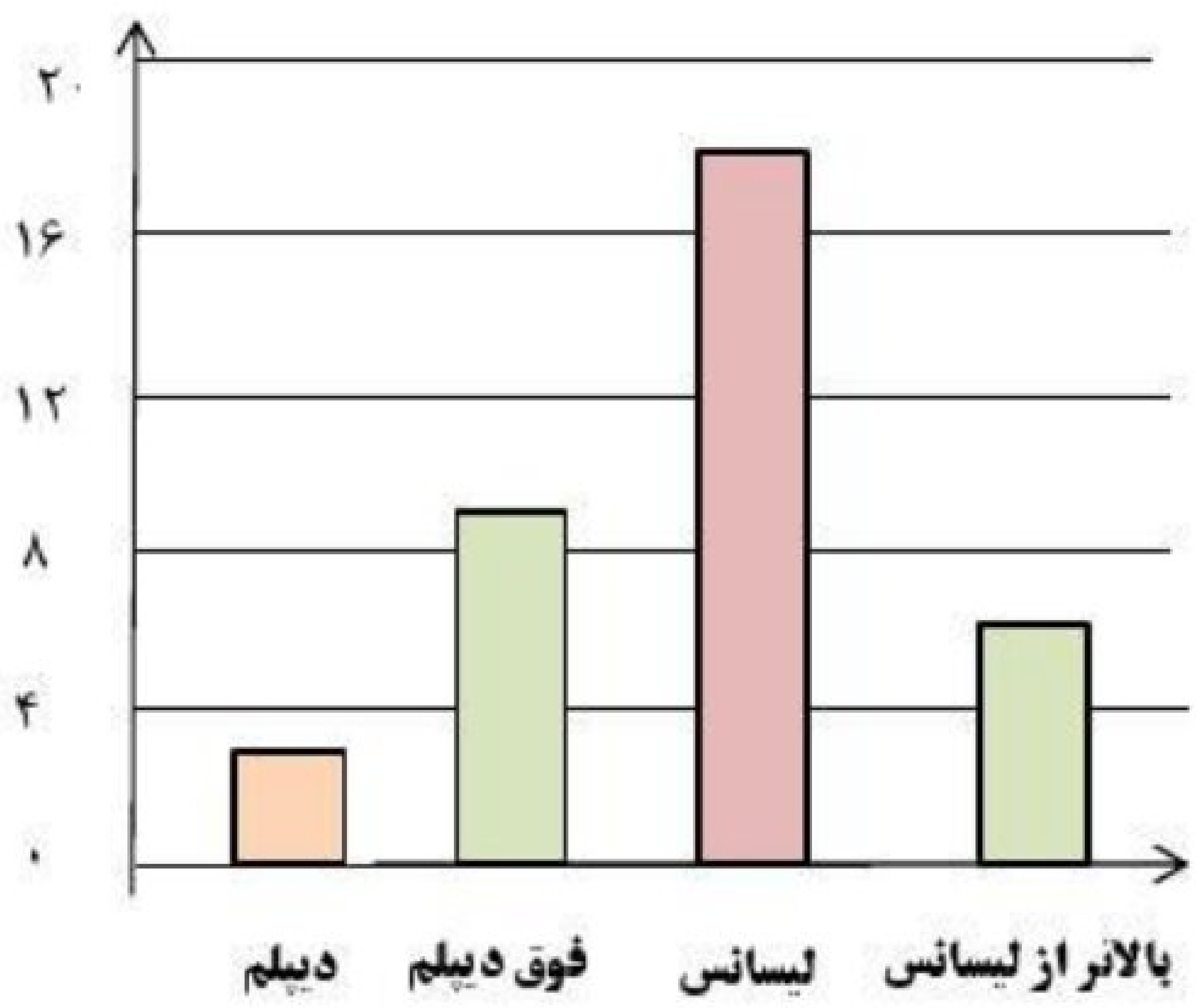
$$\frac{\text{فراوانی هر قسمت}}{\text{فراوانی کل}} = \frac{\text{زاویه مرکزی}}{۳۶۰^\circ}$$

دیپلم : $\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow \frac{۱}{۱۲} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow ۱۲x = ۳۶ \Rightarrow x = ۳$

فوق دیپلم : $\frac{۹۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow ۴x = ۳۶ \Rightarrow x = ۹$

لیسانس : $\frac{۱۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow ۲x = ۳۶ \Rightarrow x = ۱۸$

بالاتر از لیسانس : $\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow \frac{۱}{۶} = \frac{x}{۳۶} \Rightarrow ۶x = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$



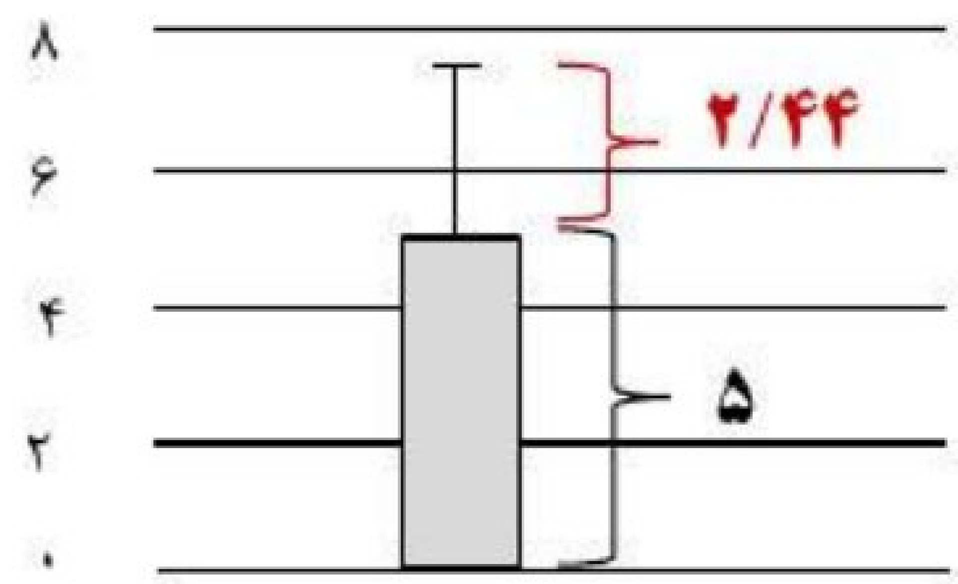
مثال۹۲: برای داده‌های زیر نمودار میانگین و انحراف معیار رسم کنید. ۹ و ۶ و ۵ و ۳ و ۲

$$\bar{x} = \frac{۲+۳+۵+۶+۹}{۵} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$: میانگین

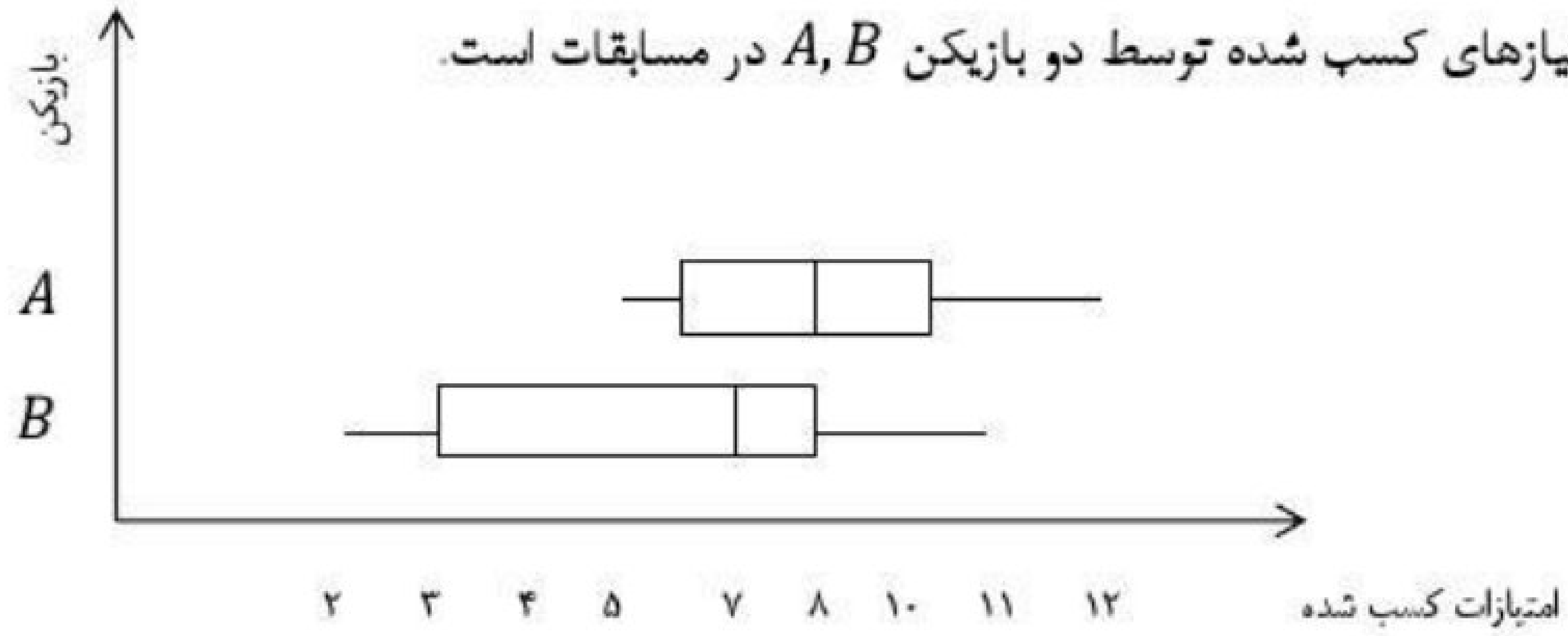
$$\sigma^{۲} = \frac{(۲-۵)^{۲} + (۳-۵)^{۲} + (۵-۵)^{۲} + (۶-۵)^{۲} + (۹-۵)^{۲}}{۵}$$

$$= \frac{۹ + ۴ + ۰ + ۱ + ۱۶}{۵} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{۶} = ۲/۴۴$$



مثال۹۳: نمودار زیر نشان‌دهنده‌ی امتیازهای کسب شده توسط دو بازیکن A, B در مسابقات است.



الف) پراکندگی امتیازات دو نفر را با استفاده از دامنه تغییرات مقایسه کنید. پراکندگی امتیازات B بیشتر است.

$R_A = max - min = ۱۲ - ۵ = ۷$ $\qquad$ $R_B = max - min = ۱۱ - ۲ = ۹$

ب) میانه نمودار B را تعیین کنید. $Q_{۲} = ۷$

ج) اگر یک مربی تیم ورزشی بخواهد از بین این دو نفر یکی را انتخاب کند، با توجه به نمودار بالا، مربی ترجیح می‌دهد کدام بازیکن را انتخاب کند؟ چرا؟ بازیکن A راترجیح می‌دهد انتخاب کند زیرا پراکندگی امتیازات او کمتر است و عملکرد بهتری دارد.

د) در کدام نمودار مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌تر است؟ نمودار امتیازات بازیکن A (زیرا متقارن‌تر است)

سوالات امتحان نهایی:

۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (هر مورد (۰/۲۵))

الف) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، گام .... سوم ... در چرخه آمار است.

ب) اگر در داده‌ها داده دورافتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی ... دامنه میان چارکی ... مناسب است.

ج) داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم،گام ... سوم (گردآوری و پاکسازی) ... چرخه آمار است.

د) مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر ... کمی ... نمودار جعبه‌ای است.

ه) هنگامی که داده دورافتاده نداشته باشیم، میانگین و ... انحراف معیار ... شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند.

و) برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش ... تعداد ... همراه باشد.

۲- با توجه به چرخه آماری، نام هر گام را بنویسید.(۰/۵)

الف) راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.

طرح و برنامه‌ریزی

ب) نتایج به دست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم. بحث و نتیجه‌گیری

۳- در نمونه گیری زیر میزان مصرف آب ۹ خانوار در یک دوره (بر حسب متر مکعب) به دست آمده است. میانه، چارک اول و چارک سوم را مشخص کنید. (۱/۵)

۱۱۰ , ۷۰ , ۳۰ , ۵۰ , ۱۲۰ ,۷۵ ,۶۵ ,۱۳, ۴۰

پاسخ: داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۳۰ , ۴۰ , ۵۰ , ۶۵ , ۷۰ ,۷۵ , ۱۱۰ , ۱۲۰ , ۱۳۰

چارک اول: $۴۵ = \frac{۴۰+۵۰}{۲}$

میانه: ۷۰

چارک سوم : $۱۱۵ = \frac{۱۱۰+۱۲۰}{۲}$

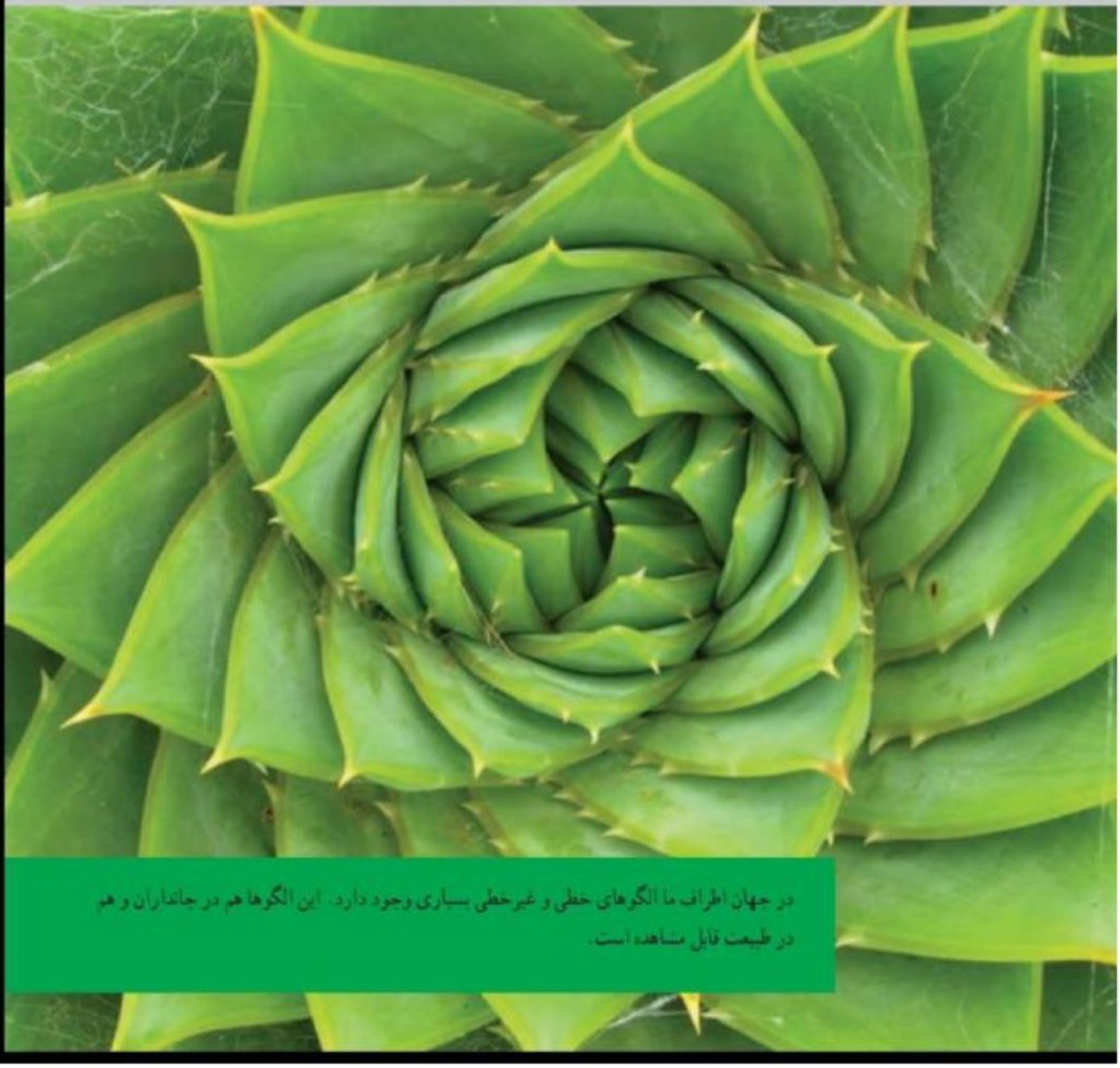
فصل ۲ـ الگوهای خطی

درس ۱ مدل‌سازی و دنباله

درس ۲ دنبالهٔ حسابی

إنَّ فی خلق السَّمٰواتِ وَالأرضِ وَ اختِلافِ الَّیلِ و النَّهارِ لَأیاتٍ لِأولِي الالبَاب (آیهٔ ۱۹۰ سورهٔ مبارکه آل عمران)

«و مسلماً در آفرینش آسمان‌ها و زمین و آمدورفت شب و روز نشانه‌های (روشنی) برای خردمندان است»



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

درس ۱ : مدل‌سازی و دنباله

در سال گذشته با مدل‌سازی بعضی از توابع و مسائلی از دنیای واقعی آشنا شدید. در مواجهه با مسائل مختلف با توجه به شرایط موجود، دامنه‌ی متغیر مورد نظر می‌تواند مجموعه اعداد حقیقی یا مجموعه اعداد طبیعی باشد. به مثالهای زیر توجه کنید.

یادآوری:

تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای است بین این دو مجموعه که در آن به هر عضو از مجموعه A دقیقا یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود.

$$\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$$

دامنه تابع: به مجموعه‌ای از مقادیرکه تابع به ازای آنها تعریف می‌شود دامنه تابع گویند، آن را با D_f نمایش می‌دهند. (مجموعه ورودی‌های تابع)

برد تابع: به مجموعه مقادیر تابع (مجموعه خروجی‌های تابع) برد تابع گویند، آن را با R_f نمایش می‌دهند.

■**تذکر:** در مسائلی که پیش رو دارید گاهی از مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و گاهی از مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ استفاده می‌کنیم. با توجه به داده‌های مسئله، اگر متغیر به تعداد یا مقادیر شمارشی طبیعی (... ، ۱، ۲،۳) اشاره کند از $\mathbb{N}$ استفاده می‌کنیم اما اگر متغیر مورد نظر در یک فاصله یا محدوده تعریف شود که بتواند تمام اعداد گویا و گنگ را اختیار کند از $\mathbb{R}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

الف) مساحت مربعی به ضلع a □ $\mathbb{N}$ ■ $\mathbb{R}$

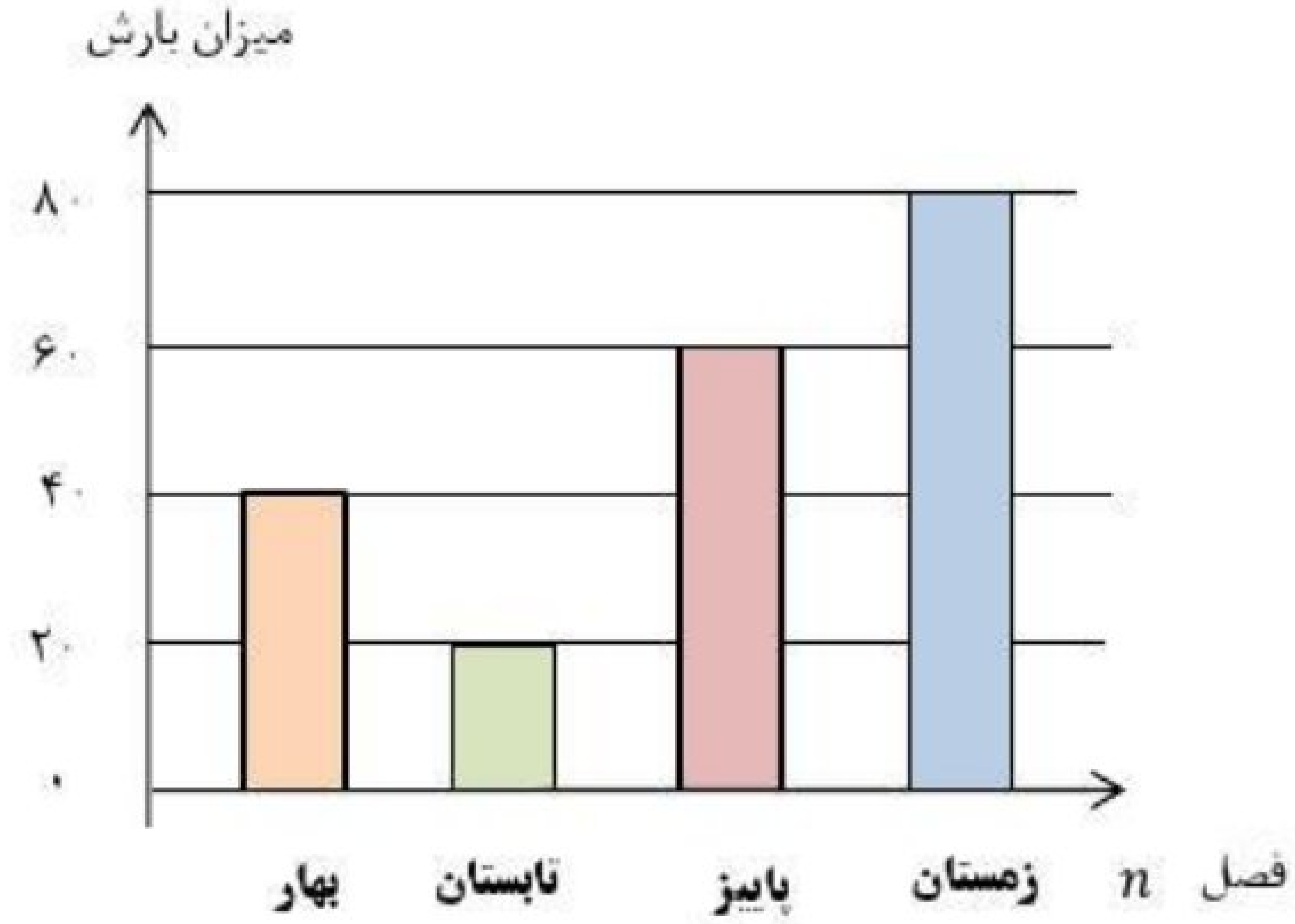
ب) تعداد ورزشکاران شرکت کننده در مسابقات المپیک   ■ $\mathbb{N}$ □ $\mathbb{R}$

ج) تعداد مراجعین به مطب یک پزشک در طول یک روز   ■ $\mathbb{N}$ □ $\mathbb{R}$

د) سرعت لحظه‌ای یک دونده در مسابقات   □ $\mathbb{N}$ ■ $\mathbb{R}$

ه) تعداد درختان یک پارک محلی   ■ $\mathbb{N}$ □ $\mathbb{R}$

مثال ۲: نمودار میله‌ای زیر، میزان بارش باران بر حسب میلی‌متر را در ۴ فصل یک سال نمایش می‌دهد. (به فصلهای سال به ترتیب از بهار تا زمستان اعداد ۱ تا ۴ را نسبت می‌دهیم)



الف) جدول را کامل کنید.

n	۱	۲	۳	۴
$f(n)$	۴۰	۲۰	۶۰	۸۰

ب) دامنه و برد تابع را تعیین کنید.

پاسخ: $D_f = \{n \in \mathbb{N} | ۱ \leq n \leq ۴\}$

$$R_f = \{۲۰, ۴۰, ۶۰, ۸۰\}$$

ج) ضابطه تابع را بنویسید.

پاسخ: ضابطه تابع از دو قسمت تشکیل می‌شود، ضابطه اول مربوط به بهار و تابستان و ضابطه دوم مربوط به پاییز و زمستان است. برای تعیین ضابطه اول از مختصات دو نقطه $A(۱,۴۰), B(۲,۲۰)$ استفاده می‌کنیم. ابتدا شیب خط را بدست می-آوریم: $m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴۰ - ۲۰}{۱ - ۲} = -۲۰$

سپس با استفاده از مختصات نقطه $A(۱,۴۰)$ و شیب خط معادله را می‌نویسیم. $y - y_۱ = m(x - x_۱)$

$$y - ۴۰ = -۲۰(x - ۱) \rightarrow y - ۴۰ = -۲۰x + ۲۰$$

$$y = -۲۰x + ۲۰ + ۴۰ \rightarrow y = -۲۰x + ۶۰$$

برای تعیین ضابطه دوم از مختصات دو نقطه $C(۳,۶۰), D(۴,۸۰)$ استفاده می‌کنیم. ابتدا شیب خط را بدست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۸۰-۶۰}{۴-۳} = ۲۰$$

سپس با استفاده از مختصات نقطه $C(۳,۶۰)$ و شیب خط معادله را می‌نویسیم. $y - y_۱ = m(x - x_۱)$

$$y - ۶۰ = ۲۰(x - ۳) \rightarrow y - ۶۰ = ۲۰x - ۶۰$$

$$y = ۲۰x - ۶۰ + ۶۰ \rightarrow y = ۲۰x$$

در ضابطه تابع به جای متغیر x ، n را جاگذاری می‌کنیم.

$$f(n) = \begin{cases} -۲۰n + ۶۰ & ۱ \leq n \leq ۲ \\ ۲۰n & ۳ \leq n \leq ۴ \end{cases}$$

مثال ۳: ضابطه تابع خطی $f(x) = ۳x - ۲$ مفروض است :

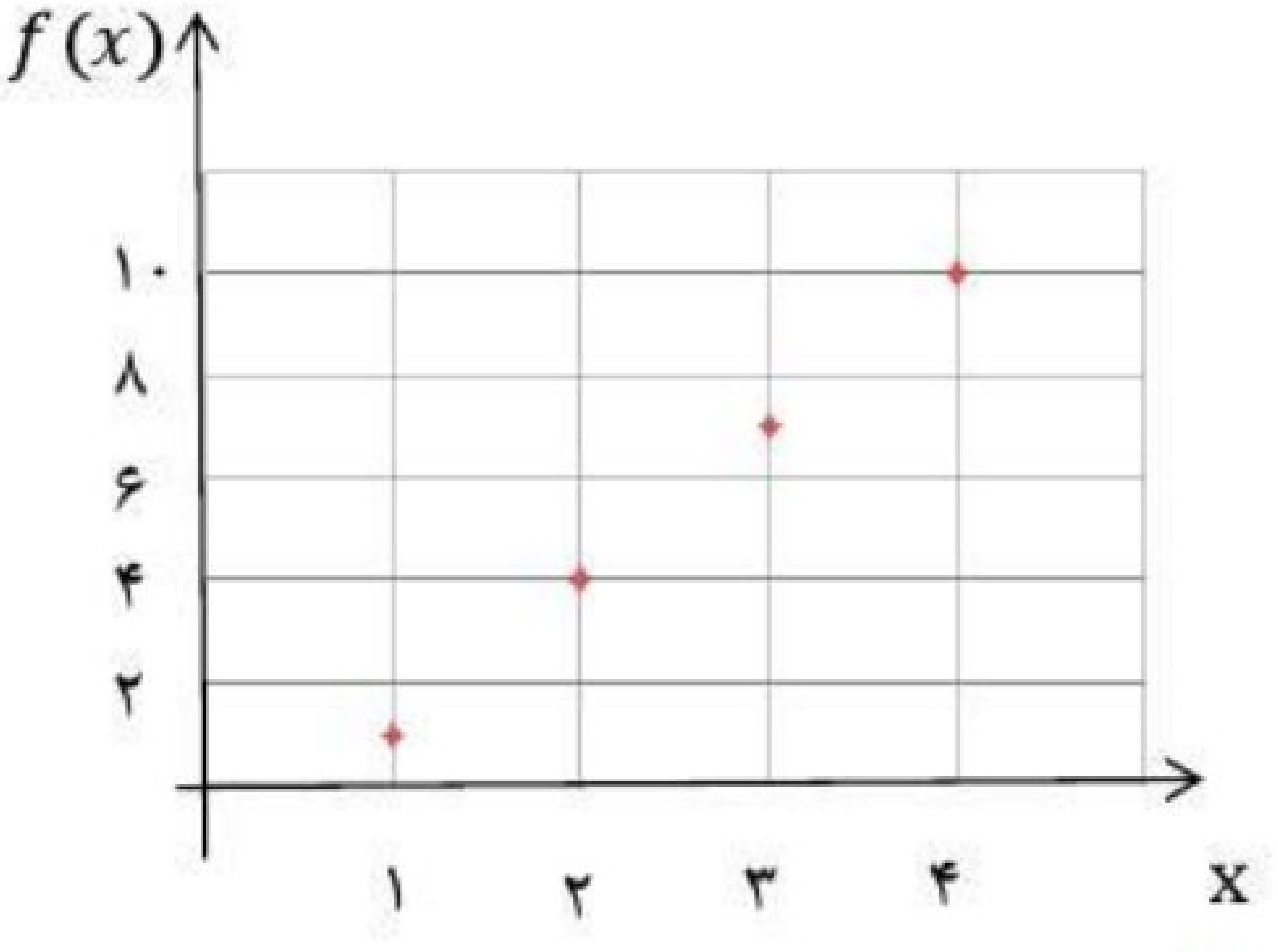
الف) جدول زیر را کامل کنید.

پاسخ الف)

x	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۱	۴	۷	۱۰

ب) نمودار تابع را با دامنه مجموعه اعداد طبیعی رسم کنید.

پاسخ ب): با توجه به اینکه دامنه تابع اعداد طبیعی است بنابراین نمودار به صورت نقطه‌ای رسم می‌شود و متغیر x فقط می‌تواند اعداد $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,۴,...\}$ را انتخاب کند. در این حالت برد تابع برابر است با:

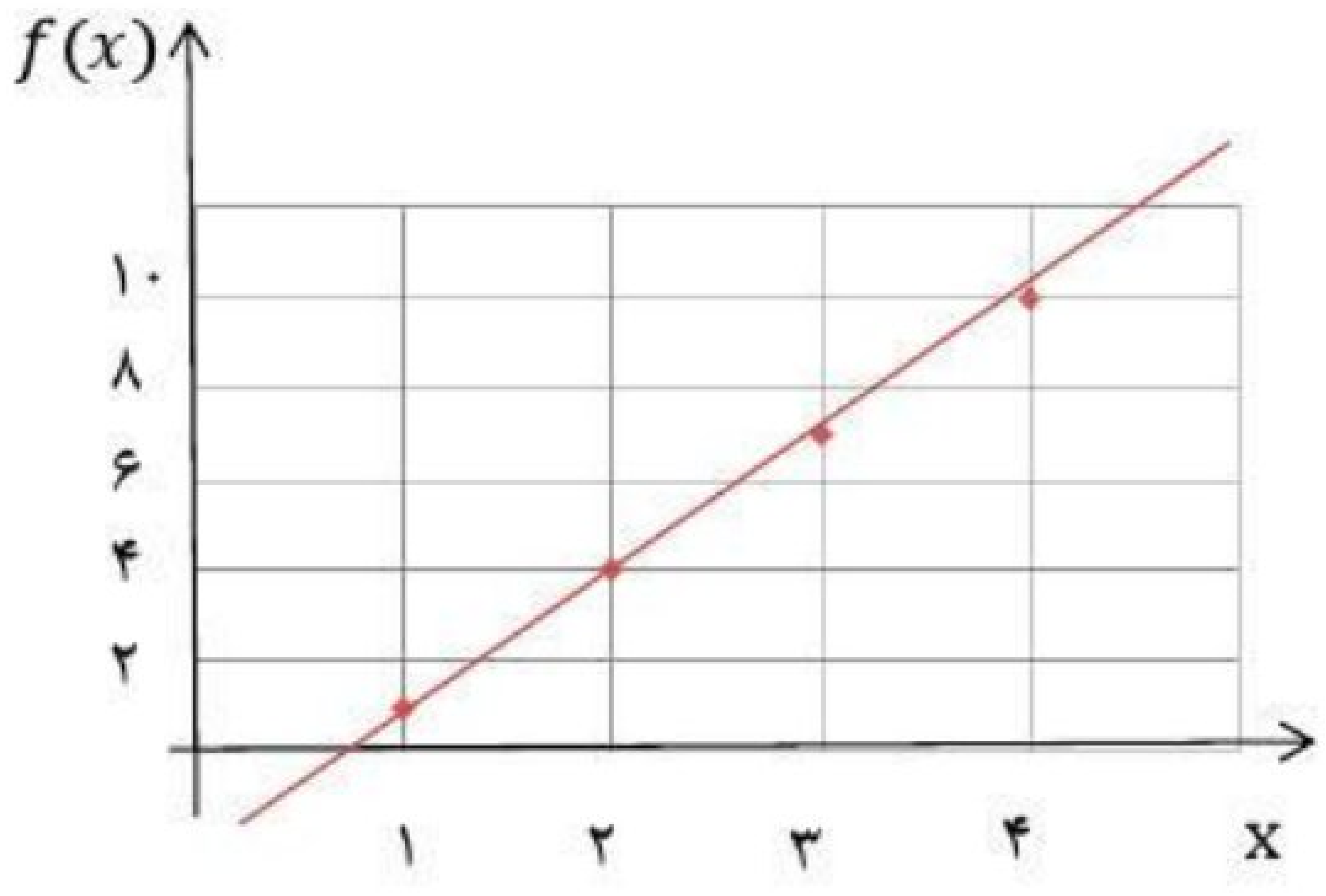


$$R_f = \{۱,۴,۷,۱۰\}$$

ج) نمودار تابع را با دامنه مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) رسم کنید.

پاسخ ج): در این قسمت که دامنه تابع اعداد حقیقی است، نمودار به صورت یک خط راست رسم می‌شود و متغیر x می‌تواند تمام اعداد حقیقی را دریافت کند.

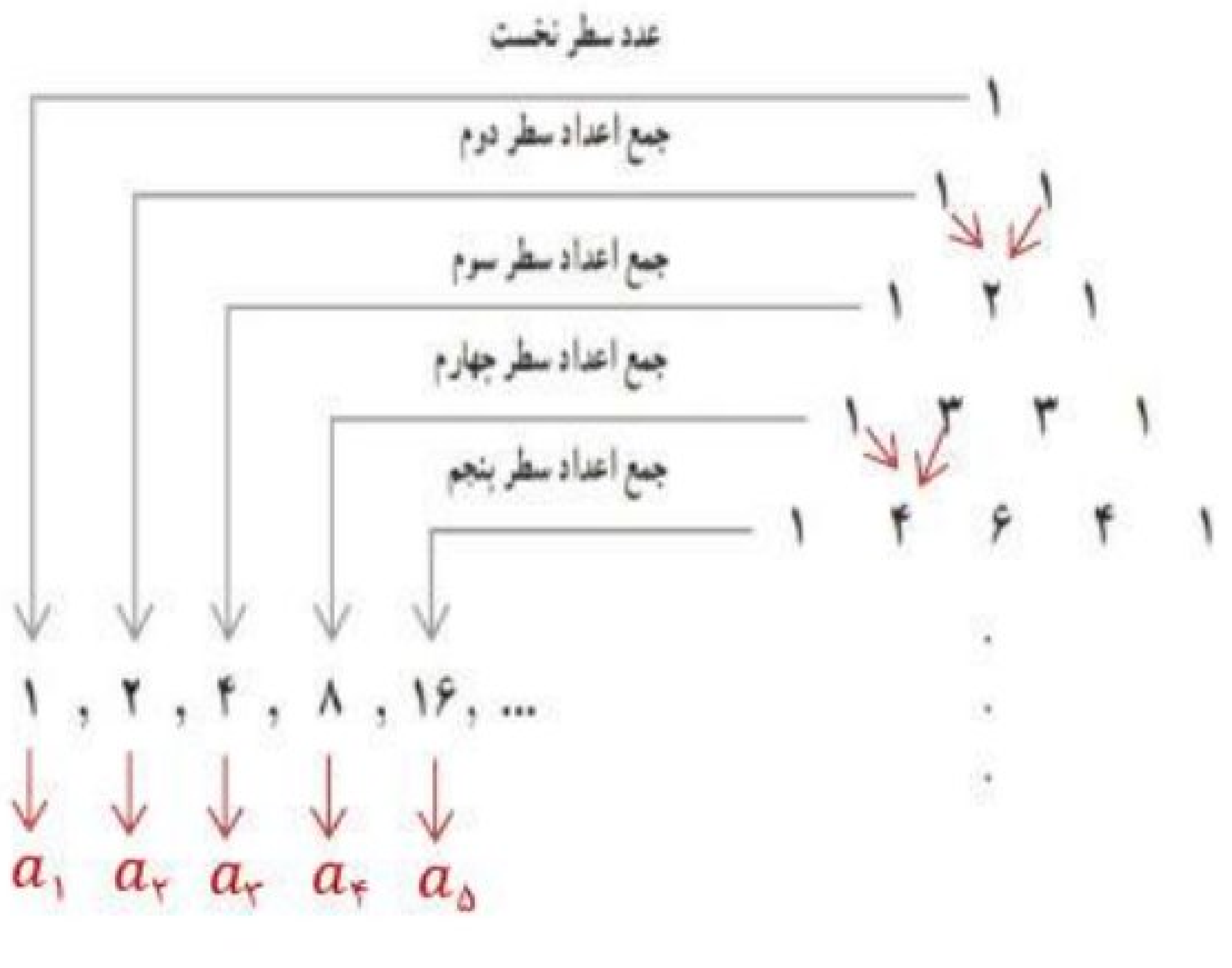
در این حالت برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است.



مثلث خیام:

در سالهای گذشته با الگوها و روابط بین آنها آشنا شده‌اید. در این بخش از کتاب الگوهای جدیدتری از اعداد به شما معرفی می‌شود.

شکل مثلثی زیر که در هر سطر آن جملات ابتدایی و انتهایی برابر یک است را مثلث خیام می‌نامند. در این مثلث به غیر از عضوهای ابتدایی و انتهایی هر سطر، هر یک از اعداد سطر پایینی از جمع دو عدد متوالی سطر بالایی بدست می‌آید. در سمت چپ شکل به وسیله فلش‌هایی مجموع اعداد هر سطر نوشته شده است. این اعداد جملات یک الگو هستند.



این مثلث در محاسبات و بخش‌های مختلف ریاضی کاربردهای فراوانی دارد اما در این بخش، ما به مجموع اعداد هر سطر و رابطه آن با مجموع اعداد سطرهای دیگر توجه کرده و روابط و الگوهای موجود در آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اگر شماره هر سطر را n و جمع اعداد هر سطر را a_n (جمله n ام الگو) فرض کنیم می‌توانیم بنویسیم:

جمله اول الگو : $a_1 = 1$ جمله دوم الگو : $a_2 = 2$ جمله سوم الگو : $a_3 = 4$

جمله چهارم الگو : $a_4 = 8$ جمله پنجم الگو : $a_5 = 16$ ...

مثال ۴:

الف) اعداد سطر ششم و هفتم مثلث را بنویسید.

پاسخ: اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام به ترتیب به صورت مقابل است: ۱   ۵   ۱۰   ۱۰   ۵   ۱

۱   ۶   ۱۵   ۲۰   ۱۵   ۶   ۱

ب) با جمع کردن اعداد سطر ششم و هفتم، جملات ششم و هفتم الگو را تعیین کنید.

پاسخ: مجموع اعداد سطر ششم : $1+5+10+10+5+1=32$ بنابراین $a_6 = 32$

مجموع اعداد سطر هفتم : $1+6+15+20+15+6+1=64$ بنابراین $a_7 = 64$

ج) با بررسی جملات الگو چه رابطه‌ای بین جملات متوالی می‌توانید بنویسید؟

پاسخ: هر جمله دو برابر جمله قبلی خود است. به عنوان مثال a_7 دو برابر a_6 است. برای بقیه جملات نیز این قانون برقرار است و برای نوشتن هر جمله نیاز به جمله قبلی است. $a_1 = 1 \rightarrow a_2 = 2a_1 \rightarrow a_3 = 2a_2$

$$a_4 = 2a_3 \;,\; a_5 = 2a_4 \;,\; a_6 = 2a_5 \;,\; a_7 = 2a_6$$

د) به طور کلی با توجه به قسمت قبل چه رابطه‌ای بین a_n و a_{n+1} وجود دارد؟

پاسخ: a_n جمله قبل از a_{n+1} است پس می‌توان نوشت: $a_{n+1} = 2a_n \;,\; a_1 = 1$

به این رابطه **رابطه بازگشتی** گویند.

و) آیا می‌توانید رابطه‌ای پیدا کنید که در آن بدون استفاده از جمله‌ی قبل جمله‌ای از دنباله را بدست آورید؟

پاسخ: بله، جملات این الگو همه توانهایی از عدد ۲ هستند که به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$a_۱ = ۲^۰ = ۱$$

$$a_۲ = ۲^۱ = ۲$$

$$a_۳ = ۲^۲ = ۴$$

$$a_۴ = ۲^۳ = ۸$$

$$a_۵ = ۲^۴ = ۱۶$$

$$a_۶ = ۲^۵ = ۳۲$$

با دقت در شماره جملات و توانهای عدد ۲ می‌توان نوشت: $a_n = ۲^{n-۱} \quad , n \in \mathbb{N}$

ز) با توجه به مثلث خیام جدول زیر را کامل کنید.

شماره سطر n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مجموع اعداد سطر a_n	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲

مثال۵: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) در بسیاری از مسائل واقعی، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان‌پذیر نباشد. درست

ب) دامنه مطالعه تعداد شرکت کنندگان در مسابقه نوجوان خوارزمی در یک مدرسه مجموعه اعداد طبیعی است. درست

ج) در مطالعه‌ی میزان مصرف گاز شهری در طول یک ماه برای یک خانواده دامنه‌ی تابع مورد نظر اعداد طبیعی است. نادرست

د) در مثلث خیام مجموع اعداد سطر پنجم برابر ۳۲ است. نادرست $n = ۵ \rightarrow ۲^{۵-۱} = ۲^۴ = ۱۶$

ه) در مثلث خیام مجموع اعداد سطر هشتم برابر ۱۲۸ است. درست $n = ۸ \rightarrow ۲^{۸-۱} = ۲^۷ = ۱۲۸$

دنباله:

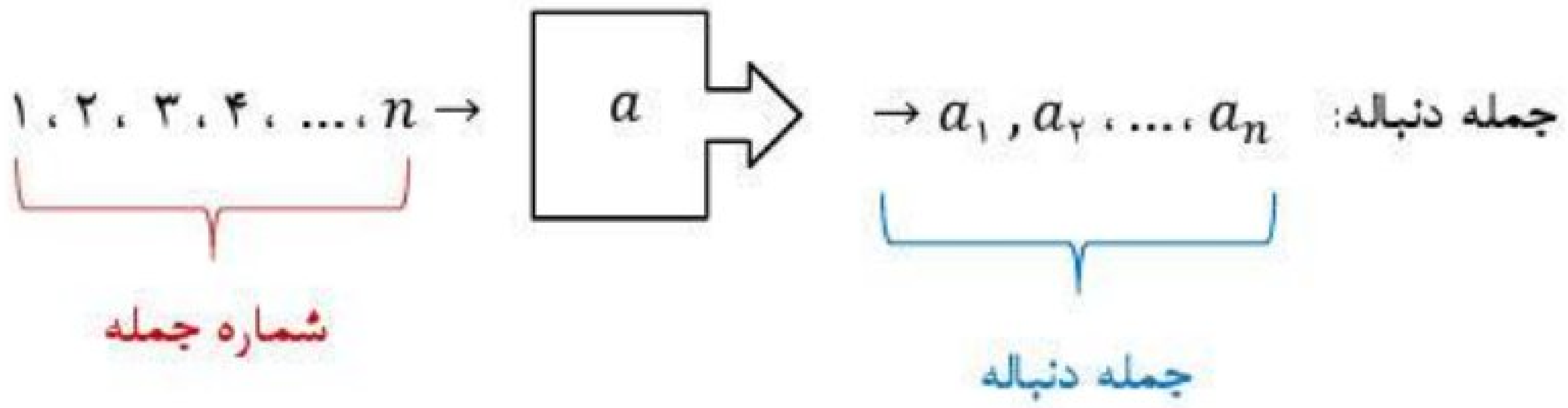
به تعدادی از اعداد حقیقی که پشت سر هم قرار دارند دنباله گویند. جملات دنباله را معمولا به صورت $a_۱ , a_۲, \dots, a_n$ نمایش می‌دهند. a_n را جمله n ام دنباله گویند که برای بدست آوردن آن به جستجوی قانون یا رابطه بین جملات می‌پردازیم. برای بدست آوردن مقدار a_n یا جمله عمومی دنباله از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد:

۱- رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)

۲- رابطه‌ای بر حسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله)

■ در تعریف دیگر هر دنباله عددی را می‌توان تابعی مانند a با دامنه اعداد طبیعی و برد اعداد حقیقی در نظر گرفت که با گرفتن شماره جمله طبیعی n به عنوان ورودی، جملات حقیقی $a_۱ , a_۲ ,\dots, a_n$ به عنوان خروجی بدست می‌آید.

$$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

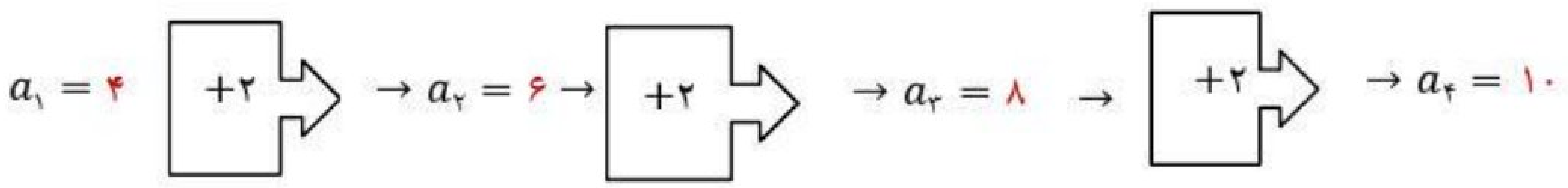


مثال ۶: با توجه به رابطه‌ی بازگشتی زیر ۴ جمله اول دنباله‌ها را بنویسید.

$$a_۱ = ۴ \text{ با } a_{n+۱} = a_n + ۲$$

پاسخ: با توجه به رابطه بازگشتی دنباله، می‌توان فهمید با شروع از عدد ۴ ، با جمع کردن هر جمله با عدد ۲ جمله بعدی بدست می‌آید. (a_n جمله‌ی قبل از $a_{n+۱}$ است)

این رابطه بازگشتی مانند ماشینی عمل می‌کند که یک جمله را به عنوان ورودی می‌گیرد و ۲ واحد به آن اضافه می‌کند تا جمله بعدی به دست آید. این عمل پشت سرهم تکرار می‌شود.



راه دیگر آن است که مستقیما در رابطه داده شده به جای n اعداد طبیعی را جاگذاری کنیم. برای تعیین ۳ جمله‌ی بعد با گذاشتن $n = ۱$ شروع می‌کنیم. جوابهای بدست آمده از هر دو روش یکسان است.

$$a_۱ = ۴$$

$$n = ۱ \to a_{۱+۱} = a_۱ + ۲ \to a_۲ = ۴ + ۲ = ۶$$

$$n = ۲ \to a_{۲+۱} = a_۲ + ۲ \to a_۳ = ۶ + ۲ = ۸$$

$$n = ۳ \rightarrow a_{۳+۱} = a_۳ + ۲ \rightarrow a_۴ = ۸ + ۲ = ۱۰$$

پس چهار جمله اول دنباله به صورت مقابل است: ... ، ۱۰ ، ۸ ، ۶ ، ۴

مثال ۷: پنج جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+۱} = -a_n + ۳$ اگر $a_۱ = a_۲ = ۶$ را تعیین کنید.

پاسخ: در این دنباله اگر هر جمله را قرینه کنیم، سپس ۳ واحد به آن اضافه می‌کنیم، جمله بعدی به دست می‌آید. چون جمله‌ی اول و دوم داده شده با گذاشتن $n = ۲$ می‌توانیم به جمله ی سوم برسیم:

$$a_۱ = ۶$$

$$a_۲ = ۶$$

$$n = ۲ \rightarrow a_{۲+۱} = -a_۲ + ۳ \rightarrow a_۳ = -۶ + ۳ = -۳ \rightarrow a_۳ = -۳$$

$$n = ۳ \rightarrow a_{۳+۱} = -a_۳ + ۳ \rightarrow a_۴ = -(-۳) + ۳ = ۳ + ۳ = ۶ \rightarrow a_۴ = ۶$$

$$n = ۴ \rightarrow a_{۴+۱} = -a_۴ + ۳ \rightarrow a_۵ = -۶ + ۳ = -۳ \rightarrow a_۵ = -۳$$

مثال۸: رابطه‌ی بازگشتی مربوط به دنباله‌های زیر را بنویسید.

الف) .... ، ۱۹ ، ۱۵ ، ۱۱ ، ۷ ، ۳

پاسخ: با توجه به جملات دنباله می‌توان فهمید با شروع از عدد ۳ ، هر جمله را با عدد ۴ جمع کنیم، جمله بعدی به دست می‌آید. این رابطه را به زبان ریاضی تبدیل می‌کنیم: $a_{n+۱} = a_n + ۴ \ , \ a_۱ = ۳$

ب) .... ، ۱۶۲ ، ۵۴ ، ۱۸ ، ۶ ، ۲

پاسخ: با دقت در جملات متوجه می‌شویم با شروع از عدد ۲، هر جمله در عدد ۳ ضرب شود، جمله بعدی به دست می‌آید. پس:

$$a_{n+۱} = ۳a_n \quad , \quad a_۱ = ۲$$

مثال ۹: جمله پنجم دنباله بازگشتی $a_{n+۳} = a_{n+۲} + a_{n+۱} + a_n$ اگر $a_۱ = ۳ , a_۲ = -۱ , a_۳ = ۲$ باشد را تعیین کنید.

پاسخ: برای بدست آوردن جمله پنجم ابتدا باید جمله چهارم را تعیین کنیم. (جملات a_n و $a_{n+۱}$ و $a_{n+۲}$ سه جمله قبل $a_{n+۳}$ هستند)

$$a_۱ = ۳$$

$$a_۲ = -۱$$

$$a_۳ = ۷$$

با گذاشتن $n = ۱$ داریم:

$$n = ۱ \to a_{۱+۳} = a_{۱+۲} + a_{۱+۱} + a_۱ \to a_۴ = a_۳ + a_۲ + a_۱ = ۷ + (-۱) + ۳ = ۹$$

$$n = ۲ \to a_{۲+۳} = a_{۲+۲} + a_{۲+۱} + a_۲ \to a_۵ = a_۴ + a_۳ + a_۲ = ۹ + ۷ + (-۱) = ۱۵$$

$$\to a_۵ = ۱۵$$

مثال ۱۰: چهار جمله اول دنباله زیر را با فرض $a_۱ = ۴$ بنویسید.

$$a_{n+۱} = \begin{cases} a_n - ۳ & n \text{ زوج} \\ a_n^{۲} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

پاسخ: برای بدست آوردن هر جمله باید بررسی کنیم که شماره جمله فرد است یا زوج، سپس ضابطه درست را انتخاب کنیم.

با $n = ۱$ که عددی فرد است شروع می‌کنیم. پس ضابطه دوم انتخاب می‌شود.

فرد : $n = ۱ \to a_{۱+۱} = a_۱^{۲} = ۴^{۲} = ۱۶ \to a_۲ = ۱۶$

زوج : $n = ۲ \to a_{۲+۱} = a_۲ - ۳ = ۱۶ - ۳ = ۱۳ \to a_۳ = ۱۳$

فرد : $n = ۳ \to a_{۳+۱} = a_۳^{۲} = ۱۳^{۲} = ۱۶۹ \to a_۴ = ۱۶۹$

مثال ۱۱: با توجه به جملات داده شده، ضابطه دنباله را بدست آورید و سپس به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$\frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۲}{۵}, ۴, ...$$

پاسخ: جملات یک در میان ثابتند، تمام جملات با شماره فرد برابر عدد $\frac{۲}{۵}$ و تمام جملات با شماره زوج برابر ۴ هستند. پس:

$$a_n = \begin{cases} ۴ & n \text{ زوج} \\ \frac{۲}{۵} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\left(۱,\frac{۲}{۵}\right) \quad (۲,۴) \quad \left(۳,\frac{۲}{۵}\right) \quad (۴,۴) \quad \left(۵,\frac{۲}{۵}\right) \quad (۶,۴)$$

مثال ۱۲: **خرداد ۹۹**: پنج جمله اول دنباله $a_{n+۱} = -a_n + (-۱)^n$ را با فرض $a_۱ = ۳$ بنویسید. (۱)

پاسخ:

$$n = ۱ \to a_۲ = -a_۱ + (-۱)^۱ = -۳ - ۱ = -۴$$

$$n = ۲ \to a_۳ = -a_۲ + (-۱)^۲ = -(-۴) + ۱ = ۵$$

$$n = ۳ \to a_۴ = -a_۳ + (-۱)^۳ = -۵ - ۱ = -۶$$

$$n = ۴ \to a_۵ = -a_۴ + (-۱)^۴ = -(-۶) + ۱ = ۷$$

$$۳, -۴, ۵, -۶, ۷$$

مثال ۱۳: با توجه به ضابطه دنباله داده شده، چهار جمله اول دنباله را تعیین کنید.

الف) $a_n = ۲n + ۱$

پاسخ: جمله اول : $n = ۱ \rightarrow a_۱ = (۲ \times ۱) + ۱ = ۳$

جمله دوم: $n = ۲ \rightarrow a_۲ = (۲ \times ۲) + ۱ = ۵$

جمله سوم : $n = ۳ \rightarrow a_۳ = (۲ \times ۳) + ۱ = ۷$

جمله چهارم: $n = ۴ \rightarrow a_۴ = (۲ \times ۴) + ۱ = ۹$

ب) $b_n = n^۲ + ۶$

پاسخ: جمله اول : $n = ۱ \rightarrow b_۱ = ۱^۲ + ۶ = ۷$

جمله دوم: $n = ۲ \rightarrow b_۲ = ۲^۲ + ۶ = ۱۰$

جمله سوم: $n = ۳ \rightarrow b_۳ = ۳^۲ + ۶ = ۱۵$

جمله چهارم: $n = ۴ \rightarrow b_۴ = ۴^۲ + ۶ = ۲۲$

ج) $c_n = \frac{(-۱)^n}{n+۱}$

پاسخ:

$$n = ۱ \rightarrow c_۱ = \frac{(-۱)^۱}{۱+۱} = \frac{-۱}{۲}$$

$$n = ۲ \rightarrow c_۲ = \frac{(-۱)^۲}{۲+۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$n = ۳ \rightarrow c_۳ = \frac{(-۱)^۳}{۳+۱} = \frac{-۱}{۴}$$

$$n = ۴ \rightarrow c_۴ = \frac{(-۱)^۴}{۴+۱} = \frac{۱}{۵}$$

مثال ۱۴: شش جمله اول دنباله زیر را تعیین کنید.

$$a_n = \begin{cases} ۳ & n \text{ زوج} \\ -۷ & n \text{ فرد} \end{cases}$$

پاسخ: با توجه به ضابطه دنباله برای n های زوج جملات دنباله همیشه برابر ۳ و برای n های فرد جملات دنباله برابر ۷- است. پس:

$$a_۱ = -۷ \ , a_۲ = ۳ \ , a_۳ = -۷ \ , \ a_۴ = ۳ \ , \ a_۵ = -۷ \ , a_۶ = ۳$$

۷ ، ۳ ، ۷ ، ۳ ، ۷ ، ۳

مثال ۱۵: اگر $a_n = -n + ۳$ ، $b_n = \sqrt{n + ۱}$ ، $c_n = n^۲ + ۱$ باشند، مطلوبست محاسبه:

$$a_{۱۰} + c_۴ - b_۸$$

پاسخ: $a_{۱۰} = -۱۰ + ۳ = -۷$ ، $c_۴ = ۴^۲ + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷$ ، $b_۸ = \sqrt{۸ + ۱} = \sqrt{۹} = ۳$

$$a_{۱۰} + c_۴ - b_۸ = -۷ + ۱۷ - ۳ = ۷$$

مثال ۱۶: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) الگوی جملات دنباله، اعداد زوج طبیعی با رابطه $a_n = ۲n$ نمایش داده می‌شود. $(n \in \mathbb{N})$ درست

ب) جمله‌ی چهارم دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = -۵n - ۱$ برابر ۱۹- است. نادرست

مثال ۱۷: با توجه به جملات ضابطه دنباله مقابل، فرمول بازگشتی دنباله را بنویسید. $a_n = ۲n + ۱$

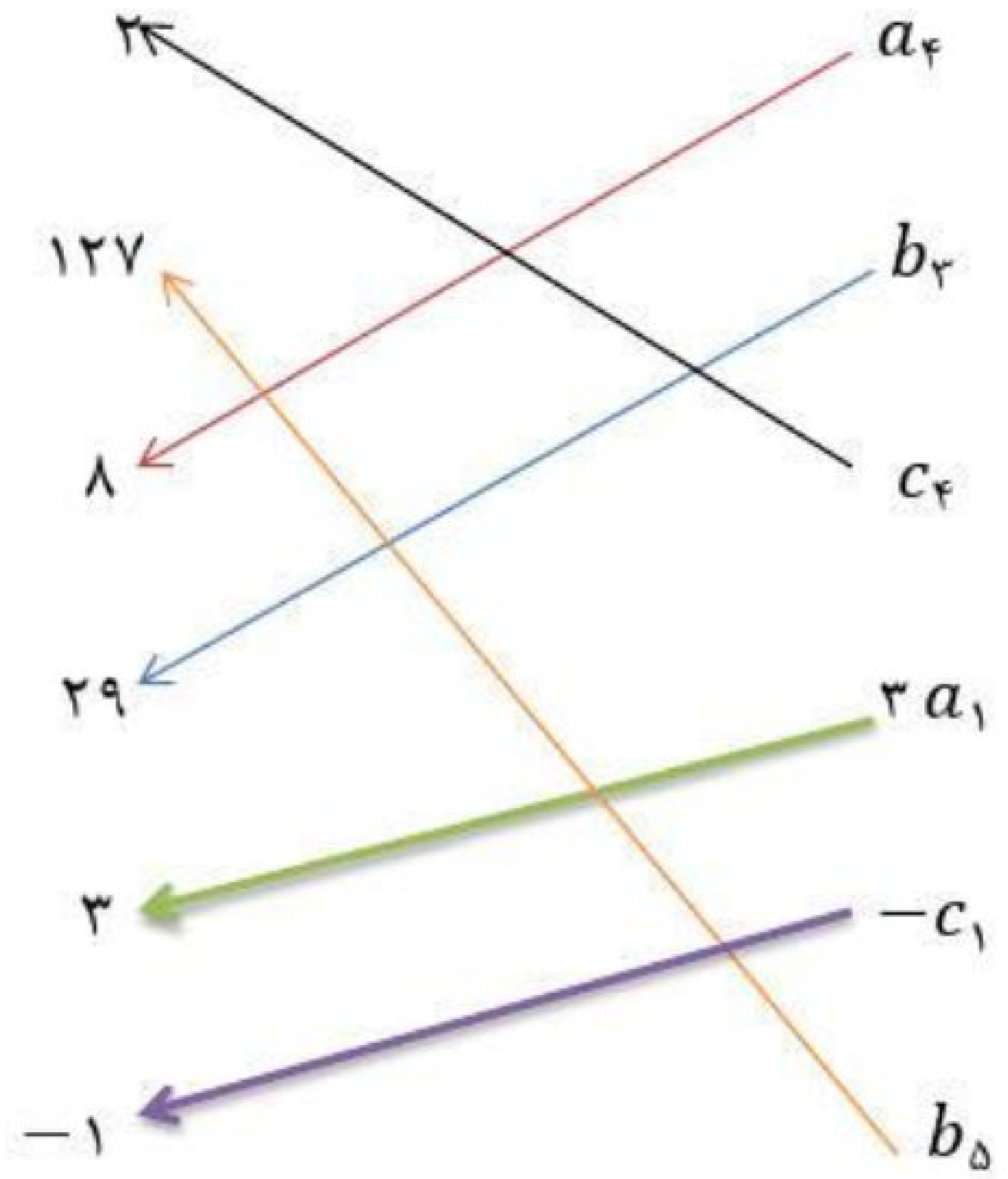
پاسخ: ابتدا چند جمله از دنباله را تعیین می‌کنیم. ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹ ، ...

با دقت در جملات متوجه می‌شویم هر جمله نسبت به جمله قبل خود ۲ واحد بیشتر شده است، پس می‌توان نوشت:

$$a_۱ = ۳ \ , \qquad a_{n+۱} = a_n + ۲$$

مثال ۱۸: هر یک از جملات دنباله‌های زیر را به عدد مربوط به آن مانند نمونه وصل کنید.

$$c_n = \frac{-n}{n-۲} \quad , \quad b_n = n^{۳} + ۲ \ , \quad a_n = ۲^{n-۱}$$



مثال ۱۹: دنباله بازگشتی $a_{n+۱} = ۲a_n$ با $a_۱ = ۲$ داده شده، چهار جمله اول و ضابطه دنباله را تعیین کنید.

پاسخ: برای بدست آوردن هر جمله کافی است جمله قبلی را در ۲ ضرب کنیم. پس:

$$a_۲ = ۲a_۱ = ۲ \times ۲ = ۴ \quad , \quad a_۳ = ۲a_۲ = ۲ \times ۴ = ۸ \quad , \quad a_۴ = ۲a_۳ = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶

پس ضابطه تابع به صورت مقابل است : $a_n = ۲^n$

آشنایی با چند دنباله:

دنباله فیبوناچی: در این دنباله همیشه جملات اول و دوم برابر یک هستند و هر جمله برای $(n > ۲)$ از جمع دو جمله قبل خود بدست می‌آید.

$$a_۱ = a_۲ = ۱ \ , \ a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n$$

مثال ۲۰: با توجه به فرمول بازگشتی دنباله فیبوناچی، هشت جمله اول دنباله را تعیین کنید.

$$a_{۱} = a_{۲} = ۱ \text{ و } a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n$$

پاسخ: با توجه به رابطه بالا داریم:

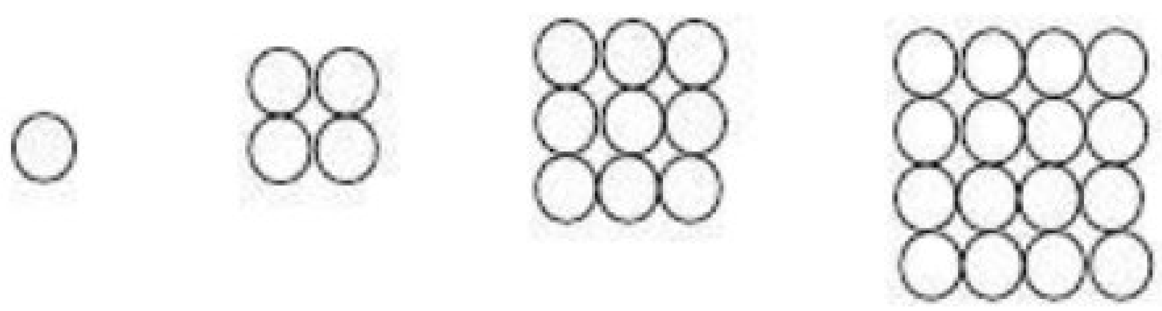
$$n = ۱ \rightarrow a_{۱+۲} = a_{۱+۱} + a_{۱} \rightarrow a_{۳} = a_{۲} + a_{۱} = ۱ + ۱ = ۲ \rightarrow a_{۳} = ۲$$

به همین ترتیب برای جملات بعد، هر جمله برابر است با جمع دو جمله قبل خود، پس:

۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۸ ، ۱۳ ، ۲۱ ، ...

دنباله مربعی: دنباله‌ای است که جملات آن توان دوم اعداد طبیعی هستند. جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = n^{۲}$$



۱، ۴، ۹ ، ۱۶ ، ...

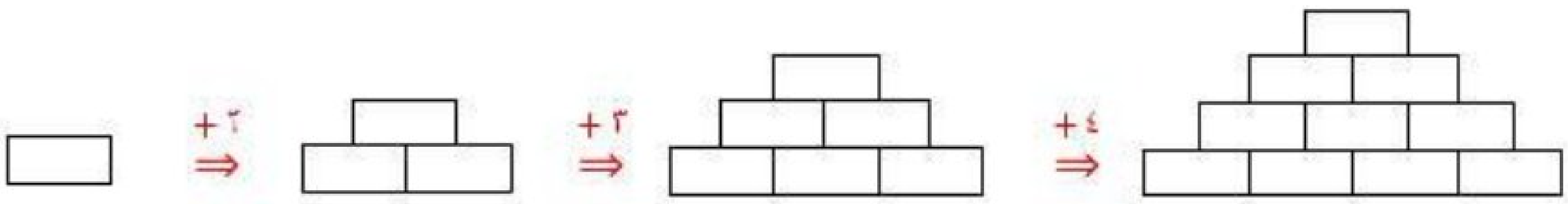
مثال ۲۱: مجموع جملات هشتم و دوازدهم دنباله مربعی را بیابید.

پاسخ: به جای n در رابطه $a_n = n^{۲}$ اعداد ۸ و ۱۲ را جاگذاری می‌کنیم.

$$a_{۸} = ۸^{۲} = ۶۴ \quad , a_{۱۲} = ۱۲^{۲} = ۱۴۴$$

دنباله مثلثی: دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ که جملات آن به صورت زیر هستند را دنباله مثلثی می‌نامند.

در این دنباله جمله اول یک و جملات بعد با اضافه کردن اعداد ۲ ، ۳، ۴، ۵، ... به جمله‌ی قبلی بدست می‌آیند.



تعداد مستطیل‌ها نشان‌دهنده‌ی اعداد دنباله مثلثی هستند.

جملات دنباله مثلثی به صورت زیر هستند:

۱، ۳، ۶ ، ۱۰ ، ۱۵ , ۲۱, ۲۸ ,...

رابطه بازگشتی این دنباله را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$a_۱ = ۱ \ , a_{n+۱} = a_n + (n+۱)$$

مثال ۲۲: جمله‌ی دهم دنباله مثلثی را تعیین کنید.

پاسخ: برای راحتی محاسبه به جای n در رابطه $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ عدد ۱۰ را جاگذاری می‌کنیم.

$$a_{۱۰} = \frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲} = \frac{۱۰ \times ۱۱}{۲} = ۵۵$$

مثال ۲۳: مجموع جمله پنجم دنباله مربعی و جمله ششم دنباله مثلثی با یکدیگر چند می‌شود؟

پاسخ: جمله پنجم مربعی: $a_۵ = ۵^۲ = ۲۵$

جمله ششم مثلثی: $a_۶ = \frac{۶(۶+۱)}{۲} = \frac{۶\times۷}{۲} = ۲۱$

$$۲۵ + ۲۱ = ۴۶$$

مثال ۲۴: دنباله بازگشتی $a_{n+۱} = \frac{۱}{۳}a_n$ با $a_۱ = ۳$ داده شده، چهار جمله اول و ضابطه دنباله را تعیین کنید.

پاسخ: می‌دانیم: $a_{n+۱} = \frac{۱}{۳}a_n = \frac{a_n}{۳}$ پس: $a_۲ = \frac{a_۱}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱$

$$a_۳ = \frac{a_۲}{۳} = \frac{۱}{۳} \quad , \quad a_۴ = \frac{a_۳}{۳} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

جملات دنباله به صورت مقابل هستند: $۳ \ ، ۱ \ ، \frac{۱}{۳} \ ، \frac{۱}{۹}$

با توجه به توان عدد ۳ هر چه شماره جملات بیشتر شده توان عدد ۳ کمتر شده، (جملات دنباله کوچک می‌شوند) پس

علامت n باید منفی باشد با دقت در توان عدد ۳ داریم: $a_n = ۳^{۲-n}$

مثال ۲۵: شهریور ۹۸:

با توجه به دنباله‌های $c_n = (\frac{۱}{۲})^{n-۱}$، $b_n = ۳^{n-۱}$، $a_n = \frac{۸-n}{n+۲}$ ، حاصل عبارت $a_۲ + b_۲ + c_۱$ را به دست آورید. (۱/۲۵)

پاسخ: $a_۲ = \frac{۸-۳}{۳+۲} = \frac{۵}{۵} = ۱$, $b_۲ = ۳^{۲-۱} = ۳$, $c_۱ = (\frac{۱}{۲})^{۱-۱} = (\frac{۱}{۲})^{} = ۱$

$$a_۲ + b_۲ + c_۱ = ۱ + ۳ + ۱ = ۵$$

مثال ۲۶: خرداد ۹۹: با توجه به دنباله‌های $c_n = \frac{n}{۲}$ ، $b_n = n + ۴$ ، $a_n = \frac{n^۲}{(-۱)^n}$ ، حاصل عبارت $a_۱ + b_۸ - c_۲$ را به دست آورید. (۱)

پاسخ: $a_۱ = \frac{۱^۲}{(-۱)^۱} = -۱$, $b_۸ = ۸ + ۴ = ۱۲$, $c_n = \frac{۲}{۲} = ۱$

$$a_۱ + b_۸ - c_۲ = -۱ + ۱۲ - ۱ = ۱۰$$

مثال ۲۷: خرداد ۹۸:

سوال ۶: با توجه به دنباله‌های $b_n = (-\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۲}-۱}$، $c_n = \frac{۱}{۲n-۱}$ ، $d_n = n^۲ + ۱$ ، حاصل عبارت $b_۴ + d_۲ - c_۱$ را به دست آورید. (۱/۵)

پاسخ: $d_۲ = ۲^۲ + ۱ = ۵$ ، $c_۱ = \frac{۱}{۲×۱-۱} = \frac{۱}{۲}$ ، $b_۴ = (-\frac{۱}{۲})^{\frac{۴}{۲}-۱} = (-\frac{۱}{۲})^۱ = -\frac{۱}{۲}$

$$b_۴ + d_۲ - c_۱ = -\frac{۱}{۲} + ۵ - \frac{۱}{۲} = ۴$$

درس دوم: دنباله‌های حسابی

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$a_۱$	$a_۱ + d$	$a_۱ + ۲d$	$a_۱ + ۳d$	...	$a_۱ + (n-۱)d$
جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	جمله چهارم		جمله n اُم

است که در آن $a_۱$ جمله اول و عدد ثابت d « اختلاف مشترک » جملات دنباله است. جمله n اُم این دنباله (جمله عمومی) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

(اگر دقت کنید همواره ضریب d یک واحد از شماره جمله کمتر است)

d را اختلاف مشترک (قدر نسبت) دنباله حسابی می‌نامند زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک‌اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت d است. (به عنوان مثال $a_۲ - a_۱$ ، $a_۳ - a_۲$ ، $a_۴ - a_۳$ همگی مقداری یکسان d می‌شوند)

$$d = a_n - a_{n-۱}$$

مثال ۲۸: کدامیک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟

الف) ... ۴ ۲ ۰ ۲− ۴−

پاسخ: این دنباله حسابی است زیرا اختلاف هر دو جمله متوالی آن همواره مقدار ثابتی است. $d = ۲$

$$۴ - ۲ = ۲ \qquad ۲ - ۰ = ۲ \qquad ۰ - (-۲) = ۲ \qquad -۲ - (-۴) = -۲ + ۴ = ۲$$

ب) ... ۴۱ ۳۶ ۳۰ ۲۴

پاسخ: این دنباله حسابی نیست. زیرا $۴۱ - ۳۶ = ۵$ $\qquad ۳۶ - ۳۰ = ۶ \qquad ۳۰ - ۲۴ = ۶$

اختلاف بین جملات ثابت نیست و تغییر کرده است.

تذکر:

در یک دنباله حسابی:

۱- اگر d عددی مثبت باشد($d > ۰$) جملات افزایشی و دنباله صعودی است.

۲- اگر d عددی منفی باشد($d < ۰$) جملات کاهشی و دنباله نزولی است.

۳- اگر $d = ۰$ باشد جملات یکسان هستند و دنباله ثابت است.

■ برای تعیین جمله عمومی دنباله با استفاده از رابطه $a_n = a_۱ + (n - ۱)d$ به جمله اول دنباله $a_۱$ و مقدار اختلاف مشترک d (قدر نسبت دنباله) نیاز داریم. برای روشن شدن این موضوع به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲۹: در دنباله‌های حسابی زیر جمله عمومی را تعیین کنید.

الف) ... ۲۷ ۲۰ ۱۳ ۶

پاسخ: اختلاف مشترک تمام جملات برابر ۷ است $d = ۱۳ - ۶ = ۷$ (این دنباله صعودی است) و جمله اول $a_۱ = ۶$

با استفاده از رابطه مربوط به جمله عمومی داریم:

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \rightarrow a_n = ۶ + (n - ۱) \times ۷$$

$$\rightarrow a_n = ۶ + ۷n - ۷ \rightarrow a_n = ۷n - ۱$$

ب) ... -۸ -۳ ۲ ۷ ۱۲

پاسخ: جمله اول $a_۱ = ۱۲$ و مقدار اختلاف مشترک $d = ۷ - ۱۲ = -۵$ (این دنباله نزولی است) پس داریم:

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \rightarrow a_n = ۱۲ + (n - ۱) \times (-۵)$$

$$\rightarrow a_n = ۱۲ - ۵n + ۵ \rightarrow a_n = -۵n + ۱۷$$

تذکر: با معلوم بودن جمله عمومی دنباله هر جمله دلخواه از دنباله را می‌توان بدست آورد.

مثال ۳۰: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = ۳n + ۵$ جملات سوم و هفتم را تعیین کنید.

پاسخ: کافی است به جای n اعداد ۳ و ۷ را جاگذاری کنیم.

$$a_۷ = (۳ \times ۷) + ۵ = ۲۶ \qquad a_۳ = (۳ \times ۳) + ۵ = ۱۴$$

مثال ۳۱: در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = -۲n + ۱$ جمله چندم برابر ۲۳- است؟

پاسخ: به جای a_n مقدار ۲۳- را جاگذاری می‌کنیم تا مقدار مجهول n بدست آید.

$$-۲۳ = -۲n + ۱ \to ۲n = ۲۳ + ۱$$

$$۲n = ۲۴ \to n = ۱۲$$

مثال ۳۲: آیا دنباله بازگشتی زیر دنباله حسابی است؟ چرا؟

$$a_{n+۱} = a_n + ۵ \qquad a_۱ = -۱$$

پاسخ: چند جمله از دنباله را تعیین می‌کنیم: $a_۲ = a_۱ + ۵ = -۱ + ۵ = ۴$

$$a_۳ = a_۲ + ۵ = ۴ + ۵ = ۹$$

$$a_۴ = a_۳ + ۵ = ۹ + ۵ = ۱۴$$

پس می‌توان جملات دنباله را به صورت زیر مرتب کرد:

$$-۱ \quad ۴ \quad ۹ \quad ۱۴ \quad \ldots$$

با کمی دقت و بررسی تمام جملات می‌توان دریافت که مقدار اختلاف مشترک برابر ۵ است. $d = ۹ - ۴ = ۵$

مثال ۳۳: ضابطه تابع خطی متناظر با دنباله حسابی $a_n = ۳n + ۵$ را نوشته، چهار جمله اول آن را تعیین کنید.

پاسخ: کافی است به جای n و a_n به ترتیب x و y بنویسیم. پس ضابطه تابع خطی به صورت زیر نوشته می‌شود که شیب خط برابر ۳ است (همان مقدار d):

$$y = ۳x + ۵$$

حال برای تعیین چهار جمله اول دنباله مانند قبل به جای n اعداد ۱ تا ۴ را جاگذاری می‌کنیم.

$$a_۱ = ۳ \times ۱ + ۵ = ۸ \qquad a_۲ = ۳ \times ۲ + ۵ = ۱۱ \qquad a_۳ = ۳ \times ۳ + ۵ = ۱۴$$

$$a_۴ = ۳ \times ۴ + ۵ = ۱۷$$

مثال ۳۴: دنباله حسابی $a_n = ۴ + ۲(n - ۱)$ را در نظر بگیرید.

الف) ۳ جمله اول این دنباله را مشخص کنید.

ب) نمودار دنباله را با استفاده از سه جمله بالا رسم کنید.

ج) ضابطه تابع خطی متناظر با دنباله را بنویسید.

د) شیب خط تابع خطی با d چه ارتباطی دارد؟

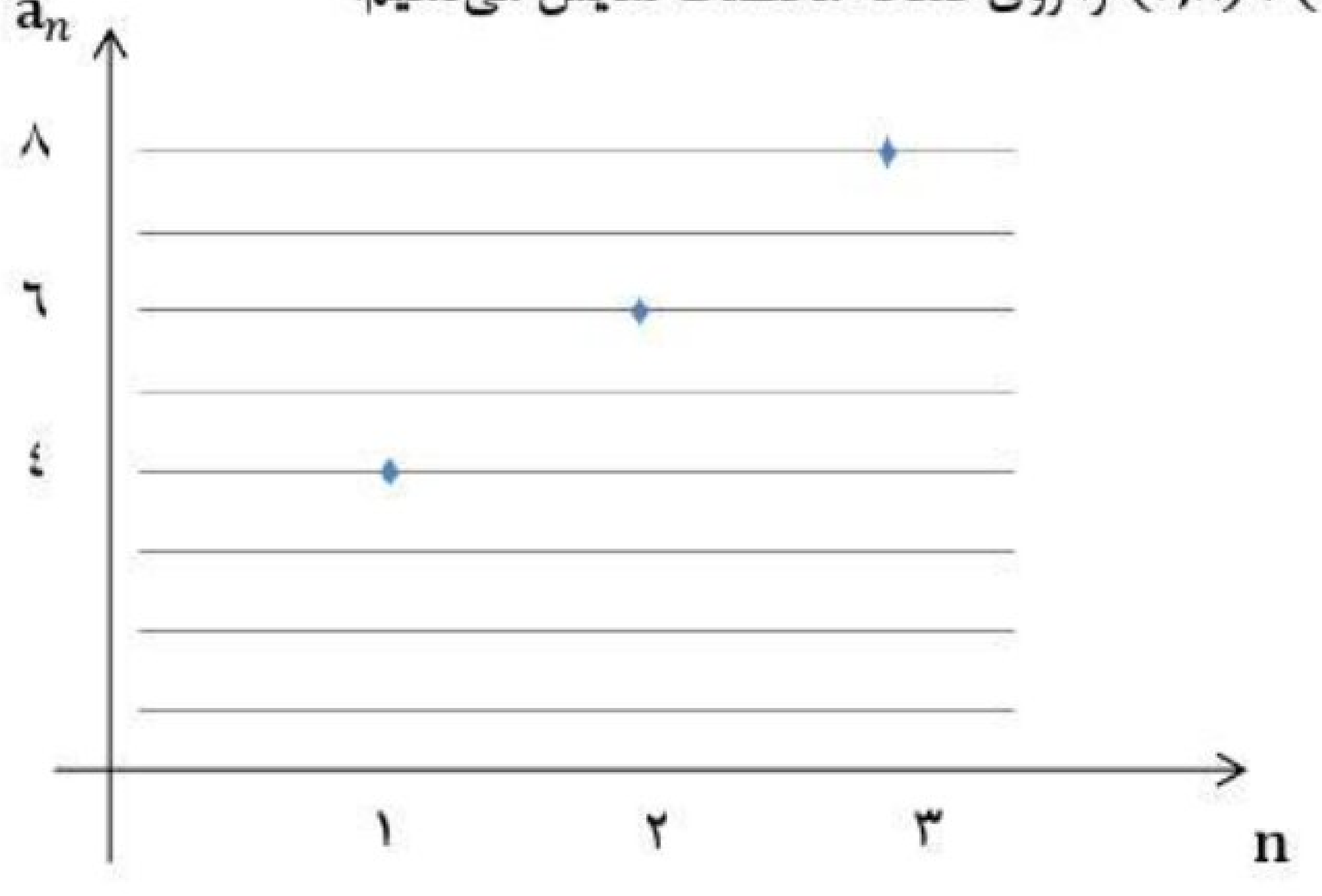
پاسخ:

الف) می‌توانیم ابتدا جمله عمومی دنباله را ساده کنیم.

$$a_n = ۴ + ۲(n - ۱) \rightarrow a_n = ۴ + ۲n - ۲ \rightarrow a_n = ۲n + ۲$$

$$a_۱ = ۲ \times ۱ + ۲ = ۴ \qquad a_۲ = ۲ \times ۲ + ۲ = ۶ \qquad a_۳ = ۲ \times ۳ + ۲ = ۸$$

ب) نقاط (۱,۴) ، (۲,۶) ، (۳,۸) را روی صفحه مختصات نمایش می‌دهیم.



ج) کافی است به جای n و a_n به ترتیب x و y بنویسیم.

$$y = ۲x + ۲$$

د) شیب خط تابع خطی با d (اختلاف مشترک) برابر است. این مقدار برابر عدد ۲ است.

مثال ۳۵: جاهای خالی را در جدول زیر مانند نمونه پر کنید.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهارجمله اول دنباله
$y = ۳x + ۲$	$a_n = ۳n + ۲$	۵ , ۸ , ۱۱ , ۱۴
$y = -۲x - ۵$	$b_n = -۲n - ۵$	$-۷, -۹, -۱۱, -۱۳$
$y = \frac{۱}{۲}x - ۱$	$c_n = \frac{۱}{۲}n - ۱$	$-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}, ۱$
$y = x + ۴$	$d_n = n + ۴$	۵, ۶, ۷, ۸
$y = ۵x - ۸$	$k_n = ۵n - ۸$	-۳ , ۲ , ۷ , ۱۲

توضیح:

در مورد سطر آخر جدول: برای نوشتن ضابطه تابع خطی، دو نقطه دلخواه از دنباله را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$B(۲,۲) \text{ و } A(۱,-۳)$$

نقطه A نشان دهنده جمله اول دنباله است که برابر ۳- است و نقطه B متناظر با جمله دوم دنباله است که برابر ۲ است.

ابتدا شیب خط را تعیین می‌کنیم:
$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{-۳-۲}{۱-۲} = \frac{-۵}{-۱} = ۵$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \rightarrow y - ۲ = ۵(x - ۲)$$

$$y = ۵x - ۱۰ + ۲ \rightarrow y = ۵x - ۸$$

تذکر: با مشخص بودن دو جمله a_m و a_n از دنباله حسابی می‌توان با استفاده از رابطه‌های زیر اختلاف مشترک را محاسبه نمود.

$$a_m - a_n = (m-n)d \quad \text{یا} \quad d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$$

در رابطه بالا m, n شماره جملات مورد نظر هستند.

مثال۳۶: خرداد ۹۹:

هفتمین جمله یک دنباله حسابی برابر ۴۵ و جمله پانزدهم آن برابر ۹۳ است. جمله سی و یکم این دنباله را به دست آورید. (۲)

پاسخ:

$$d = \frac{a_{۱۵} - a_{۷}}{۱۵-۷} = \frac{۹۳-۴۵}{۸} = \frac{۴۸}{۸} = ۶$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \rightarrow a_۷ = a_۱ + (۷-۱) \times ۶$$

$$۴۵ = a_۱ + ۳۶ \rightarrow a_۱ = ۹$$

برای تعیین جمله سی و یکم داریم:

$$a_{۳۱} = ۹ + (۳۱-۱) \times ۶$$

$$a_{۳۱} = ۹ + ۳۰ \times ۶ = ۹ + ۱۸۰ = ۱۸۹$$

مثال ۳۷: شهریور ۹۸:

در یک دنباله حسابی جمله نهم برابر ۶۱ و جمله شانزدهم برابر ۹۶ است. اختلاف مشترک و جمله سی‌ام این دنباله را بدست آورید. (۲)

پاسخ:

$$d = \frac{a_{۱۶} - a_{۹}}{۱۶-۹} = \frac{۹۶-۶۱}{۷} = \frac{۳۵}{۷} = ۵$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \rightarrow a_۹ = a_۱ + (۹-۱) \times ۵$$

$$۶۱ = a_۱ + ۴۰ \rightarrow a_۱ = ۲۱$$

برای تعیین جمله سی‌ام داریم:

$$a_{۳۰} = ۲۱ + (۳۰-۱) \times ۵ \rightarrow a_{۳۰} = ۲۱ + ۱۴۵ = ۱۶۶$$

درج واسطه حسابی بین دو عدد:

فرض کنید سه عدد a, b, c تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، به بیان دیگر سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی باشند، در این صورت b را واسطه حسابی بین a و c می‌نامند و برای درج (نوشتن) واسطه حسابی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$b = \frac{a+c}{۲} \quad \text{یا} \quad ۲b = a + c$$

مثال ۳۸: واسطه حسابی بین اعداد ۲۱ و ۵ زیر را تعیین کنید.

پاسخ: $b = \frac{a+c}{۲} = \frac{۵+۲۱}{۲} = \frac{۲۶}{۲} = ۱۳$ پس سه عدد ۲۱ ۱۳ ۵ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند.

درج k واسطه حسابی بین دو عدد b, a:

اگر بخواهیم بین دو عدد b, a ، چند واسطه قرار دهیم به عنوان مثال، k عدد طوری درج کنیم (بنشانیم) که تمامی این اعداد تشکیل یک دنباله حسابی دهند، ابتدا قدر نسبت را از رابطه زیر بدست می‌آوریم، سپس با استفاده از آن واسطه‌های مورد نظر را تعیین می‌کنیم.

$$a \quad \underbrace{\square\ \square\ \square\ \ \dots\ \ \square\ \square\ \square}_{k \text{ واسطه حسابی}} \quad b$$

$$d = \frac{b-a}{k+۱}$$

مثال ۳۹:بین دو عدد ۵۲ و ۱۲- سه واسطه‌ی حسابی درج کنید.

پاسخ:

$$-۱۲ \quad \square \quad \square \quad \square \quad ۵۲$$

ابتدا مقدار اختلاف مشترک دنباله را تعیین می‌کنیم، سپس با جمع کردن این مقدار با هر جمله، جمله بعدی را بدست می‌آوریم. در این مثال k=۳ است، چون می‌خواهیم ۳ واسطه درج کنیم.

$$d = \frac{b-a}{k+۱} \rightarrow d = \frac{۵۲-(-۱۲)}{۳+۱} = \frac{۶۴}{۴} = ۱۶$$

عدد ۱۶ را با عدد ۱۲- جمع می‌کنیم تا اولین واسطه مشخص شود. این روال را برای اعداد دیگر نیز ادامه می‌دهیم.

$$-۱۲ \quad ۴ \quad ۲۰ \quad ۳۶ \quad ۵۲$$

مثال ۴۰: مقدار k را طوری بیابید که سه عدد $k-۲ , ۲k , ۲k+۳$ تشکیل دنباله حسابی دهند. اعداد را بیابید.

پاسخ: در این مثال $b=۲k$ همان واسطه حسابی بین اعداد $a=k-۲$ و $c=۲k+۳$ است. برای اینکه این اعداد تشکیل دنباله حسابی دهند باید فاصله یکسانی با هم داشته باشند و در رابطه واسطه حسابی قرار گیرند. پس:

$$۲b=a+c \to ۲(۲k)=k-۲+۲k+۳$$

$$۴k=۳k+۱ \to ۴k-۳k=۱$$

$$\to k=۱$$

حال با جاگذاری مقدار k در اعداد داده شده می‌توانیم آنها را بدست آوریم.

$$k-۲ , ۲k , ۲k+۳ \xRightarrow{k=۱} ۱-۲ \ , \ ۲\times ۱ \ , ۲\times ۱+۳$$

$$-۱ , ۲ , ۵$$

مثال ۴۱: چهار عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۲۴ و ۵۴ قرار دهید که تشکیل یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل دهد. (به دست آوردن اختلاف مشترک الزامی است)

پاسخ: ۲۴ □ □ □ □ ۵۴

$$d=\frac{b-a}{k+۱} \to d=\frac{۵۴-۲۴}{۴+۱}=\frac{۳۰}{۵}=۶ \qquad ۲۴ , ۳۰ , ۳۶ , ۴۲ , ۴۸ , ۵۴$$

مثال ۴۲: (تست)

اگر سه عدد $x , ۲x-۱ , ۷$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، x کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

$$۲b=a+c \Rightarrow ۲(۲x-۱)=۷+x$$

$$\Rightarrow ۴x-۲=۷+x$$

$$\Rightarrow ۴x-x=۷+۲ \Rightarrow ۳x=۹ \Rightarrow x=۳$$

■ **نکته** برای بدست آوردن تعداد جملات بین دو جمله a , b با فرض $b > a$ از دنباله حسابی از رابطه زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

$$n = \frac{\text{جمله آخر} - \text{جمله اول}}{d} + ۱ = \frac{b - a}{d} + ۱$$

مثال ۴۳: تعداد جملات دنباله حسابی مقابل را تعیین کنید. ۱ , ۵ , ۹ ,... ,۴۰۱

پاسخ: در این دنباله $d = ۴$ است. برای تعیین تعداد جملات دنباله از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$n = \frac{b - a}{d} + ۱$$

$$\text{تعداد جملات} \to n = \frac{۴۰۱ - ۱}{۴} + ۱ = ۱۰۰ + ۱ = ۱۰۱$$

مثال ۴۴: (تست)

در دنباله مقابل تعداد اعداد کدام است؟ ‎−۲۲ , −۱۴ , −۶ ,... ,۲۴۲

۱) ۳۶ ۲) ۳۵ ۳) ۳۴ ۴) ۳۳

پاسخ: گزینه ۳، دنباله موردنظر دنباله‌ای حسابی است با اختلاف مشترک $d = -۱۴ - (-۲۲) = -۱۴ + ۲۲ = ۸$

$$n = \frac{b - a}{d} + ۱$$

$$\text{تعداد جملات} \to n = \frac{۲۴۲ - (-۲۲)}{۸} + ۱ = \frac{۲۶۴}{۸} + ۱ = ۳۳ + ۱ = ۳۴$$

مثال ۴۵: برای حفر چاه‌های قنات، اگر عمق اولین و دومین چاه به ترتیب ۳۰ و ۲۹/۵ متر و عمق هر چاه ۰/۵ متر از عمق چاه قبلی کمتر باشد، طوریکه عمق آخرین چاه ۳/۵ متر باشد، چه تعداد چاه باید حفر شود؟

پاسخ: عمق چاه‌ها به صورت دنباله مقابل است : ۳۰ , ۲۹/۵ , ۲۹ ,... ,۳/۵

این اعداد تشکیل یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک $-۰/۵$ می‌دهند. $d = ۲۹/۵ - ۳۰ = -۰/۵$

$$\text{تعداد چاه‌ها} \rightarrow n = \frac{۳/۵-۳۰}{-۰/۵} + ۱ = \frac{-۲۶/۵}{-۰/۵} + ۱ = ۵۳ + ۱ = ۵۴$$

پس باید ۵۴ چاه حفر شود.

■نکته: همانطور که قبلا گفته شد، اختلاف مشترک هر دو جمله متوالی در یک دنباله حسابی همواره مقدار ثابتی است و داریم: $a_{n+۱} - a_n = d$

می‌توان رابطه بالا را به صورت نیز نمایش داد که در این صورت رابطه مربوط به دنباله بازگشتی آن به دست می‌آید:

$a_{n+۱} = a_n + d$: رابطه بازگشتی دنباله حسابی

پس در رابطه بازگشتی دنباله‌هایی به شکل بالا، به یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک d اشاره شده است.

مثال۴۶:

رابطه بازگشتی دنباله حسابی مقابل را بنویسید. $(a_۱ = ۱۸)$		$۱۸ \,, ۱۵ \,, ۱۲ \,, \ldots$

پاسخ: با توجه به اینکه اختلاف مشترک دنباله برابر ۳ است پس رابطه بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$a_۱ = ۱۸,\ a_{n+۱} = a_n - ۳$$

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی:

در داستانی آمده است که روزی معلم دبستان فردریش گاوس (ریاضیدان آلمانی) مسئله‌ای مطرح کرد تا دانش‌آموزان حل کنند. بعد از زمان کوتاهی گاوس پاسخ را به معلمش نشان داد که باعث تعجب او شد.

سوال در مورد جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ بود که دانش‌آموزان باید حساب می‌کردند. گاوس به صورت زیر راه حل خود را نوشت:

۱	۲	۳	۴	...	۹۸	۹۹	۱۰۰
۱۰۰	۹۹	۹۸	۹۷	...	۳	۲	۱
۱۰۱	۱۰۱	۱۰۱	۱۰۱	...	۱۰۱	۱۰۱	۱۰۱

همانطور که می‌بینید، حاصل جمع هر کدام از اعداد که زیر هم نوشته شدند برابر عدد ۱۰۱ است. پس ۱۰۰ × ۱۰۱ بدست آمده، حاصل جمع دوبار ۱ تا ۱۰۰ است. اما معلم گاوس حاصل جمع یک بار ۱ تا ۱۰۰ را خواسته بود پس گاوس عدد ۱۰۰ × ۱۰۱ را نصف کرد.

$$\frac{۱۰۰ \times ۱۰۱}{۲} = ۵۰۵۰$$: مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰

با استفاده از این ایده می‌خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را تعیین کنیم.

$$\text{مجموع جملات} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول})}{۲}$$

■ در دنباله حسابی با جمله اول $a_۱$ و اختلاف مشترک d برای محاسبه n جمله اول دنباله از روابط زیر استفاده می‌شود:

الف: اگر جمله اول و آخر دنباله مشخص باشد:　$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$

ب) اگر جمله اول و مقدار اختلاف مشترک دنباله مشخص باشد:　$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$

مثال ۴۷: در دنباله حسابی زیر مجموع ۳۰ جمله اول را تعین کنید.

۳ ، ۸ ، ۱۳ ، ۱۸ ، ...

پاسخ: در این دنباله $a_۱ = ۳$ و $d = ۸ - ۳ = ۵$ است. پس:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\to s_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}(۲ \times ۳ + (۳۰ - ۱) \times ۵)$$

$$\to s_{۳۰} = ۱۵(۶ + ۱۴۵)$$

$$\to s_{۳۰} = ۱۵ \times ۱۵۱ = ۲۲۶۵$$

مثال ۴۸: در دنباله حسابی زیر که شامل بیست جمله است، مجموع جملات دنباله را محاسبه کنید.

۱ ، ۴ ، ۷ ، ۱۰ ، ... ، ۵۸

پاسخ: در این دنباله $a_۱ = ۱$ و $d = ۴ - ۱ = ۳$ است. پس:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \rightarrow S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۱ + ۵۸)$$

$$\rightarrow S_{۲۰} = ۱۰ \times ۵۹ = ۵۹۰$$

مثال ۴۹: در یک دنباله با جمله اول ۶۷ و اختلاف مشترک ۲− مجموع چهل جمله اول را تعیین کنید.

پاسخ: $a_۱ = ۶۷$ و $d = -۲$ پس:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n - ۱)d)$$

$$\rightarrow s_{۴۰} = \frac{۴۰}{۲}(۲ \times ۶۷ + (۴۰ - ۱) \times (-۲))$$

$$\rightarrow s_{۴۰} = ۲۰(۱۳۴ + ۳۹ \times (-۲))$$

$$\rightarrow s_{۴۰} = ۲۰(۱۳۴ - ۷۸) = ۲۰ \times ۵۶ = ۱۱۲۰$$

مثال ۵۰: مجموع اعداد زیر را تعیین کنید.　۱ , ۵ , ۹ , ... , ۴۰۱

پاسخ: دنباله داده شده حسابی است زیرا فاصله جملات برابر ۴ است، پس $d = ۴$. چون تعداد جملات مشخص نیست ابتدا باید n را بدست آوریم.

$$n = \frac{b-a}{d} + ۱$$

$$\text{تعداد جملات} \rightarrow n = \frac{۴۰۱-۱}{۴} + ۱ = ۱۰۱$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \rightarrow S_{۱۰۱} = \frac{۱۰۱}{۲}(۱ + ۴۰۱) = \frac{۱۰۱ \times ۴۰۲}{۲} = ۲۰۳۰۱$$

مثال۵۱: در یک فروشگاه مواد غذایی در قسمت فروش کنسروها، هفت ردیف وجود دارد که روی ردیف اول از پایین ۲۶ کنسرو قرار دارد. اگر در هر ردیف نسبت به ردیف پایین خود ۳ کنسرو کمتر چیده شده باشد، مجموع کل کنسروها چند تاست؟

پاسخ: ابتدا تعدادی از جملات دنباله را تعیین می‌کنیم. ... و ۲۰ و ۲۳ و ۲۶ پس: $d = -۳$ و $a_۱ = ۲۶$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\rightarrow s_۷ = \frac{۷}{۲}(۲ \times ۲۶ + (۷-۱) \times (-۳))$$

$$\rightarrow s_۷ = \frac{۷}{۲}(۵۲ + ۶ \times (-۳))$$

$$\rightarrow s_۷ = \frac{۷}{۲}(۳۴) = \frac{۷ \times ۳۴}{۲} = ۱۱۹$$

مثال۵۲: در دنباله بازگشتی زیر مجموع ده جمله اول دنباله را محاسبه کنید.

$a_{n+۱} = a_n - ۴ \quad , a_۱ = ۲۰۱$

پاسخ: ابتدا تعدادی از جملات دنباله را تعیین می‌کنیم.

...و ۱۸۹ و ۱۹۳ و ۱۹۷ و ۲۰۱

دنباله حسابی با $a_۱ = ۲۰۱$ و $d = -۴$ است. پس:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\rightarrow s_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲ \times ۲۰۱ + (۱۰-۱) \times (-۴))$$

$$\rightarrow s_{۱۰} = ۵(۴۰۲ + ۹ \times (-۴))$$

$$\rightarrow s_{۱۰} = ۵(۴۰۲ - ۳۶) = ۵ \times ۳۶۶ = ۱۸۳۰$$

مثال۵۳: در یک دنباله حسابی با جمله اول ۸ مجموع ۲۰ جمله اول برابر ۹۲۰ شده است. مقدار اختلاف مشترک را تعیین کنید.

پاسخ: $a_۱ = ۸ \quad , \quad d = ? \quad , \quad S_{۲۰} = ۹۲۰$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\rightarrow ۹۲۰ = \frac{۲۰}{۲}(۲ \times ۸ + (۲۰ - ۱) \times d)$$

$$\rightarrow ۹۲۰ = ۱۰(۱۶ + ۱۹d) \rightarrow ۹۲۰ = ۱۶۰ + ۱۹۰d$$

$$۱۹۰d = ۹۲۰ - ۱۶۰ \rightarrow ۱۹۰d = ۷۶۰$$

$$\rightarrow d = \frac{۷۶۰}{۱۹۰} = ۴$$

مثال۵۴: خرداد ۹۸:

مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید. (۱/۵)

پاسخ: می‌دانیم اعداد فرد دنباله‌ای حسابی به صورت مقابل هستند: ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ...

$$a_۱ = ۱ \ , d = ۲$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\rightarrow s_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}(۲ \times ۱ + (۳۰ - ۱) \times ۲)$$

$$\rightarrow s_{۳۰} = ۱۵(۲ + ۵۸)$$

مثال۵۵: شهریور ۹۸:

مجموع بیست جمله اول دنباله ... و ۲۷ و ۳۱ و ۳۵ را به دست آورید. (۱/۷۵)

پاسخ:

$$a_۱ = ۳۵ \ , d = -۴$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\rightarrow s_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲ \times ۳۵ + (۲۰ - ۱) \times (-۴))$$

$$\rightarrow s_{۲۰} = ۱۰(۷۰ - ۷۶) = ۱۰ \times (-۶) = -۶۰$$

مثال۵۶: دی ۹۸:

مجموع بیست جمله اول دنباله ... و ۱۰ و ۷ و ۴ را محاسبه کنید. (۱/۲۵)

پاسخ: $a_۱ = ۴\ , d = ۳$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\rightarrow s_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲ \times ۴ + (۲۰ - ۱) \times ۳)$$

$$\rightarrow s_{۲۰} = ۱۰(۸ + ۵۷) = ۶۵۰$$

مثال۵۷: خرداد ۹۹:

الف) مجموع شانزده جمله اول اعداد زوج را به دست آورید. (۱)

ب) در یک دنباله حسابی، جمله اول ۲۵ و احتلاف مشترک برابر ۱۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۶۰۱ است؟ (۱)

پاسخ (الف): می‌دانیم اعداد زوج دنباله‌ای حسابی به صورت مقابل هستند: ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ,...

$$a_۱ = ۲\ , d = ۲$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \rightarrow s_{۱۶} = \frac{۱۶}{۲}(۲ \times ۲ + (۱۶ - ۱) \times ۲)$$

$$\rightarrow s_{۱۶} = ۸(۴ + ۳۰) = ۲۷۲$$

پاسخ ب) $a_۱ = ۲۵\ , d = ۱۸$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \rightarrow ۶۰۱ = ۲۵ + (n-۱) \times ۱۸$$

$$\rightarrow ۶۰۱ = ۲۵ + ۱۸n - ۱۸$$

$$\rightarrow ۶۰۱ - ۷ = ۱۸n \rightarrow ۱۸n = ۵۹۴ \rightarrow n = \frac{۵۹۴}{۱۸} = ۳۳$$

فصل ۳ـ الگوهای غیر خطی

توابع نمایی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل‌ها، بیماری‌های واگیردار، شدت اصوات و زلزله‌ها کاربرد دارد.

فصل سوم: الگوهای غیر خطی

درس ۱: دنباله هندسی

در فصل قبل با دنباله حسابی و مفاهیم مرتبط با آن آشنا شدید. در این فصل در قسمت اول با تعریف دنباله هندسی آشنا می‌شوید و ویژگیها و مفاهیم مربوط به آن را می‌آموزید. چگونگی تشخیص دنباله هندسی، تعیین نسبت مشترک و جمله عمومی آن، معرفی واسطه هندسی و درج کردن چند واسطه هندسی بین دو عدد و بدست آوردن مجموع n جمله اول دنباله هندسی از جمله مواردی است که بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: به دنباله زیر توجه کنید و به سوالات مطرح شده پاسخ دهید.

۳ ۶ ۱۲ ۲۴ ۴۸ ...

الف) جمله‌ی دوم چند برابر جمله اول است؟ ۲ برابر

ب) جمله سوم چند برابر جمله دوم است؟۲ برابر

ج) آیا این رابطه بین جملات متوالی دیگر دنباله نیز وجود دارد؟ بله

■ با کمی دقت ملاحظه می‌شود در دنباله‌ی بالا افزایش جملات به صورت منظم است یعنی به جز جمله اول، با ضرب کردن مقدار ثابت ۲ در هر جمله، جمله بعدی بدست می‌آید. چنین دنباله‌هایی را دنباله هندسی می‌نامند که دارای نمودار غیر خطی‌اند.

دنباله هندسی:

یک دنباله هندسی، دنباله‌ای است به صورت:

$$a \xrightarrow{\times r} ar \xrightarrow{\times r} ar^{۲} \xrightarrow{\times r} ar^{۳} \ \dots \xrightarrow{\times r} ar^{n-۱}$$

جمله اول جمله دوم جمله سوم جمله چهارم جمله n اُم

که در آن $a \neq ۰$ جمله اول و عدد ثابت $r \neq ۰$ « نسبت مشترک » جملات دنباله است. جمله nاُم این دنباله (جمله عمومی) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a_n = ar^{n-۱}$$

یک دنباله هندسی دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله‌ی اول) با ضرب شدن عددی ثابت در جمله‌ی قبل از خودش بدست می‌آید. این عدد ثابت که همان خارج قسمت هر جمله به جمله‌ی قبلش در دنباله هندسی است را نسبت مشترک می‌نامند.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-۱}}$$

(اگر دقت کنید توان r همواره یک واحد از شماره جمله کمتر است)

مثال ۲: کدامیک از دنباله‌های زیر هندسی هستند؟ نسبت مشترک را تعیین کنید.

الف) ... ۳۶ ۱۲ ۴

پاسخ: این دنباله هندسی است زیرا نسبت هر دو جمله متوالی آن همواره مقدار ثابتی است. $r = ۳$

$$\frac{۱۲}{۴} = ۳ \quad , \quad \frac{۳۶}{۱۲} = ۳ \quad \to r = ۳$$

ب) ... -۸۰۰ ۴۰۰ -۲۰۰ ۱۰۰

پاسخ: این دنباله هندسی است زیرا: $\frac{-۸۰۰}{۴۰۰} = -۲ \quad , \quad \frac{۴۰۰}{-۲۰۰} = -۲ \quad , \quad \frac{-۲۰۰}{۱۰۰} = -۲$

مقدار نسبت مشترک برابر ۲- است. $r = -۲$

ج) $۵ \quad ۲۰ \quad ۸۰ \quad ۱۲۰ \quad ...$

پاسخ: این دنباله هندسی نیست. زیرا $\frac{۲۰}{۵} = ۴ \quad , \quad \frac{۸۰}{۲۰} = ۴ \quad , \quad \frac{۱۲۰}{۸۰} = \frac{۳}{۲}$

نسبت بین جملات ثابت نیست و تغییر کرده است.

تذکر:

در یک دنباله هندسی:

۱- اگر جمله اول مثبت و $r > ۱$ باشد، دنباله افزایشی است. مانند دنباله زیر:

$$۵ \quad ۱۵ \quad ۴۵ \quad ... \qquad r = ۳$$

۲- اگر جمله اول مثبت و $۰ < r < ۱$ باشد، دنباله کاهشی است. مانند دنباله زیر:

$$۲ \quad \frac{۲}{۵} \quad \frac{۲}{۲۵} \quad \frac{۲}{۱۲۵} \quad ... \qquad r = \frac{۱}{۵}$$

۳- اگر $r = ۱$ باشد جملات یکسان هستند و دنباله ثابت است. مانند دنباله زیر:

$$۹ \quad ۹ \quad ۹ \quad ۹ \quad ... \qquad r = ۱$$

۴- اگر جمله اول مثبت و $r < ۰$ باشد، جملات یک در میان مثبت و منفی هستند و دنباله نه کاهشی است و نه افزایشی.

$$۷ \quad -۱۴ \quad ۲۸ \quad -۵۶ \quad ... \qquad r = -۲$$

۵- اگر جمله اول منفی و $۰ < r < ۱$ باشد، دنباله افزایشی است. مانند دنباله زیر:

$$-۳ \quad \frac{-۳}{۴} \quad \frac{-۳}{۱۶} \quad \frac{-۳}{۶۴} \quad ... \qquad r = -\frac{۱}{۴}$$

۶- اگر جمله اول منفی و $r < ۰$ باشد، جملات یک در میان مثبت و منفی هستند و دنباله نه کاهشی است و نه افزایشی.

$$-۴ \quad ۱۲ \quad -۳۶ \quad ۱۰۸ \quad ... \qquad r = -۳$$

مثال ۳: در دنباله‌های هندسی زیر جمله عمومی را تعیین کنید.

الف) ... ۶۴ ۳۲ ۱۶ ۸

پاسخ: نسبت مشترک تمام جملات برابر ۲ است زیرا $r = \frac{۱۶}{۸} = ۲$ (این دنباله صعودی است) و جمله اول $a = ۸$

با استفاده از رابطه مربوط به جمله عمومی داریم:

$$a_n = ar^{n-۱} \rightarrow a_n = ۸ \times ۲^{n-۱} = ۲^۳ \times ۲^{n-۱} = ۲^{۳+n-۱} = ۲^{n+۲}$$

ب) ... $\frac{۱}{۵}$ ۱ ۵ ۲۵

پاسخ: جمله اول $a = ۲۵$ و مقدار نسبت مشترک $r = \frac{۱}{۵}$ (این دنباله نزولی است) پس داریم:

$$a_n = ar^{n-۱} \rightarrow a_n = ۲۵ \times (\frac{۱}{۵})^{n-۱} = ۵^۲ \times (۵^{-۱})^{n-۱} = ۵^۲ \times ۵^{-n+۱} = ۵^{-n+۳}$$

تذکر: با معلوم بودن جمله عمومی دنباله هر جمله دلخواه از دنباله را می‌توان بدست آورد.

مثال ۴: در یک دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = ۳ \times ۲^{n-۱}$ جملات چهارم و هفتم را تعیین کنید.

پاسخ: کافی است به جای n اعداد ۴ و ۷ را جاگذاری کنیم.

$$a_۴ = ۳ \times ۲^{۴-۱} = ۳ \times ۲^۳ = ۳ \times ۸ = ۲۴$$

$$a_۷ = ۳ \times ۲^{۷-۱} = ۳ \times ۲^۶ = ۳ \times ۶۴ = ۱۹۲$$

مثال ۵: کدامیک از دنباله‌های بازگشتی زیر دنباله هندسی هستند؟

الف) $a_{n+۱} = \frac{۳}{۴} a_n \qquad a_۱ = ۲$

پاسخ: چند جمله از دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_۲ = \frac{۳}{۴} a_۱ = \frac{۳}{۴} \times ۲ = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

$$a_۳ = \frac{۳}{۴} a_۲ = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۸}$$

$$a_۴ = \frac{۳}{۴}a_۳ = \frac{۳}{۴} \times \frac{۹}{۸} = \frac{۲۷}{۳۲}$$

$$۲\ , \frac{۳}{۲}\ , \frac{۹}{۸} , \frac{۲۷}{۳۲} , \dots$$

این دنباله یک دنباله هندسی است زیرا از ضرب عدد ثابت $\frac{۳}{۴}$ در هر جمله، جمله بعدی بدست می‌آید. پس: $r = \frac{۳}{۴}$

ب) $a_{n+۱} = a_n + ۳ \qquad a_۱ = ۵$

پاسخ: چند جمله از دنباله را تعیین می‌کنیم: $a_۲ = a_۱ + ۳ = ۵ + ۳ = ۸$

$$a_۳ = a_۲ + ۳ = ۸ + ۳ = ۱۱$$

$$a_۴ = a_۳ + ۳ = ۱۱ + ۳ = ۱۴$$

پس می‌توان جملات دنباله را به صورت زیر مرتب کرد:

$$۵ \quad ۸ \quad ۱۱ \quad ۱۴ \quad \dots$$

با تقسیم هر جمله به جمله قبلش داریم:

$$\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۸}{۵} \quad , \quad \frac{a_۳}{a_۲} = \frac{۱۱}{۸} \quad , \quad \frac{a_۴}{a_۳} = \frac{۱۴}{۱۱}$$

این دنباله هندسی نیست، زیرا نسبت‌ها با هم برابر نیستند.

تذکر: با مشخص بودن دو جمله a_m و a_n از دنباله هندسی می‌توان با استفاده از رابطه های زیر نسبت مشترک را محاسبه نمود. در رابطه زیر m, n شماره جملات مورد نظر هستند.

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

این رابطه را می‌توان به صورت دیگری نیز نوشت و از آن مقدار r را به صورت مستقیم به دست آورد. (رابطه زیر با ریشه-گیری از رابطه بالا به دست آمده است. در صورتی که $m - n$ عددی زوج باشد، نسبت $\frac{a_m}{a_n}$ باید عددی مثبت باشد)

$$r = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}}$$

مثال ۶: جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی با جملات مثبت به ترتیب ۱۲ و ۹۶ است. نسبت مشترک دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: با توجه به اطلاعات داده شده داریم: $a_۶ = ۹۶$ و $a_۳ = ۱۲$

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \to r^{۶-۳} = \frac{a_۶}{a_۳} = \frac{۹۶}{۱۲} = ۸ \to r^۳ = ۸ \to r = ۲$$

یا مستقیما می‌توان مقدار r را تعیین کرد.

$$r = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}} = \sqrt[۶-۳]{\frac{a_۶}{a_۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۹۶}{۱۲}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

مثال ۷: در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله‌ی سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم آن ۲۴۳ است. جمله چهارم را بیابید.

پاسخ: با توجه به اطلاعات داده شده داریم: $a_۵ = ۲۴۳$ و $a_۳ = ۲۷$

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \to r^{۵-۳} = \frac{a_۵}{a_۳} = \frac{۲۴۳}{۲۷} = ۹ \to r^۲ = ۹ \to r = \pm ۳ \to r = ۳$$

چون جملات دنباله هندسی مثبت هستند $r = ۳$ قابل قبول است.

برای بدست آوردن جمله چهارم کافی است جمله سوم را در عدد ۳ ضرب کنیم.

$$a_۳ = ۲۷ \xrightarrow{\times ۳} a_۴ = ۸۱$$

درج واسطه هندسی بین دو عدد:

فرض کنید سه عدد a, b, c تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند، به بیان دیگر سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت b را واسطه هندسی بین a و c می‌نامند و برای درج (نوشتن) واسطه هندسی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$b^{۲} = ac \quad \text{یا} \quad \mathrm{b} = \sqrt{ac}$$

به عنوان مثال عدد ۶ واسطه حسابی بین ۹ و ۴ است، زیرا: $\sqrt{۴ \times ۹} = ۶$. پس سه عدد ۹ ۶ ۴ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند.

مثال۸: واسطه هندسی بین اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) ۱۶ و ۴ :

پاسخ: $\mathrm{b} = \sqrt{ac} = \sqrt{۴ \times ۱۶} = \sqrt{۶۴} = ۸$ پس سه عدد ۱۶ ۸ ۴ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند.

ب) ۲۷ و ۳ :

پاسخ: $\mathrm{b} = \sqrt{ac} = \sqrt{۳ \times ۲۷} = \sqrt{۸۱} = ۹$ پس سه عدد ۲۷ ۹ ۳ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند.

مثال۹: مقدار m را طوری تعیین کنید که $m - ۵ , ۴ , m + ۱$ سه جمله متوالی دنباله هندسی باشد. سپس جملات را بدست آورید.

پاسخ:

$$b^{۲} = ac \rightarrow ۴^{۲} = (m - ۵)(m + ۱)$$

$$\rightarrow ۱۶ = m^{۲} + m - ۵m - ۵$$

$$\rightarrow m^{۲} - ۴m - ۲۱ = ۰$$

مثال۱۰: مقدار k را طوری تعیین کنید که $۲k+۳$, $۲k$, $۲k-۲$ سه جمله متوالی دنباله هندسی باشد. این سه جمله را بنویسید.

پاسخ:

$$b^۲ = ac \rightarrow (۲k)^۲ = (۲k-۲)(۲k+۳)$$

$$۴k^۲ = ۴k^۲ + ۶k - ۴k + ۶$$

$$\rightarrow ۲k = ۶ \rightarrow k = ۳$$

با جاگذاری مقدار $k = ۳$ جملات به صورت $۲\times۳+۳$, ۲×۳ , $۲\times۳-۲$ هستند. ۹ , ۶ , ۴

درج k واسطه هندسی بین دو عدد b, a:

اگر بخواهیم بین دو عدد b, a که $a < b$، k عدد طوری پیدا کنیم که تمامی این اعداد تشکیل یک دنباله هندسی دهند، ابتدا نسبت مشترک را از رابطه زیر بدست می‌آوریم.

$$a \quad \underbrace{\square\ \square\ \square\ \ldots\ \square\ \square\ \square}_{k \text{ واسطه هندسی}} \quad b$$

$$r^{k+۱} = \frac{b}{a}$$

مثال۱۱: بین دو عدد ۴ و ۲۵۶ پنج واسطه هندسی مثبت درج کنید.

پاسخ:

$$۴ \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad ۲۵۶$$

$$r^{k+۱} = \frac{b}{a} \rightarrow r^{۵+۱} = \frac{۲۵۶}{۴} \rightarrow r^۶ = ۶۴ \rightarrow r^۶ = ۲^۶ \rightarrow r = \pm ۲ \rightarrow r = ۲$$

با ضرب کردن اعداد در $r = ۲$ اعداد بعدی دنباله به صورت زیر بدست می‌آیند. (چون واسطه هندسی مثبت ذکر شده است)

۴　۸　۱۶　۳۲　۶۴　۱۲۸　۲۵۶

مثال۱۲: بین دو عدد ۳ و ۲۴۳ سه واسطه هندسی مثبت بنویسید.

پاسخ: $r^{k+۱} = \frac{b}{a} \to r^{۳+۱} = \frac{۲۴۳}{۳} \to r^{۴} = ۸۱ \to r^{۴} = ۳^{۴} \to r = \pm ۳ \to r = ۳$

با ضرب کردن اعداد در $r = ۳$ اعداد بعدی دنباله به صورت زیر بدست می‌آیند.

۳ ۹ ۲۷ ۸۱ ۲۴۳

مثال۱۳: بین دو عدد ۵ و ۱۳۵ چند عدد قرار دهیم تا با هم تشکیل دنباله هندسی با نسبت مشترک ۳ دهند؟

پاسخ: ۵ □ ... □ ۱۳۵

$$a = ۵ , b = ۱۳۵ , r = ۳ , k = ?$$

$$r^{k+۱} = \frac{b}{a} \to ۳^{k+۱} = \frac{۱۳۵}{۵} \to ۳^{k+۱} = ۲۷ \to ۳^{k+۱} = ۳^{۳} \to k + ۱ = ۳ \to k = ۲$$

باید دو عدد قرار دهیم که آن دو عدد ۱۵ و ۴۵ هستند.

نیمه عمر دارو:

نیمه عمر دارو، مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو می‌رسد.

مثال۱۴: طبق آزمایشهای انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

پاسخ: $۸۰ \xRightarrow{\text{اولین نیمه عمر}} ۴۰ \xRightarrow{\text{دومین نیمه عمر}} ۲۰ \Rightarrow ۱۰ \Rightarrow ۵ \Rightarrow ۲/۵ \Rightarrow ۱/۲۵ \Rightarrow ۰/۶۲۵ \Rightarrow ۰/۳۱۲۵$

بعد از گذشت ۸ نیمه. چون هر نیمه عمر شش ساعت است پس بعد از گذشت $۴۸ = ۶ \times ۸$ ساعت مجاز است از چای یا قهوه استفاده کند.

■**تذکر:** درمسائل مربوط به نیمه عمر اگر $a_۰$ مقدار اولیه مسئله، n تعداد نیمه عمر و a_n جمله n اُم باشد، می‌توان از رابطه مقابل استفاده کرد: $a_n = a_۰ \times (\frac{۱}{۲})^n$

این رابطه را می‌توان به صورت بازگشتی نیز نمایش داد: (با فرض مقدار اولیه $a_۰$)

$$a_n = \frac{۱}{۲} a_{n-۱}$$

ضمنا در مورد محاسبه تعداد نیمه عمر داریم: $\text{تعداد نیمه عمر} = \frac{\text{مدت زمان سپری شده}}{\text{طول یک نیمه عمر}}$

مثال۱۵: اگر در بدن شخصی پس از مصرف دارو ۱۰۰ میلی‌گرم دارو وارد شود و نیمه عمر دارو ۶ ساعت باشد. پس از ۱۲ ساعت چند میلی‌گرم از دارو در بدن شخص باقی‌مانده است؟

پاسخ: ابتدا تعداد نیمه عمر را بدست می‌آوریم. $\text{تعداد نیمه عمر} = \frac{\text{مدت زمان سپری شده}}{\text{طول یک نیمه عمر}} \to n = \frac{۱۲}{۶} = ۲$

پس مقدار دارو پس از گذشت ۲ نیمه عمر مورد نظر است.

$$۱۰۰ \xRightarrow{\text{اولین نیمه عمر}} ۵۰ \xRightarrow{\text{دومین نیمه عمر}} ۲۵$$

مثال۱۶: اگر شخصی ۱۲۰ میلی‌گرم از دارویی را مصرف کرده باشد که نیمه عمر آن دارو ۸ ساعت است. پس از ۲۴ ساعت چند میلی‌گرم از دارو در بدن شخص باقی‌مانده است؟

پاسخ: ابتدا تعداد نیمه عمر را بدست می‌آوریم. $\text{تعداد نیمه عمر} = \frac{\text{مدت زمان سپری شده}}{\text{طول یک نیمه عمر}} \to n = \frac{۲۴}{۸} = ۳$

پس مقدار دارو پس از گذشت ۳ نیمه عمر مورد نظر است.

$$۱۲۰ \xRightarrow{\text{اولین نیمه عمر}} ۶۰ \xRightarrow{\text{دومین نیمه عمر}} ۳۰ \xRightarrow{\text{سومین نیمه عمر}} ۱۵$$

$$a_n = a_۰ \times (\frac{۱}{۲})^n \to a_۳ = ۱۲۰ \times (\frac{۱}{۲})^۳ = ۱۲۰ \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱۲۰}{۸} = ۱۵$$

رابطه بازگشتی دنباله هندسی:

همانطور که گفتیم در دنباله هندسی نسبت هر دو جمله متوالی مقداری ثابت است یعنی: $\frac{a_n}{a_{n-۱}} = r$

بنابراین رابطه بازگشتی دنباله‌های هندسی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_n = r\, a_{n-۱}$$

مثال۱۷: رابطه بازگشتی دنباله هندسی مقابل را بنویسید. (با شرط $a_۱ = ۶$) $۶, ۳, \frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۴}, \ldots$

پاسخ: با محاسبه نسبت مشترک جملات دنباله $r = \frac{۳}{۶} = \frac{\frac{۳}{۲}}{۳} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۲}$ رابطه بازگشتی به صورت زیر است:

$$a_۱ = ۶\,, a_n = \frac{۱}{۲}\, a_{n-۱}$$

■ دقت کنید رابطه بازگشتی بالا را می‌توان به صورت رابطه زیر نیز نوشت: (با مفروض بودن $a_۱$)

$$a_{n+۱} = r\, a_n$$

مثال۱۸: رابطه بازگشتی دنباله هندسی مقابل را بنویسید. (با شرط $a_۱ = \frac{۲}{۵}$) $\frac{۲}{۵}, ۲, ۱۰, \ldots$

پاسخ: با محاسبه نسبت مشترک جملات دنباله $r = \frac{۲}{\frac{۲}{۵}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$ رابطه بازگشتی به صورت زیر است:

$$a_۱ = \frac{۲}{۵}\,, a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\, a_n \quad \text{یا} \quad a_۱ = \frac{۲}{۵}\,, a_n = \frac{۱}{۲}\, a_{n-۱}$$

مجموع n جمله از دنباله هندسی:

در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک $r \neq 1$ برای محاسبه مجموع n جمله نخست دنباله که به صورت زیر نوشته می‌شود از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1\,(1-r^n)}{1-r}$$

مثال۱۹: مجموع ۵ جمله اول دنباله مقابل را بیابید. $\frac{1}{3}$ ، ۱ ، ۳ ، ۹ ، ...

پاسخ: $a_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad r = \frac{3}{1} = 3 \quad , \quad S_5 = ?$

$$S_n = \frac{a_1\,(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_5 = \frac{\frac{1}{3} \times (1-3^5)}{1-3} = \frac{\frac{1}{3} \times (1-243)}{-2} = \frac{-\frac{242}{3}}{-2} = \frac{242}{6} = 40/33$$

مثال۲۰: مجموع ۱۰جمله اول دنباله هندسی مقابل را بیابید. ... و ۱۶ و ۸ و۴ و ۲

پاسخ: $a_1 = 2 \quad , \quad r = \frac{4}{2} = 2 \quad , \quad S_{10} = ?$

$$S_n = \frac{a_1\,(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_{10} = \frac{2 \times (1-2^{10})}{1-2} = \frac{2 \times (1-1024)}{-1} = \frac{2 \times (-1023)}{-1} = 2046$$

مثال۲۱: در دنباله ... ,۱۲ , ۶ ,۳ مجموع ۵ جمله اول را به دست آورید.

پاسخ: $a_1 = 3 \quad , \quad r = \frac{6}{3} = 2 \quad , \quad S_5 = ?$

$$S_n = \frac{a_1\,(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_5 = \frac{3 \times (1-2^5)}{1-2} = \frac{3 \times (1-32)}{-1} = \frac{3 \times (-31)}{-1} = 93$$

مثال۲۲: مجموع زیر را به دست آورید.

$$۱ + ۴ + ۱۶ + \cdots + ۴۰۹۶$$

پاسخ: ابتدا باید تعداد جملات را مشخص کنیم یعنی مقدار n را به‌دست آوریم. پس از فرمول جمله عمومی دنباله هندسی استفاده می‌کنیم.

$$a_۱ = ۱ \quad , \; r = \frac{۴}{۱} = ۴ \quad , \; n = ?$$

$$a_n = ar^{n-۱} \to ۴۰۹۶ = ۱ \times (۴)^{n-۱} \to ۴۰۹۶ = (۴)^{n-۱}$$

اما با استفاده از تجزیه می توان دریافت: $۴۰۹۶ = ۴^۶$ در نتیجه:

$$\to ۴^۶ = (۴)^{n-۱} \to n - ۱ = ۶ \to n = ۷$$

پس باید مقدار $S_۷$ را محاسبه کنیم.

$$S_n = \frac{a_۱\,(۱-r^n)}{۱-r} \to S_۷ = \frac{۱ \times (۱ - ۴^۷)}{۱ - ۴} = \frac{۱ \times (۱ - ۱۶۳۸۴)}{-۳} = \frac{-۱۶۳۸۳}{-۳} = ۵۴۶۱$$

مثال۲۳: در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله سوم برابر ۱۸ و جمله پنجم برابر ۱۶۲ است. مجموع شش جمله اول را محاسبه کنید.

پاسخ: با توجه به اینکه $a_۵ = ۱۶۲$ و $a_۳ = ۱۸$ ابتدا باید نسبت مشترک و جمله اول را بدست آوریم.

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \to r^{۵-۳} = \frac{a_۵}{a_۳} = \frac{۱۶۲}{۱۸} = ۹ \to r^۲ = ۹ \to r = ۳$$

برای به‌دست آوردن جمله اول می‌توانیم با دو بار تقسیم بر ۳ کردن عدد ۱۸ به جمله اول برسیم. (یا از فرمول استفاده کنیم)

$$a_۳ = ۱۸ \overset{\div ۳}{\Rightarrow} a_۲ = ۶ \overset{\div ۳}{\Rightarrow} a_۱ = ۲$$

$$S_n = \frac{a_۱\,(۱-r^n)}{۱-r} \to S_۶ = \frac{۲ \times (۱ - ۳^۶)}{۱ - ۳} = \frac{۲ \times (۱ - ۷۲۹)}{-۲} = \frac{۲ \times (-۷۲۸)}{-۲} = ۷۲۸$$

مثال۲۴: مجموع چند جمله از دنباله هندسی زیر برابر ۷۶۲ است؟

۶ , ۱۲ , ۲۴ , ...

پاسخ: $a_۱ = ۶ \quad , \; r = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \quad , \; S_n = ۷۶۲ \; , \; n = ?$

$$S_n = \frac{a_۱ \, (۱-r^n)}{۱-r} \rightarrow ۷۶۲ = \frac{۶ \times (۱ - ۲^n)}{۱ - ۲} = \frac{۶ \times (۱ - ۲^n)}{-۱} = -۶(۱ - ۲^n)$$

$$۷۶۲ = -۶(۱ - ۲^n) \xRightarrow{\div(-۶)} - ۱۲۷ = ۱ - ۲^n \rightarrow ۲^n = ۱ + ۱۲۷$$

$$\rightarrow ۲^n = ۱۲۸ \rightarrow ۲^n = ۲^۷ \rightarrow n = ۷$$

مثال۲۵: الف) جمله چندم دنباله زیر برابر ۵۷۶ است؟

ب) مجموع پنج جمله اول دنباله را بدست آورید.

۹ , ۱۸ , ۳۶ , ...

پاسخ: الف) $a_۱ = ۹ \quad , \; r = \frac{۱۸}{۹} = ۲ \quad , \quad n = ?$

$$a_n = ar^{n-۱} \rightarrow ۵۷۶ = ۹ \times (۲)^{n-۱} \overset{\div ۹}{\Rightarrow} ۶۴ = (۲)^{n-۱}$$

$$\rightarrow ۲^۶ = (۲)^{n-۱} \rightarrow n - ۱ = ۶ \rightarrow n = ۷$$

پاسخ: ب)

$$S_n = \frac{a_۱ \, (۱-r^n)}{۱-r} \rightarrow S_۵ = \frac{۹ \times (۱ - ۲^۵)}{۱ - ۲} = \frac{۹ \times (۱ - ۳۲)}{-۱} = -۹ \times (-۳۱) = ۲۷۹$$

مثال۲۶: یک شهاب سنگ با وزن ۱۰ هزار کیلوگرم پس از ورود به جو زمین در هر دقیقه ۲۰ درصد وزن خود را از دست می‌دهد. پس از ۵ دقیقه وزن این شهاب سنگ کدام است؟

الف) ۵۷۰۰   ب) ۱۰۲۴   ج) ۳۲۷۶/۸   د) ۴۰۹۶

پاسخ: چون شهاب سنگ در هر دقیقه ۲۰ درصد از وزن خود را از دست می‌دهد پس ۸۰ درصد وزنش باقی می‌ماند. پس از ورود به جو زمین بعد از دقیقه اول $\frac{۸۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰۰۰ = ۸۰۰۰$ کیلوگرم از وزنش باقی می‌ماند. بعد از ۲ دقیقه :

$$\frac{۸۰}{۱۰۰} \times ۸۰۰۰ = ۶۴۰۰$$

$$۱۰۰۰۰ \xrightarrow{\text{بعد از یک دقیقه}} ۸۰۰۰ \xrightarrow{\text{بعد از دو دقیقه}} ۶۴۰۰ \Rightarrow ۵۱۲۰ \Rightarrow ۴۰۹۶ \Rightarrow ۳۲۷۶/۸$$

پس با فرض $a_۱ = ۱۰۰۰۰$ و $r = \frac{۸۰}{۱۰۰} = ۰/۸$ و استفاده از رابطه جمله عمومی می‌توانیم جمله ششم را تعیین کنیم.

$$a_n = ar^{n-۱} \rightarrow a_۶ = ۱۰۰۰۰ \times (۰/۸)^{۶-۱} = ۱۰۰۰۰ \times (۰/۸)^۵ = ۳۲۷۶/۸$$

گزینه (ج) درست است.

مثال۲۷: مجموع چند جمله دنباله هندسی زیر برابر ۱۰۲۶ است؟

$۶, -۱۲, ۲۴, ...$

الف) ۹   ب) ۸   ج) ۶   د) ۱۲

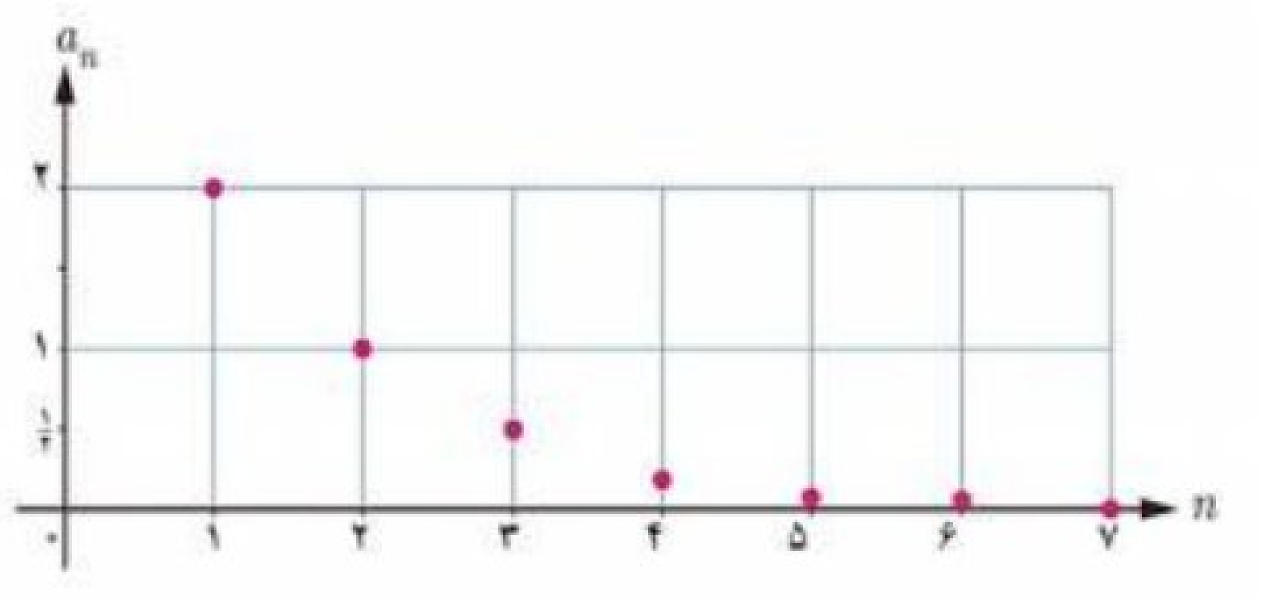
پاسخ: $a_۱ = ۶ \quad , \ r = \frac{-۱۲}{۶} = -۲ \quad , \ S_n = ۱۰۲۶ \ , \ n = ?$

$$S_n = \frac{a_۱ \ (۱-r^n)}{۱-r} \rightarrow ۱۰۲۶ = \frac{۶ \times (۱-(-۲)^n)}{۱-(-۲)} = \frac{۶ \times (۱-(-۲)^n)}{۳} = ۲(۱-(-۲)^n)$$

$$۵۱۳ = ۱-(-۲)^n \rightarrow ۵۱۲ = -(-۲)^n \rightarrow -۵۱۲ = (-۲)^n$$

$$\rightarrow (-۲)^۹ = (-۲)^n \rightarrow n = ۹$$

مثال۲۸: نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:



الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل $S_۱$ را به دست آورید.

پاسخ: الف) با توجه به نمودار جملات دنباله به صورت زوج مرتب‌های زیر است:

$$(۱,۲),(۲,۱),\left(۳,\frac{۱}{۲}\right),\left(۴,\frac{۱}{۴}\right),\ldots$$

$$۲,۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴}\ldots \quad \rightarrow \quad a_۱=۲ \quad , \quad r=\frac{۱}{۲}$$

$$a_n=ar^{n-۱} \rightarrow a_n=۲\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$$

ب)

$$S_n=\frac{a_۱\,(۱-r^n)}{۱-r} \rightarrow S_{۱۰}=\frac{۲\times\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\right)}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\times\left(۱-\frac{۱}{۱۰۲۴}\right)}{\frac{۱}{۲}}=۲\times\frac{\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}}{\frac{۱}{۲}}$$

$$=۲\times\frac{۲\times ۱۰۲۳}{۱۰۲۴}=\frac{۴\times ۱۰۲۳}{۱۰۲۴}=\frac{۱۰۲۳}{۲۵۶}$$

■ نکته:

برای بدست آوردن مجموع n جمله اول دنباله هندسی علاوه بر رابطه $S_n=\frac{a_۱\,(۱-r^n)}{۱-r}$ می‌توان با معلوم بودن جمله آخر دنباله یعنی a_n ، از رابطه دیگری نیز استفاده کرد که به صورت زیر است:

$$S_n=\frac{a_۱-ra_n}{۱-r}$$

مثال۲۹: مجموع جملات دنباله زیر را بدست آورید.

$۳,۹,۲۷,\ldots,۲۱۸۷$

پاسخ: $a_۱=۳ \quad , \quad r=\frac{۹}{۳}=۳ \quad , a_n=۲۱۸۷$

$$S_n=\frac{a_۱-ra_n}{۱-r} \rightarrow s_n=\frac{۳-(۳\times ۲۱۸۷)}{۱-۳}=\frac{۳-۶۵۶۱}{-۲}=\frac{-۶۵۵۸}{-۲}=۳۲۷۹$$

در این روش دیگر نیازی به تعیین کردن تعداد جملات نیست و راه حل کوتاه‌تر و سریعتر است.

درس ۲: ریشه n اُم و توان گویا

در سالهای گذشته با مفاهیم توان‌های صحیح اعداد و نحوه ریشه‌گیری از اعداد آشنا شدید. در این درس ابتدا به یادآوری این مطالب می‌پردازیم، سپس با ذکر مثالهای جدید ریشه‌گیری را گسترش می‌دهیم.

مثال ۳۰: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$(۰/۲)^{۳} = ۰/۰۰۸$ $\qquad (\frac{۴}{۳})^{۳} = \frac{۶۴}{۲۷}$ $\qquad ۵^{۳} = ۱۲۵$ $\qquad (-۳)^{۴} = ۸۱$

$\pi^{۰} = ۱$ $\qquad (-\frac{۶}{۵})^{۳} = -\frac{۲۱۶}{۱۲۵}$ $\qquad (-۲)^{۶} = ۶۴$ $\qquad -۲^{۶} = -۶۴$

$(\frac{۴}{۷})^{-۲} = (\frac{۷}{۴})^{۲} = \frac{۴۹}{۱۶}$ $\qquad (-\frac{۵}{۸})^{-۳} = (-\frac{۸}{۵})^{۳} = -\frac{۵۱۲}{۱۲۵}$ $\qquad ۳^{-۲} = \frac{۱}{۳^{۲}} = \frac{۱}{۹}$

یادآوری قوانین توان:

$a^m . a^n = a^{m+n}$ $\qquad ۳^{۵} \times ۳^{۴} = ۳^{۹}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad \frac{۷^{۹}}{۷^{۶}} = ۷^{۳}$

$a^m . b^m = (ab)^m$ $\qquad (-۲)^{۳} \times (-۶)^{۳} = ۱۲^{۳}$

$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$ $\qquad \frac{(-۱۸)^{۴}}{۳^{۴}} = (-\frac{۱۸}{۳})^{۴} = (-۶)^{۴} = ۶^{۴}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad (۴^{۲})^{۵} = ۴^{۱۰}$

$a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \quad a \neq ۰ , n \in \mathbb{N}$ $\qquad ۳^{-۸} = \frac{۱}{۳^{۸}}$ $\qquad (\frac{۷}{۹})^{-۴} = (\frac{۹}{۷})^{۴}$

$a^{۰} = ۱ \quad , a \neq ۰$ $\qquad ۵^{۰} = ۱$ $\qquad (-\frac{۳}{۷})^{۰} = ۱$

مثال۳۱: حاصل را به صورت اعداد تواندار بنویسید.

$(\frac{۱}{۲})^{۵} \times (۰/۵)^{۳} \times (\frac{۳}{۶})^{۴} = (\frac{۱}{۲})^{۱۲}$

$۵۴^{۴} \times ۲^{۴} = (۵۴ \times ۲)^{۴} = ۱۰۸^{۴}$

$(-\frac{۱}{۴})^{۳} \times ۱۶^{۳} \times (-۲)^{۳} = (-\frac{۱}{۴} \times ۱۶ \times (-۲))^{۳} = ۸^{۳}$

$(-۳)^{۷} \times (-۵)^{۷} = ۱۵^{۷}$

$\frac{۷^{۴}}{۳۵^{۴}} = (\frac{۷}{۳۵})^{۴} = (\frac{۱}{۵})^{۴}$

$۲۸^{۷} \div ۱۴^{۷} = (\frac{۲۸}{۱۴})^{۷} = ۲^{۷}$

$۱۰^{۱۲} \div ۱۰^{۹} = ۱۰^{۱۲-۹} = ۱۰^{۳}$

$\frac{۲۴^{۸}}{۲۴^{۶}} = ۲۴^{۸-۶} = ۲۴^{۲}$

$(۲^{۴})^{۳} \times ۲^{-۵} = ۲^{۱۲} \times ۲^{-۵} = ۲^{۱۲-۵} = ۲^{۷}$

$(۳^{۲})^{۶} = ۳^{۱۲}$

$(۵^{۲})^{۲} \times (-۸)^{۴} \times (\frac{۱}{۲})^{۴} = ۵^{۴} \times ۸^{۴} \times (\frac{۱}{۲})^{۴} = (۵ \times ۸ \times \frac{۱}{۲})^{۴} = ۲۰^{۴}$

$(۰/۱^{۳})^{۵} \times (۰/۱)^{۲} \times (\frac{۲}{۲۰})^{۴} = (۰/۱)^{۱۵} \times (۰/۱)^{۲} \times (۰/۱)^{۴} = (۰/۱)^{۲۱}$

$\frac{۲^{۵} \times ۳^{۵}}{۶^{۳}} = \frac{۶^{۵}}{۶^{۳}} = ۶^{۵-۳} = ۶^{۲}$

ریشه دوم:

اگر $a^{۲} = b$ باشد، عدد a را ریشه دوم عدد b می‌گوییم و می‌نویسیم: $a^{۲} = b \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}$

به طور کلی برای هر عددمثبت a ، دو عدد $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ را ریشه‌های دوم عدد a گویند.

به عنوان مثال مربع یا توان دوم اعداد ۳ – و ۳ برابر عدد ۹ است، یعنی: $۹ = (-۳)^{۲} = ۳^{۲}$ بنابراین دو عدد ۳ – و ۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌گویند.

■**تذکر:** چون مربع هر عدد حقیقی عددی مثبت است، به این دلیل اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

■**تذکر:** ریشه دوم عدد صفر برابر صفر است.

مثال۳۲: ریشه‌های دوم اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $۴۹ \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} ۷, -۷$

ب) $۰/۰۴ \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} ۰/۲, -۰/۲$

ج) $\frac{۲۵}{۸۱} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} \frac{۵}{۹}, -\frac{۵}{۹}$

د) $-۶۴ \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$ ریشه دوم ندارد

ریشه سوم: اگر $a^۳ = b$ باشد، عدد a را ریشه سوم عدد b می‌گوییم و می‌نویسیم: $a^۳ = b \Leftrightarrow \sqrt[۳]{b} = a$

به عنوان مثال مکعب یا توان سوم عدد ۳ برابر عدد ۲۷ است، یعنی: $۲۷ = ۳^۳$ بنابراین عدد ۳ را ریشه سوم عدد ۲۷ می‌گویند.

■**تذکر:** برای هرعدد حقیقی مانند a می‌توان یک ریشه‌ی سوم به صورت $\sqrt[۳]{a}$ تعیین نمود. یعنی عبارت زیر رادیکال فرجه سه می‌تواند عددی مثبت، صفر یا منفی باشد. بر حسب علامت زیر این رادیکال جواب نیز مثبت، صفر یا منفی بدست می‌آید.

مثال۳۳: ریشه‌ی سوم اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $۶۴ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} ۴$

ب) $-۰/۰۰۸ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} -۰/۲$

ج) $-\frac{۱۲۵}{۲۱۶} \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} -\frac{۵}{۶}$

د) $۲۰ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[۳]{۲۰}$

ریشه n ام: اگر n یک عدد طبیعی و $n \geq ۲$ باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n = a$ باشد. آنگاه:

الف) ریشه n ام یک عدد وقتی که n عددی زوج باشد:

اگر a عددی مثبت باشد، ریشه‌های n ام عدد a دو عدد قرینه به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است. دقت کنید اعداد منفی ریشه‌های زوج ندارند. به عنوان مثال توان ششم عدد ۲ برابر ۶۴ است و ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد ۲ و ۲− هستند.

مثال۳۴: ریشه‌ی اعداد زیر را تعیین کنید.

الف) $۲۵۶ \xrightarrow{\text{ریشه هشتم}} ۲, -۲$

ب) $۰/۰۰۱۶ \xrightarrow{\text{ریشه چهارم}} ۰/۲, -۰/۲$

د) $-\frac{۱}{۶۲۵} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$ ریشه دوم ندارد

ج) $۱۰۲۴ \xrightarrow{\text{ریشه دهم}} ۲ , -۲$

ب) ریشه n ام یک عدد وقتی که n عددی فرد باشد:

برای هرعدد حقیقی مانند a می‌توان یک ریشه‌ی n ام را به صورت $\sqrt[n]{a}$ تعیین نمود. عبارت زیر رادیکال فرجه فرد می‌تواند عددی مثبت، صفر یا منفی باشد. بر حسب علامت زیر این رادیکال جواب نیز مثبت، صفر یا منفی بدست می‌آید.

مثال۳۵: ریشه‌ی اعداد زیر را تعیین کنید.

ب) $-۰/۰۲۷ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} -۰/۳$

الف) $۳۲ \xrightarrow{\text{ریشه پنجم}} ۲$

ه) $۵۱۲ \xrightarrow{\text{ریشه نهم}} ۲$

د) $۳۵ \xrightarrow{\text{ریشه پنجم}} \sqrt[۵]{۳۵}$

ج) $-\frac{۱}{۱۲۵} \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} -\frac{۱}{۵}$

■تذکر مهم:

دقت کنید ریشه دوم مثبت عدد a (a عددی مثبت) را جذر a می‌نامند و با $\sqrt{a}$ نمایش می‌دهند. جذر اعداد حقیقی مثبت فقط عددی مثبت می‌تواند باشد. به عنوان مثال ریشه‌های دوم عدد ۲۵ اعداد ± ۵ هستند، اما جذر عدد ۲۵ فقط عدد $+۵$ است، یعنی: $\sqrt{۲۵} = ۵$ و همواره داریم: $\sqrt{a^{۲}} = |a|$

نتیجه:

برای هر عدد حقیقی مثبت a : n زوج باشد $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$

برای هر عدد حقیقی a: n فرد باشد $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$

به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$۱۱^{۲} = ۱۲۱ \Leftrightarrow \sqrt{۱۲۱} = ۱۱ \qquad (۰/۳)^{۲} = ۰/۰۹ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۰۹} = ۰/۳$$

$$\left(\frac{۲}{۷}\right)^{۲} = \frac{۴}{۴۹} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{۴}{۴۹}} = \frac{۲}{۷} \qquad (۱/۲)^{۲} = ۱/۴۴ \Leftrightarrow \sqrt{۱/۴۴} = ۱/۲$$

$$(-۳)^{۳} = -۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳ \qquad (۰/۱)^{۳} = ۰/۰۰۱ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{۰/۰۰۱} = ۰/۱$$

$\sqrt[۴]{(-۹)^۴} = |-۹| = ۹$　　　$\sqrt{(-\frac{۵}{۴})^۲} = \left|-\frac{۵}{۴}\right| = \frac{۵}{۴}$

$\sqrt[۴]{-۲^۴} = \sqrt{-۱۶}$ تعریف نشده　　　$\sqrt[۳]{(-۷)^۳} = -۷$

مثال۳۶: جاهای خالی را به صورت مناسب پرکنید.

الف) ....۲...... و ....۲- ..... ریشه‌های هشتم عدد ۲۵۶ هستند.

ب) ریشه‌های پنجم اعداد ... ۱ .... ، ..... ۱- ..... و ..... صفر ...... با خودشان برابر است.

ج) اگر $x = \sqrt[۴]{۸۱}$ در این صورت حاصل عبارت $x^۳ + ۲$ برابر است با .... ۲۹ ....

$$x = \sqrt[۴]{۸۱} \rightarrow x = ۳ \rightarrow x^۳ + ۲ = ۲۷ + ۲ = ۲۹$$

د) هر عدد مثبت دارای ... ۲...... ریشه چهارم است که ......قرینه........ یکدیگرند.

ه) عدد ۲ ریشه چهارم عدد ...... ۱۶......... و عدد ۳ ریشه سوم عدد ..... ۲۷ ..... است.

توان‌های گویا:

در بخش قبل مطالب مربوط به توانهای صحیح مرور و بررسی شد. در این بخش می‌خواهیم با توانهای گویا آشنا شویم.

در بسیاری از مسائل واقعی گاهی نیاز است از توانهای غیر صحیح مانند توانهای گویا استفاده کنیم.به عنوان مثال در فعالیت کتاب که به موضوع جرم نوعی باکتری اشاره دارد، گفته شده پس از گذشت هر ساعت جرم باکتری‌ها ۲ برابر می‌شود. اگر جرم اولیه باکتری‌ها را برابر یک گرم فرض کنیم، الگوی جرم آنها در جدول زیر نشان داده شده است.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	---	t
جرم (گرم)	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	---	۲^t

با کمی دقت می‌توان دریافت در هر مرحله جرم باکتری‌ها از رابطه $a_n = ۲^n$ پیروی می‌کند. به عنوان مثال پس از گذشتن ۶ ساعت، جرم باکتری‌ها $۶۴ = ۲^۶$ گرم می‌شود و پس از گذشت نیم ساعت جرم باکتری‌ها برابر $\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$ خواهد شد.

■ فرض می‌کنیم a یک عدد حقیقی مثبت باشد. برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان گویا (کسری) $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

تذکر: در این کتاب اگر $a < ۰$ باشد، $a^{\frac{۱}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. به عنوان مثال عبارت‌هایی مثل $(-۳)^{\frac{۱}{۲}}$ ، $(-۲)^{\frac{۱}{۴}}$ را تعریف نمی‌کنیم. به طور کلی توانهای گویای غیرصحیح باید حتما دارای پایه مثبت باشند.

مثال۳۷: عبارات رادیکالی را به صورت توانی و عبارات توانی را به صورت رادیکالی نمایش دهید.

$\sqrt[۳]{۷} = ۷^{\frac{۱}{۳}}$　　$\sqrt{۴۲} = ۴۲^{\frac{۱}{۲}}$　　$\sqrt[۵]{۰/۶} = ۰/۶^{\frac{۱}{۵}}$　　$(\frac{۲}{۵})^{\frac{۱}{۷}} = \sqrt[۷]{\frac{۲}{۵}}$

تذکر: اگر $a > ۰$ باشد، برای هر دو عدد طبیعی m, n توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال۳۸: اعداد تواندار را به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.

$\sqrt[۶]{۵^۴} = ۵^{\frac{۴}{۶}}$　　$۸^{\frac{۷}{۳}} = \sqrt[۳]{۸^۷}$　　$۳^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۳^۲}$

$\sqrt[۳]{-۴}$ نمی‌توان به صورت تواندار نوشت

■**تذکر**: برای اعداد با توان گویای منفی، اگر $a > ۰$ باشد داریم:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{\sqrt[n]{a^m}}$$

مثال۳۹: به صورت رادیکالی نمایش دهید.

الف) $۳۲^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۳۲}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}$

ب) $۷^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۷^۴}}$

ج) $۶x^{-\frac{۸}{۵}} = \frac{۶}{\sqrt[۵]{x^۸}}$ برای $(x > ۰)$

د) $۸۱^{-\frac{۳}{۴}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۸۱^۳}}$

مثال۴۰: هر یک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $۳^{\frac{۱}{۵}} \times ۴^{\frac{۱}{۵}} = ۱۲^{\frac{۱}{۵}}$

ب) $۲۰^{\frac{۲}{۵}} \div ۴^{\frac{۲}{۵}} = (\frac{۲۰}{۴})^{\frac{۲}{۵}} = ۵^{\frac{۲}{۵}}$

ج) $(۷^۴)^{\frac{۱}{۲}} \times (۹^۶)^{\frac{۱}{۳}} \times (۲^{\frac{۲}{۵}})^۵ = ۷^۲ \times ۹^۲ \times ۲^۲ = ۱۲۶^۲$

د) $\frac{۶^{\frac{۱}{۲}}}{۶^{\frac{۱}{۳}}} = ۶^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}} = ۶^{\frac{۳-۲}{۶}} = ۶^{\frac{۱}{۶}}$

مثال۴۱: هر یک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(۴ \times ۱۶)^{\frac{۱}{۳}} = (۴ \times ۴^۲)^{\frac{۱}{۳}} = (۴^۳)^{\frac{۱}{۳}} = ۴^{۳\times\frac{۱}{۳}} = ۴^۱ = ۴$

ب) $(\frac{۵^۴}{۷^۲})^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۵^{۴\times\frac{۱}{۲}}}{۷^{۲\times\frac{۱}{۲}}} = \frac{۵^۲}{۷^۱} = \frac{۲۵}{۷}$

ج) $(۲^{\frac{۲}{۵}} \times ۳^{\frac{۱}{۵}})^۵ \times (۲^۸ \times ۳^۴)^{\frac{۱}{۴}} = ۲^{\frac{۲}{۵}\times ۵} \times ۳^{\frac{۱}{۵}\times ۵} \times ۲^{۸\times\frac{۱}{۴}} \times ۳^{۴\times\frac{۱}{۴}}$

د) $(\frac{x^{-\frac{۲}{۷}}}{x^{-\frac{۱}{۱۴}}})^{-۱۴} = \frac{x^{-\frac{۲}{۷}\times(-۱۴)}}{x^{-\frac{۱}{۱۴}\times(-۱۴)}} = \frac{x^{\frac{۲۸}{۷}}}{x^{\frac{۱۴}{۱۴}}} = \frac{x^۴}{x^۱} = x^۳$

ه) $۹^{۰/۵۸} \times ۹^{۰/۱۲} \times ۹^{۰/۳} = ۹^{۰/۵۸+۰/۱۲+۰/۳} = ۹^۱ = ۹$

مثال۴۲: حاصل کدام گزینه با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

الف) $\sqrt[۵]{-۳۲}$ ب) $\sqrt[۳]{-۸}$ ج) $\sqrt[۶]{(-۲)^۶}$ د) $-\sqrt[۴]{(-۲)^۴}$

پاسخ: حاصل گزینه (ج) با سایر گزینه‌ها متفاوت است. زیرا:

$-\sqrt[۴]{(-۲)^۴} = -|-۲| = -۲$ $\quad \sqrt[۶]{(-۲)^۶} = |-۲| = ۲$ $\quad \sqrt[۳]{-۸} = -۲$ $\quad \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$

مثال۴۳: کدامیک از اعداد زیر ریشه دوم ندارد؟

الف) $\sqrt[۳]{۶۴}$ ب) $\sqrt[۴]{(-۳)^۴}$ ج) $۲۰ - ۳ \times ۵$ د) $\sqrt[۷]{-۱۲۸}$

پاسخ: گزینه (د) ریشه دوم ندارد. زیرا عددی منفی است. (می‌دانیم اعداد منفی ریشه زوج ندارند)، بقیه گزینه‌ها مثبت‌اند.

$۲۰ - ۳ \times ۵ = ۲۰ - ۱۵ = ۵$ $\quad \sqrt[۴]{(-۳)^۴} = |-۳| = ۳$ $\quad \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

$\sqrt[۷]{-۱۲۸} = \sqrt[۷]{(-۲)^۷} = -۲$

مثال۴۴: ریشه هشتم کدامیک از اعداد زیر وجود ندارد؟

الف) $۵^۸$ ب) $-۵^۸$ ج) $(-۵)^۸$ د) $۵^{-۸}$

پاسخ: گزینه (ب). می‌دانیم ریشه هشتم هنگامی تعریف شده که عبارت یا عدد مربوطه مثبت باشد. قسمتهای (الف)، (ج)، (د) همگی اعدادی مثبت هستند اما عدد $-۵^۸$ منفی است. $(-۵)^۸ = ۵^۸ > ۰$ و $۵^{-۸} = \frac{۱}{۵^۸} > ۰$

مثال۴۵: در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x را تعیین کنید.

الف) $۴^{x} \times ۴^{۲} = ۶۴$

$۴^{x+۲} = ۴^{۳} \rightarrow x + ۲ = ۳ \rightarrow x = ۳ - ۲ = ۱ \rightarrow x = ۱$

ب) $۶^{۹} \times ۷^{x} = ۴۲^{۹}$

طرفین تساوی را بر $۶^{۹}$ تقسیم می‌کنیم: $\frac{۶^{۹} \times ۷^{x}}{۶^{۹}} = \frac{۴۲^{۹}}{۶^{۹}} \rightarrow ۷^{x} = (\frac{۴۲}{۶})^{۹} \rightarrow ۷^{x} = ۷^{۹} \rightarrow x = ۹$

ج) $(\frac{۱}{۵})^{-۳} \times (\frac{۱}{۵})^{۲x} \times (\frac{۱}{۵})^{۵} = (\frac{۱}{۵})^{۸}$

$(\frac{۱}{۵})^{-۳+۲x+۵} = (\frac{۱}{۵})^{۸} \rightarrow (\frac{۱}{۵})^{۲+۲x} = (\frac{۱}{۵})^{۸} \rightarrow ۲ + ۲x = ۸ \rightarrow ۲x = ۸ - ۲$

$\rightarrow ۲x = ۶ \rightarrow x = ۳$

د) $(۳^{۴})^{x} = \frac{۱}{۲۷}$

$۳^{۴x} = \frac{۱}{۳^{۳}} \rightarrow ۳^{۴x} = ۳^{-۳} \rightarrow ۴x = -۳ \rightarrow x = -\frac{۳}{۴}$

ه) $\frac{۲^{۵} \times x^{۵}}{۱۸^{۲}} = ۱۸^{۳}$

$\frac{۲^{۵} \times x^{۵}}{۱۸^{۲}} = \frac{(۲x)^{۵}}{۱۸^{۲}} = ۱۸^{۳} \rightarrow (۲x)^{۵} = ۱۸^{۲} \times ۱۸^{۳}$

$\rightarrow (۲x)^{۵} = ۱۸^{۵} \rightarrow ۲x = ۱۸ \rightarrow x = ۹$

مثال۴۶: سهام‌داران یک شرکت تولیدی پیش‌بینی کرده‌اند، سرمایه شرکت طی سالهای آینده از رابطه زیر برآورد می‌شود.

سرمایه شرکت بر حسب میلیون تومان، (t بر حسب سال) : $\quad ۱۰۰ \times (۱/۲)^t$

در هر یک از زمانهای داده شده، سرمایه شرکت را محاسبه کنید.

الف) ۶ ماه بعد ($\frac{۱}{۲}$ سال) :

پاسخ: $۱۰۰ \times (۱/۲)^t = ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۰ \times \sqrt{۱/۲}$

ب) ۲۰۰ روز بعد:

پاسخ: ابتدا باید ببینیم ۲۰۰ چه کسری از سال می‌شود بنابراین ۲۰۰ را بر ۳۶۵ تقسیم می‌کنیم. $t = \frac{۲۰۰}{۳۶۵}$

$$۱۰۰ \times (۱/۲)^t = ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۲۰۰}{۳۶۵}} = ۱۰۰ \times \sqrt[۳۶۵]{(۱/۲)^{۲۰۰}}$$

ج) ۳ سال و ۶ ماه بعد:

پاسخ: اگر ۳ سال و ۶ ماه یا ۳ سال و نیم بگذرد : $t = ۳ + \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲}$

$$۱۰۰ \times (۱/۲)^t = ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۷}{۲}} = ۱۰۰ \times \sqrt{(۱/۲)^۷}$$

د) ۱ سال و ۲ ماه بعد:

پاسخ: $t = ۱ + \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱۴}{۱۲} = \frac{۷}{۶}$

$$۱۰۰ \times (۱/۲)^t = ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۷}{۶}} = ۱۰۰ \times \sqrt[۶]{(۱/۲)^۷}$$

ه) ۹ ماه : $\quad t = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$

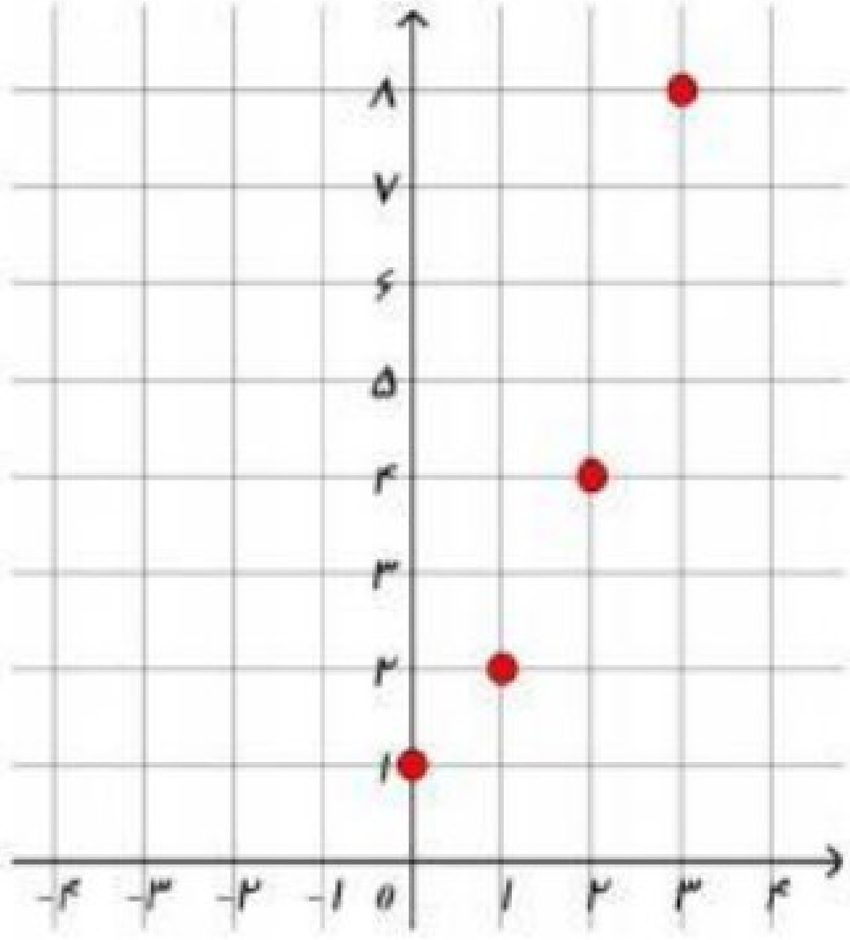
پاسخ: $۱۰۰ \times (۱/۲)^t = ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۳}{۴}} = ۱۰۰ \times \sqrt[۴]{(۱/۲)^۳}$

درس ۳: تابع نمایی

مثال۴۷: تابع $f(n) = ۲^n$ مفروض است. به سوالات زیر پاسخ دهید.

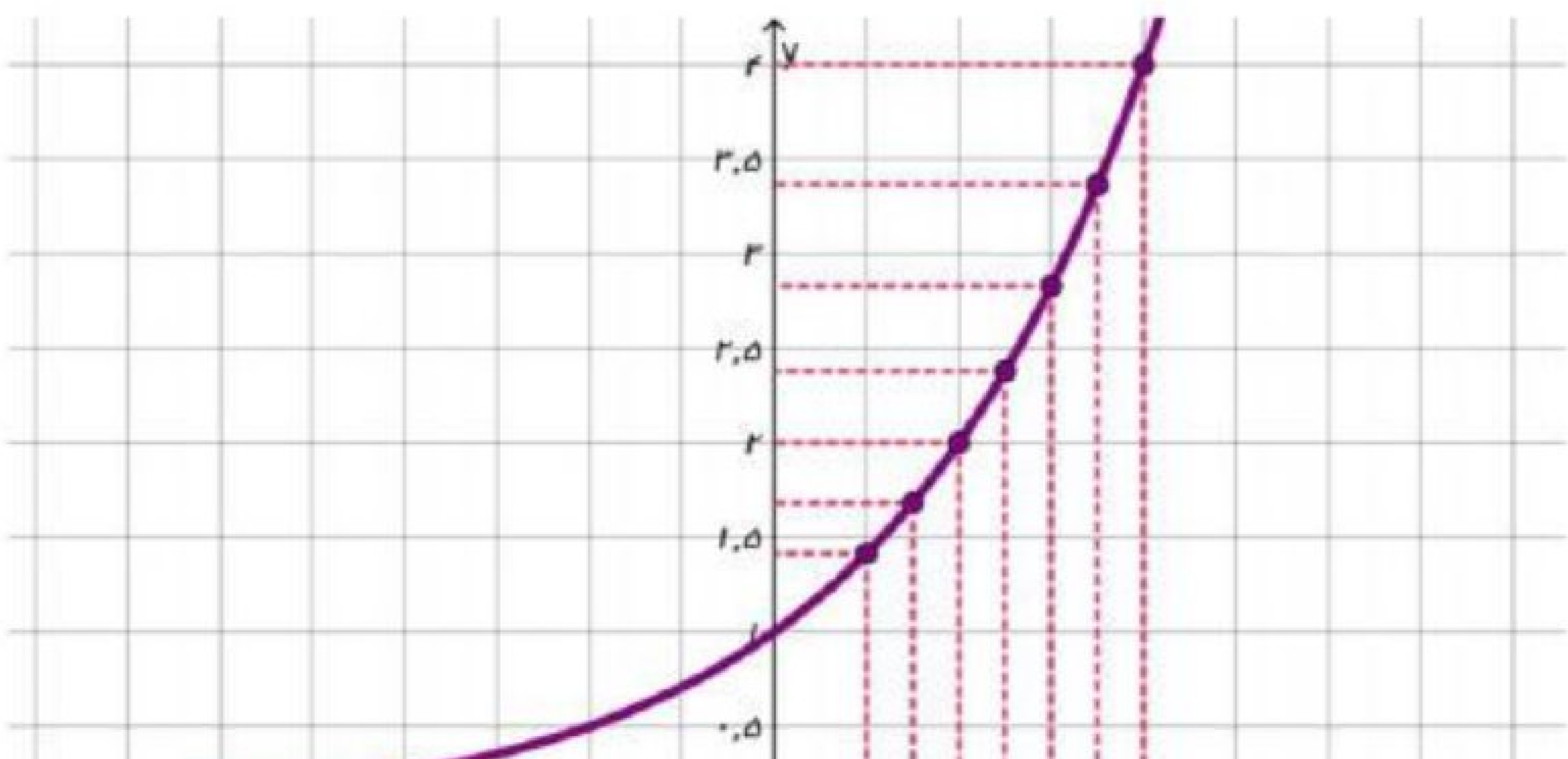
۱- جدول زیر را کامل کرده و نقاط به‌دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲



۲- مقادیر تابع $f(x) = ۲^x$ را برای x های داده شده به‌دست آورید و نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ را رسم کنید.

x	-۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
$y = ۲^x$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸	۱۶



■ **تابع نمایی:** هر تابع به صورت $y = a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. حرف a معرف پایه و حرف x معرف توان است. دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

$$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R},\ \ x > ۰\} \qquad \begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ f(x) = a^x \end{cases}$$

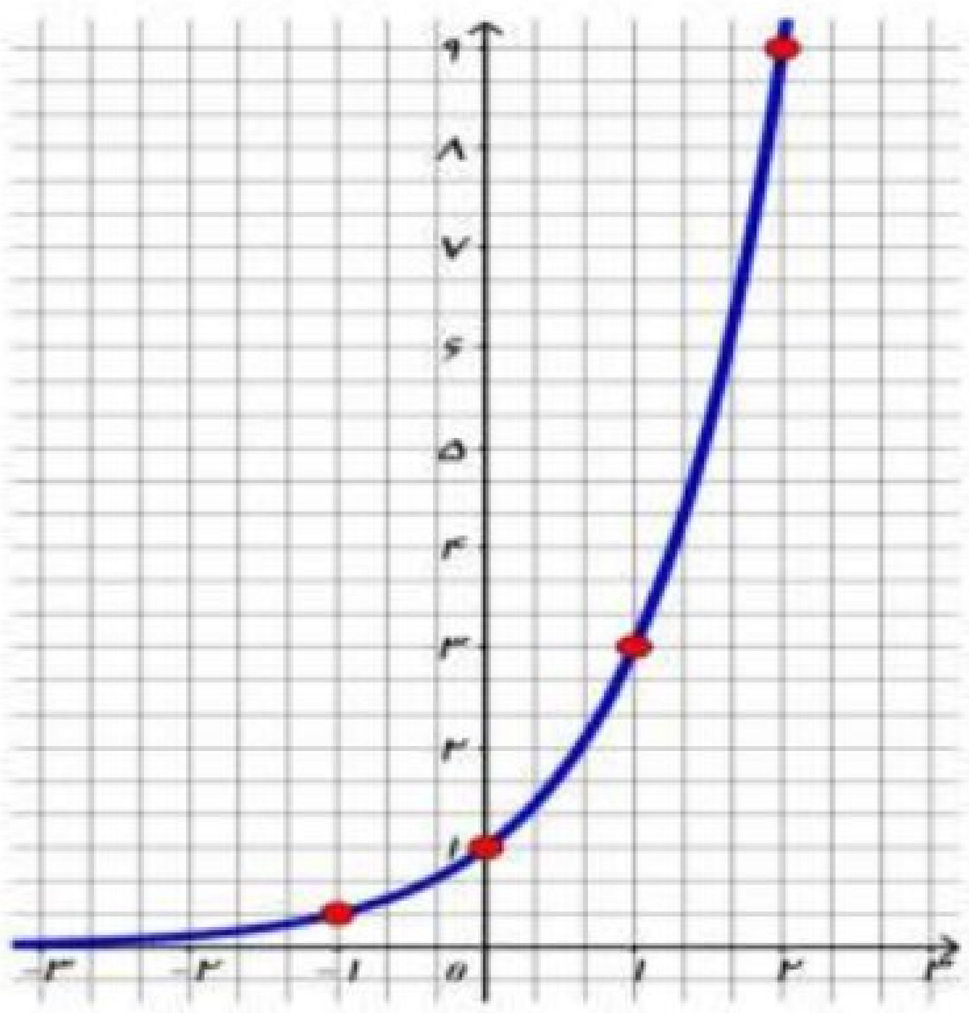
مثال۴۸: تابع نمایی $y = ۳^x$ مفروض است. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) نمودار تابع را با استفاده از روش نقطه‌یابی روی محور مختصات نمایش داده، دامنه و برد تابع را تعیین کنید.

ب) محل برخورد نمودار تابع $y = ۳^x$ را با محور عرضها تعیین کنید.

ج) با استفاده از نمودار تابع $y = ۳^x$ مقدار تقریبی اعداد $۳^{\frac{۳}{۲}}$ و $۳^{\frac{۵}{۲}}$ را به دست آورید.

پاسخ: الف)



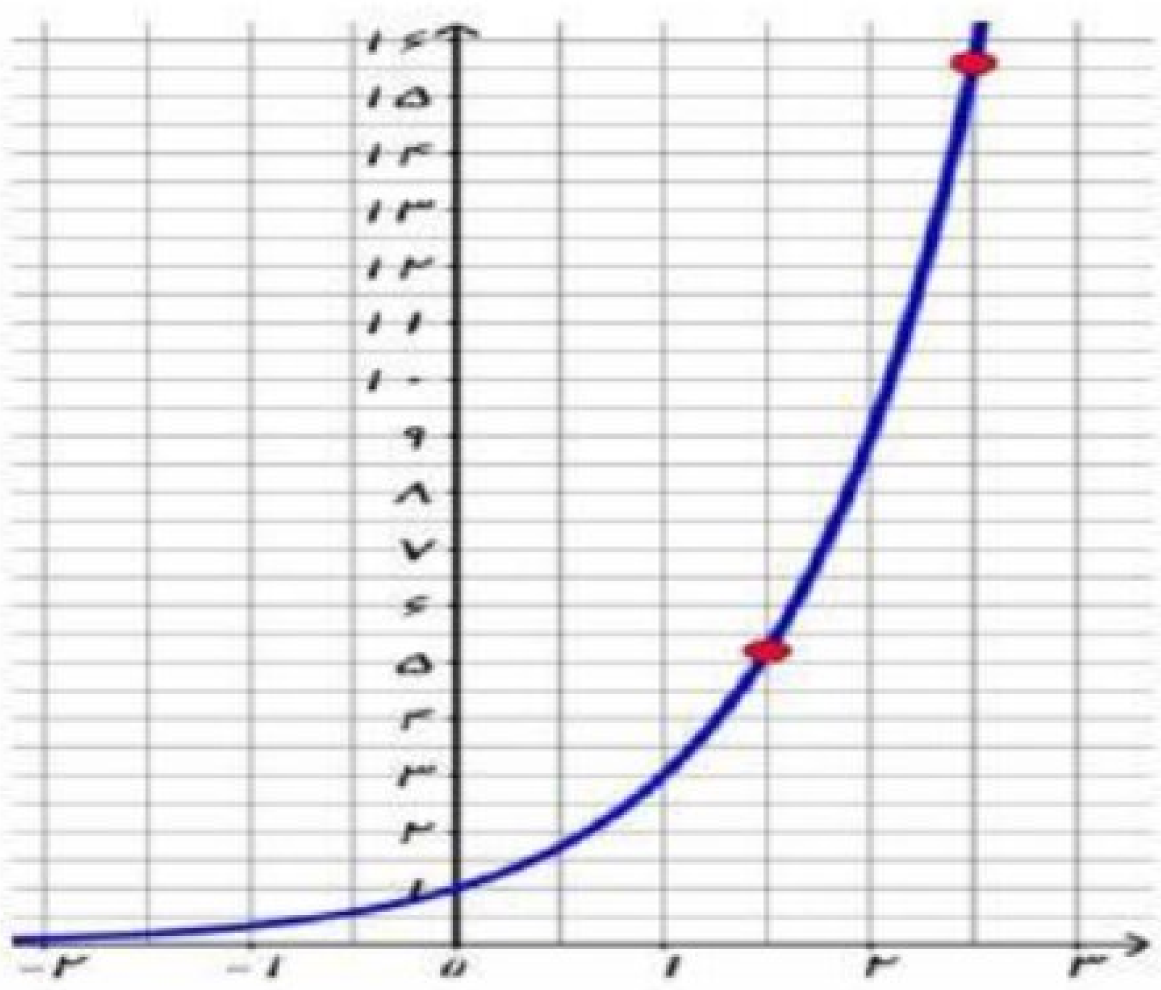
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = ۳^x$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹

$$D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = \mathbb{R}^+$$

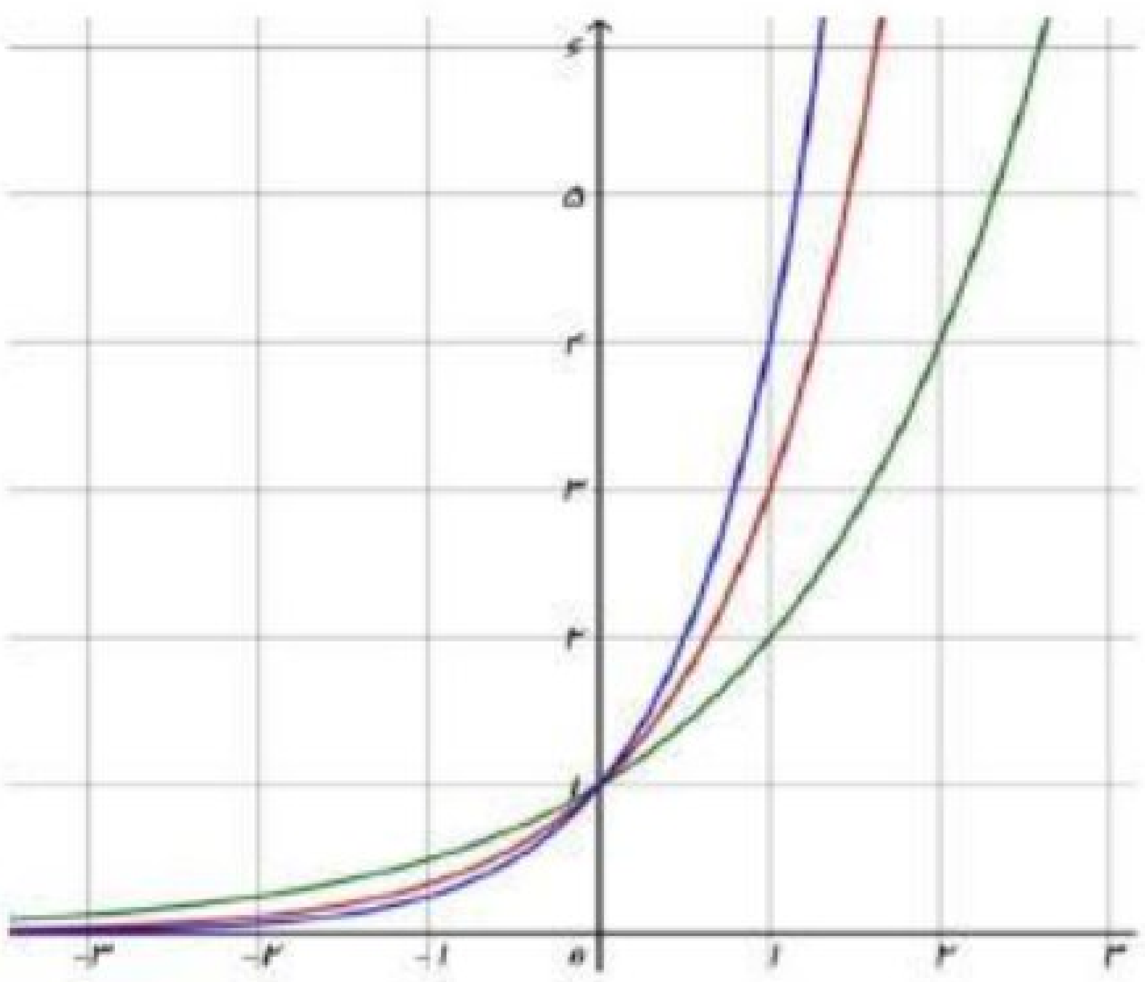
ب) محل برخورد نمودار تابع با محور y ها نقطه $(۰,۱)$ است.

ج) برای تعیین مقدار تقریبی تابع در نقاط $x = \frac{۳}{۲}$ و $x = \frac{۵}{۲}$ از روی این نقاط روی محور x ها خطی عمودی رسم می‌کنیم تا به نمودار برخورد کند. سپس از نقطه بدست آمده موازی محور xها خطی رسم می‌کنیم تا نقطه مورد‌نظر روی محور y ها مشخص شود.

$$x = \frac{۳}{۲} \to y = ۳^{\frac{۳}{۲}} \approx ۵/۲۵ \quad , \quad x = \frac{۵}{۲} \to y = ۳^{\frac{۵}{۲}} \approx ۱۵/۵$$



مثال۴۹: نمودار توابع $y = ۲^x$ و $y = ۳^x$ و $y = ۴^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.



پاسخ: نمودار سبز رنگ تابع $y = ۲^x$ ، نمودار قرمز رنگ تابع $y = ۳^x$ و نمودار آبی رنگ تابع $y = ۴^x$ است. زیرا نمودار تابع $y = ۲^x$ از نقطه (۱,۲) ، نمودار تابع $y = ۳^x$ از نقطه (۱,۳) و نمودار تابع $y = ۴^x$ از نقطه (۱,۴) می‌گذرد.

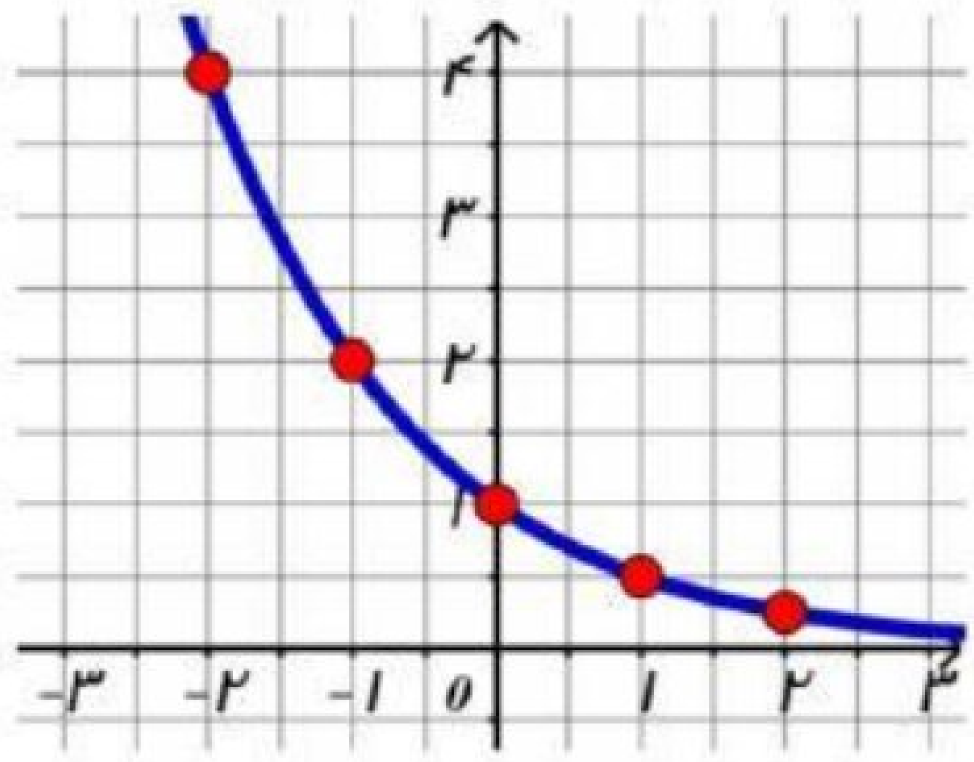
شباهت‌ها:

- هر سه نمودار از نقطه (۰,۱) می‌گذرند و محور عرضها را در این نقطه قطع می‌کنند.
- هر سه نمودار محور x ها را قطع نمی‌کنند.
- در هر سه نمودار با افزایش مقدار x مقدار y نیز افزایش می‌یابد.
- دامنه هر سه تابع برابر مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد هر سه تابع برابر مجموعه اعداد حقیقی مثبت $\mathbb{R}^+$ است.

تفاوت‌ها: سرعت رشد و افزایش yها در این سه تابع یکسان نیست. سرعت رشد تابع $y = 4^x$ از همه بیشتر و سرعت رشد تابع $y = 2^x$ از همه کمتر است.

مثال۵۰: نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید. محل برخورد با محور عرضها و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ:



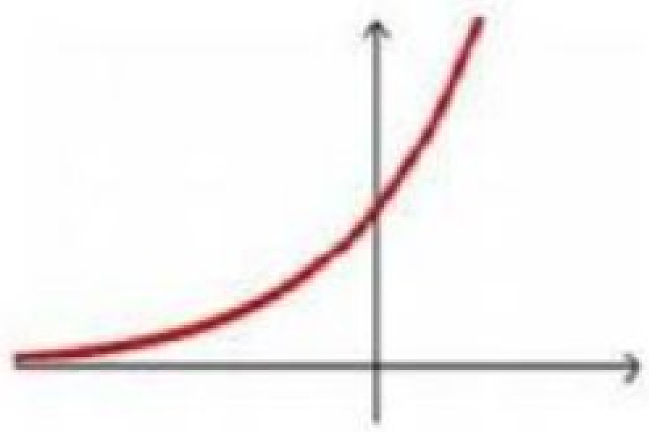
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = (\frac{1}{2})^x$	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

محل برخورد نمودار تابع با محور y ها نقطه $(0,1)$ است.

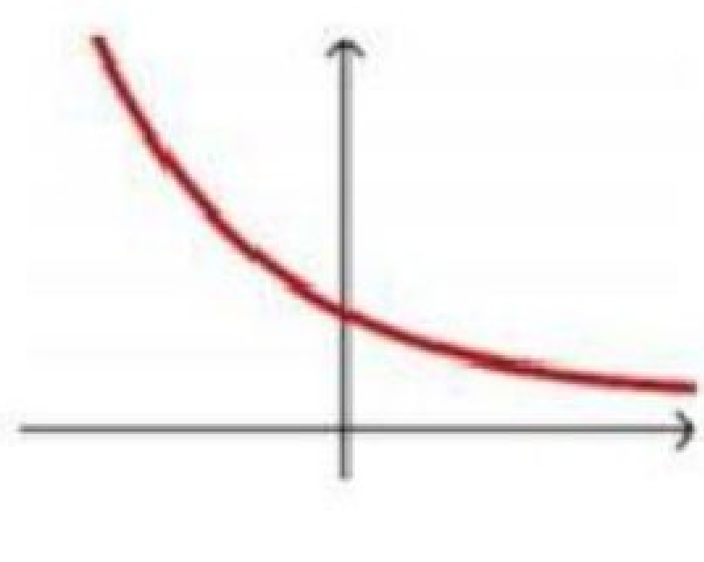
$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = \mathbb{R}^+$

■ **تذکر:** در تابع $y = a^x$:

الف) اگر $a > 1$ باشد، با افزایش مقدار x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابد.(تابع رفتار افزایش یا صعودی دارد)



ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، با افزایش مقدار x، مقادیر y کاهش می‌یابد. برای xهای کوچکتر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد.(تابع رفتار کاهشی یا نزولی دارد)



مثال۵۱: کدامیک از توابع زیر نمایی است؟

الف) $y = ۵^x$	ب) $y = ۳ \times ۲^x$	ج) $y = x^۲$	د) $y = (-۲)^x$

ه) $y = (\frac{۵}{۶})^x$	و) $y = ۱^x$	ز) $y = \sqrt{x}$	ح) $y = \sqrt{۳}^x$

پاسخ: قسمتهای (الف)، (ب)، (ه)، (ح) توابع نمایی هستند. بقیه قسمتها شرایط لازم را ندارند.

مثال۵۲: دادههای کدامیک از جداول زیر میتواند بیانگر یک تابع نمایی باشد؟

x	۱	۲	۳	۴
y	۳	۶	۹	۱۲

(الف)

x	۱	۲	۳	۴
y	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶

(ب)

پاسخ: گزینهای صحیح است که طول نقاط آن (xها) تشکیل یک دنباله حسابی دهد و عرض نقاط آن (yها) تشکیل یک دنباله هندسی دهد. پس جدول (ب) بیانگر یک تابع نمایی میتواند باشد.

کاربردهای تابع نمایی:

یکی از کاربردهای تابع نمایی، حل مسائل مربوط به رشد و زوال است. در مسائل رشد و زوال به متغیرهایی اشاره میشود که با گذشت زمان، افزایش یا کاهش مییابند.

افزایش یا افت قیمت اجناس، رشد جمعیت، رشد تورم، افزایش تعداد باکتریها در محیط کشت باکتری، کاهش وزن مواد رادیو اکتیو، محاسبه سود سرمایهگذاری، کاهش موادغذایی بر اثر رشد جمعیت و ...

با مثالی این قسمت را شروع میکنیم.

مثال۵۳: شخصی ۱۰۰۰ واحد پول را سرمایهگذاری میکند و قرار است هر سال سرمایه او نسبت به سال قبل ۲۰ درصد افزایش یابد. مقدار سرمایه او را در چهار سال اول تعیین کنید.

پاسخ: اگر سرمایه در سال t ام را با $f(t)$ نمایش دهیم داریم:

روش اول:

سرمایه در پایان سال اول: $f(۱) = ۱۰۰۰ + \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰ + ۲۰۰ = ۱۲۰۰$

سرمایه در پایان سال دوم: $f(۲) = ۱۲۰۰ + \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۲۰۰ = ۱۲۰۰ + ۲۴۰ = ۱۴۴۰$

سرمایه در پایان سال سوم: $f(۳) = ۱۴۴۰ + \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۴۴۰ = ۱۴۴۰ + ۲۸۸ = ۱۷۲۸$

سرمایه در پایان سال چهارم: $f(۴) = ۱۷۲۸ + \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۷۲۸ = ۱۷۲۸ + ۳۴۵/۶ = ۲۰۷۳/۶$

روش دوم:

با محاسبه مقدار سرمایه در پایان سال اول داریم:

$$f(۱) = ۱۰۰۰ + \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰\left(۱ + \frac{۲}{۱۰}\right) = ۱۰۰۰ \times (۱/۲) = ۱۲۰۰$$

یعنی درپایان سال اول مقدار سرمایه اولیه در عدد اعشاری ۱/۲ ضرب شده است. با محاسبه سرمایه در پایان سال دوم، مقدار اولیه ۱۰۰۰ در $(۱/۲)^۲$ ضرب می‌شود و این الگوی دنباله هندسی در سایر جملات نیز دیده می‌شود. پس:

سرمایه در پایان سال دوم: $f(۲) = ۱۰۰۰ \times (۱/۲)^۲ = ۱۰۰۰ \times ۱/۴۴ = ۱۴۴۰$

سرمایه در پایان سال سوم: $f(۳) = ۱۰۰۰ \times (۱/۲)^۳ = ۱۷۲۸$

سرمایه در پایان سال چهارم: $f(۴) = ۱۰۰۰ \times (۱/۲)^۴ = ۲۰۷۳/۶$

رشدنمایی:

معادله کلی رشد نمایی به صورت $f(t) = c(۱ + r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات بر حسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

در مثال قبل طبق الگوی گفته شده، سرمایه در سال t ام برابر : $f(t) = ۱۰۰۰(۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰})^t = ۱۰۰۰(۱ + ۰/۲)^t$

مثال۵۴: ایران در سال ۱۳۵۹ دارای ۳۶ میلیون نفر جمعیت بوده است. اگر آهنگ رشد سالانه جمعیت ایران برابر ۰/۰۲ باشد، پس از ۴۰ سال جمعیت کشور چقدر می‌شود؟ $(۱/۰۲)^{۴۰} \approx ۲/۲۱$

پاسخ: $c = ۳۶ \ , \ r = ۰/۰۲ \ , \ t = ۴۰$

$$f(t) = c(۱+r)^t \rightarrow f(۴۰) = ۳۶(۱+۰/۰۲)^{۴۰} = ۳۶(۱/۰۲)^{۴۰} \approx ۳۶ \times ۲/۲۱ = ۷۹/۵۶$$

مثال۵۵: اگر نرخ تورم سالانه ۲۰ درصد باشد، پس از دو سال قیمت یک کیف که اکنون ۳۰۰۰۰ تومان است، چقدر می‌شود؟

پاسخ: $c = ۳۰۰۰۰ \ , \ r = \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۰/۲ \ , \ t = ۲$

$$f(t) = c(۱+r)^t \rightarrow f(۲) = ۳۰۰۰۰(۱+۰/۲)^۲ = ۳۰۰۰۰(۱/۲)^۲$$

$$= ۳۰۰۰۰ \times ۱/۴۴ = ۴۳۲۰۰$$

قیمت کیف پس از دو سال ۴۳۲۰۰ تومان می‌شود.

مثال۵۶: اگر قیمت کالایی پس از دو سال ۴ برابر مقدار اولیه‌اش شود، نرخ تورم سالانه این کشور تقریبا چند درصد است؟

پاسخ: $f(t) = ۴c \ , \ r = ? \ , \ t = ۲$

$$f(t) = c(۱+r)^t \rightarrow ۴c = c(۱+r)^۲ \rightarrow ۴ = (۱+r)^۲$$

$$۲ = ۱ + r \rightarrow r = ۱ \xRightarrow{\text{درصد}} r = ۱ \times ۱۰۰ = ۱۰۰$$

نرخ تورم ۱۰۰ درصد بوده است.

مثال۵۷: اگر مقدار اولیه سود ۱۰۰ و سود سالانه ۱۴ درصد باشد، تابع رشد کدام است؟

الف) $f(t) = ۱۰۰(۱/۴)^t$ ب) $f(t) = ۱۰۰(۱/۱۴)^t$

ج) $f(t) = ۱۰۰(۰/۱۴)^t$ د) $f(t) = ۱۰(۱/۴)^t$

پاسخ: گزینه (ب) $c = ۱۰۰ \ , \ r = ۰/۱۴$

$$f(t) = c(۱+r)^t \rightarrow f(t) = ۱۰۰(۱+۰/۱۴)^t = ۱۰۰(۱/۱۴)^t$$

مثال ۵۸: اگر با نرخ ۱۲ درصد آخر هر ماه سود بر سرمایه اضافه شود، برای به دست آوردن سرمایه پس از ۵ سال، سرمایه فعلی در کدام عدد ضرب می‌شود؟

الف) $(۱/۱۲)^{۲}$　　ب) $(۱/۱۲)^{۶۰}$　　ج) $(۱/۰۱)^{۲۰}$　　د) $(۱/۱۲)^{۵}$

پاسخ: گزینه (ب)

$$f(t) = c(۱+r)^t \rightarrow f(t) = c(۱+\frac{۱۲}{۱۰۰})^{۶۰} \rightarrow f(t) = c(۱/۱۲)^{۶۰}$$

هر سال ۱۲ ماه است پس ۵ سال $۶۰ = ۵ \times ۱۲$ ماه است.

افت یا زوال نمایی:

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال گویند.

معادله کلی زوال نمایی به صورت $f(t) = c(۱-r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول یا کاهش (تغییرات بر حسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

مثال ۵۹: شخصی یک دوچرخه به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. اگر هزینه استهلاک و افت قیمت این دوچرخه هر سال معادل ۵ درصد ارزش سال پیش آن باشد. بعد از گذشت ۱۵ سال ارزش این دوچرخه چقدر می‌شود؟

$(۰/۹۵)^{۱۵} \approx ۰/۴۶$

پاسخ: $c = ۹۶۰۰۰۰ \ , \ r = \frac{۵}{۱۰۰} = ۰/۰۵ \ , \ t = ۱۵$

$$f(t) = c(۱-r)^t \rightarrow f(۱۵) = ۹۶۰۰۰۰(۱-۰/۲)^{۱۵} = ۹۶۰۰۰۰(۰/۹۵)^{۱۵}$$

$$= ۹۶۰۰۰۰ \times ۰/۴۶ = ۴۴۱۶۰۰$$

مثال ۶۰: (خرداد ۹۸)

جمعیت یک روستا، در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟ (۱/۵)

پاسخ: $c = ۲۰۰۰ \ , \ r = \frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۰۱ \ , \ t = ۲$

$$f(t) = c(۱-r)^t \rightarrow f(۲) = ۲۰۰۰(۱ - ۰/۰۱)^۲ = ۲۰۰۰(۰/۹۹)^۲ = ۲۰۰۰ \times ۰/۹۸۰۱ = ۱۹۶۰/۲$$

مثال ۶۱:(شهریور ۹۹)

جمعیت کشوری در سال ۲۰۱۷ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (۱)

پاسخ: $c = ۴۰۰۰۰۰۰۰ \ , \ r = \frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۰۱ \ , \ t = ۱$

$$f(t) = c(۱-r)^t \rightarrow f(۱) = ۴۰۰۰۰۰۰۰(۱ - ۰/۰۱) = ۴۰۰۰۰۰۰۰ \times ۰/۹۹$$

$$= ۳۹۶۰۰۰۰۰$$

پس از گذشت یک سال جمعیت به سی و نه میلیون و ششصد هزار نفر می‌رسد.

مثال ۶۲: سهام شرکتی بعد از دو سال ۰/۰۴ برابر شده است، آهنگ نزول سالیانه این شرکت کدام است؟

الف) بیست درصد ب) چهل درصد ج) شصت درصد د) هشتاد درصد

پاسخ: گزینه (د) $f(t) = ۰/۰۴c \ , \ r = ؟ \ , \ t = ۲$

$$f(t) = c(۱-r)^t \rightarrow ۰/۰۴c = c(۱-r)^۲ \rightarrow ۰/۰۴ = (۱-r)^۲$$

$$\rightarrow ۱ - r = ۰/۲ \rightarrow ۱ - ۰/۲ = r \rightarrow r = ۰/۸$$

برای تعیین درصد: $r = ۰/۸ \times ۱۰۰ = ۸۰$

مثال ۶۳: جمعیت اولیه دو کشور A, B یکسان است. اگر آهنگ رشد سالانه کشور A، ۲۰ درصد و آهنگ نزول سالانه کشور B برابر ۱۰ درصد باشد، پس از گذشت ۲ سال جمعیت کشور A چند برابر جمعیت کشور B می‌شود؟

الف) $\frac{۹}{۱۶}$ ب) $\frac{۱۶}{۹}$ ج) $\frac{۲۵}{۹}$ د) $\frac{۹}{۲۵}$

پاسخ: گزینه (ب)

کشور A دارای آهنگ رشد است. $f(t) = c(۱+r)^t \rightarrow f(۲) = c(۱+۰/۲)^۲ = c(۱/۲)^۲ = ۱/۴۴c$

کشور B دارای آهنگ نزول است. $f(t) = c(۱-r)^t \rightarrow f(۲) = c(۱-۰/۱)^۲ = c(۰/۹)^۲ = ۰/۸۱c$

$$\frac{\text{جمعیت کشور} A}{\text{جمعیت کشور} B} = \frac{۱/۴۴c}{۰/۸۱c} = \frac{۱۴۴}{۸۱} = \frac{۱۶}{۹}$$

به پایان آمد این دفتر

حکایت همچنان باقی است