به نام خدا

«معادلات مثلثاتی»

شامل:

درس، نکته، تست

ویژه دانش آموزان سال دوازدهم

«ریاضی و تجربی»

تهیه و تنظیم: مهندس رضا نیازی

معادله‌ی مثلثاتی رابطه‌ای است بین نسبت‌های مثلثاتی کمان مجهول با اعداد معلوم و تفاوت آن با اتحاد مثلثاتی در این است که اتحاد به ازای همهٔ مقادیر کمان مجهول برقرار است ولی معادله به ازای بعضی مقادیر خاص.

مثال: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ یک اتحاد مثلثاتی است زیرا برای تمام زوایا برقرار است و برای هر زاویه‌ای مجموع مربعات sin و cos برابر است با ۱.

ولی $\sin x+\cos x=1$ یک معادله مثلثاتی است زیرا برای هر زاویه‌ای این رابطه برقرار نیست. مثلاً زاویه صفر درجه در رابطه بالا صدق می‌کند ولی زاویه 30° صدق نمی‌کند.

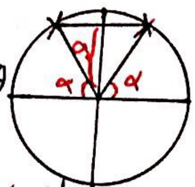
حل معادله مثلثاتی:

منظور از حل معادله مثلثاتی یعنی پیدا کردن تمام زوایایی که در رابطه صدق می‌کنند. یا به عبارتی پیدا کردن دسته جواب کلی معادله.

برای حل معادله باید به یکی از حالات زیر برسیم:

۱) حالت سینوسی: اگر معادله ساده شود و به $\sin x=a$ برسیم که a محدود است در بازه $[-1, 1]$ آنگاه باید تشخیص دهیم که a برابر سینوس چه زاویه‌ای می‌باشد. اگر برابر $\sin\alpha$ (α زاویه‌ای معلوم) باشد سپس دسته جواب به صورت زیر است:

$$\sin x = a = \sin\alpha \quad (-1\le a\le 1) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2k\pi+\alpha \\ x = 2k\pi+\pi-\alpha \end{array}} \quad (k\in\mathbb{Z})$$



یعنی چه زوایایی سینوس آن با سینوس α برابر است که $2k\pi+\alpha$ یا $2k\pi+\pi-\alpha$ می‌باشد.

مثال: معادله مثلثاتی زیر را حل کرده و جواب‌های $[0, 2\pi]$ را مشخص کنید.

$$2\sin x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

K	0
x	$\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$

۲) **حالت کسینوسی**: اگر معادله ساده شود و به صورت $\cos x = a$ برسیم که a عددی است در بازهٔ $[-1,1]$، آنگاه باید تشخیص دهیم a برابر کسینوس چه زاویه‌ای معلوم می‌باشد. پس دسته جواب به صورت زیر می‌باشد.

$$\cos x = a = \cos\alpha \quad (-1 \le a \le 1) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \alpha} \ (k \in \mathbb{Z})$$

یعنی زوایایی که $\cos$ آنها با $\cos\alpha$ برابر است که به صورت $2k\pi + \alpha$ یا $2k\pi - \alpha$ هستند.

مثال ۱) معادله مثلثاتی زیر را حل کرده جواب‌ها بین $[0, 2\pi]$ را تعیین کنید.

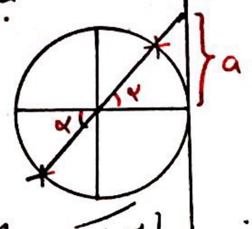
$$(2\cos x + \sqrt{3})(\cos x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 & \text{غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

k	0	1
x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow$ جواب‌ها بین $[0, 2\pi]$ برابرند با $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$ از این‌ها.

۳) **حالت تانژانتی**: اگر معادله مثلثاتی ساده شود و به صورت $\tan x = a$ در آید که $a \in \mathbb{R}$ می‌باشد، آنگاه باید تشخیص دهیم که a برابر تانژانت چه زاویهٔ معلومی است. پس دسته جواب به صورت زیر است:

$$\tan x = a = \tan\alpha \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \alpha} \ (k \in \mathbb{Z})$$



یعنی زوایایی که $\tan$ آنها با تانژانت α برابر است $(k\pi + \alpha)$ $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشند.

(زیرا دوره تناوب تابع $\tan x$ برابر π رادیان است.)

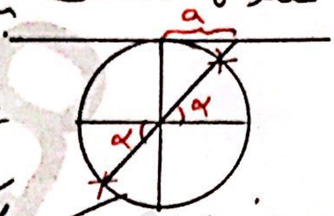
مثال ۲) معادله مثلثاتی زیر را حل کرده و دسته جواب کلی را مشخص کنید.

$$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow$ جواب‌های موجود در بازه $[0, 2\pi]$ برابرند با $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$.

۱۴) حالت کتانژانتی: اگر معادله مثلثاتی ساده شود و به صورت $\cot x = a$ درآید که $a \in R$ می‌باشد، باید تشخیص دهیم که a برابر $\cot$ چه زاویه‌ای معلوم می‌است سپس دسته جواب را به صورت زیر می‌نویسیم:



$$\cot x = a = \cot\alpha \;\; (a \in R) \Longrightarrow \boxed{x = k\pi + \alpha} \quad k \in Z$$

یعنی زوایایی که $\cot$ آنها برابر $\cot\alpha$ است زوایایی به صورت $k\pi + \alpha$ می‌باشند (زیرا دوره تناوب تابع $y = \cot x$ برابر π رادیان است).

مثال: معادله مثلثاتی زیر را حل کرده و دسته جواب‌های آن را مشخص کنید.

$$\sqrt{3}\cot x + 3 = 0 \Rightarrow \cot x = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in Z)$$

حالات خاص: در معادلات مثلثاتی بعضی از آنها را حالت خاص می‌گوییم که بهتر است به خاطر بسپارید.

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi \; (k \in Z) \\ \sin x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Longrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مضارب زوج $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \; (k \in Z) \\ \cos x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Longrightarrow x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ — مضارب زوج π — مضارب فرد π

$$\tan x = 0 \Longrightarrow x = k\pi \; (k \in Z) \qquad \cot x = 0 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\tan x = 1 = \cot x \Longrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{4}} \Longleftarrow \sin x = \cos x$$

$$\tan x = -1 = \cot x \Longrightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{4}} \Longleftarrow \sin x = -\cos x$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \tan x = \cot x \\ \tan x = -\cot x \end{matrix} \;\text{فوق}\; \Longrightarrow \boxed{x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}} \;\text{یا}\; \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

نکته: در حل معادله مثلثاتی دو هدف اساسی زیر را دنبال می‌کنیم

۱) تبدیل کمان‌های مختلف به یک کمان (معمولاً برحسب x)

۲) تبدیل نسبت‌های مثلثاتی به یک نسبت (معمولاً به $\sin$ یا $\cos$ یا $\tan$ یا $\cot$) تبدیل شوند

تست ۱) تعداد ریشه‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۰   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

جواب: گزینه ۴

حل

روش اول: تبدیل کمان: $\sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\nearrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\searrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

k	x
0	$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
1	$\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ ۴ جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد

روش دوم: (تبدیل نسبت): $\sin 2x = \cos x \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\nearrow 2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$\searrow 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ ۴ جواب در $[0, 2\pi]$

تست ۲) دسته جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $\frac{k\pi}{4}$ ۴) $2k\pi$

جواب: گزینه ۲

حل: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 \Rightarrow (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})^3 - 3\sin^4 x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos^4 x = 1$

$1 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}) = 1 \Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x = 0$

$\nearrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ ①

$\searrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ②

دسته جواب کلی: ① $\cup$ ② $= \frac{k\pi}{2}$

نکته:
$$\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 x=1 \\ \sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x \\ \sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x \end{cases}$$

تست 3: تعداد جوابهای معادله $\sin x+\cos x=1$ در $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

جواب: گزینه ۲

حل

روش اول: نکته: $\sin x \pm \cos x=\sqrt{2}\sin(x\pm\frac{\pi}{4})$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\nearrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi$$

$$\searrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

K	x
0	$0, \frac{\pi}{2}$
1	2π

توضیح: ممکن است از روی دایره مثلثاتی بالا ۲ جواب یعنی گزینه ۱ انتخاب شود که غلط است زیرا ۰ و 2π روی دایره مثلثاتی در یک نقطه واقع میشوند ولی دو ریشه محسوب میشوند.

روش دوم: $\sin x+\cos x=1 \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{دو طرف}} \underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x\cos x=1$

$$\Rightarrow \sin x\cdot\cos x=0 \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \\ \cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} =\frac{k\pi}{2}$$

K	0	1	2	3	4
x	0 ✓	$\frac{\pi}{2}$ ✓	π غ ق ق	$\frac{3\pi}{2}$ غ ق ق	2π ✓

تذکر: اگر دو طرف یک معادله مثلثاتی را به توان زوج برسانیم آنگاه ممکن است معادله جواب اضافی بدهد. در نتیجه جوابها را باید در معادله امتحان کنیم و آنهایی که صدق میکنند را انتخاب کنیم.

$\Leftarrow$ دام تست در گزینه ۴ موجود بود.

تست 4: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

جواب: گزینه ۱

نکته: $\begin{cases} \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{cases}$

روش اول: $\sin 3x + \sin x = 0 \Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + \sin x = 0$

$\Rightarrow 4\sin x(1-\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 4\sin x \cdot \cos^2 x = 0$ ↗ $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ ① ↘ $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ②

دسته جواب کلی (اجتماع ۱ و ۲): ① ∪ ②: $\frac{k\pi}{2}$

روش دوم: $\sin 3x = -\sin x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-x)$ ↗ $3x = 2k\pi + (-x)$ ↘ $3x = 2k\pi + \pi - (-x)$

$\rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

$\rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ اجتماع $= \frac{k\pi}{2}$

تست 5: تعداد جواب‌های معادله $\sin x \cdot \sin 2x = \sin^2 2x$ در $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

جواب: گزینه ۳

تذکر: اگر در معادله از دو طرف عبارتی را ساده کنیم، آنگاه ممکن است برخی ریشه‌های معادله را حذف کنیم. بنابراین ابتدا ریشه‌های این عبارت را تعیین سپس از دو طرف حذف می‌کنیم.

حل: $\sin x \cdot \sin 2x = \sin^2 2x \rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ ①

$\sin 2x \neq 0$ ↘ $\sin x = \sin 2x \rightarrow 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi$ ②

↘ $2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ ③

جواب: ① ∪ ② ∪ ③ $\Rightarrow$ جواب‌های بازه $[0, \pi]$ $= \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

توضیح: در تست بالا اگر در ابتدا $\sin 2x$ را از دو طرف ساده می‌کردیم، آنگاه جواب $\frac{\pi}{2}$ به دست نمی‌آمد و در دام گزینه ۲ گرفتار می‌شدیم.

تست 6: مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{8\pi}{3}$ ۲) $\frac{10\pi}{3}$ ۳) 3π ۴) $\frac{11\pi}{3}$

پاسخ: گزینه 1

حل

روش اول: $2(1-\cos^2 x) - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow -2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

تغییر متغیر: $\cos x = t \rightarrow -2t^2 - t + 1 = 0 \rightarrow t_1 = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

یا $t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow$ جوابها بین $2\pi, \pi$ $= \{\pi, \frac{5\pi}{3}\} \Rightarrow$ مجموع $= \pi + \frac{5\pi}{3} = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$

روش دوم: $1 - 2\sin^2 x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x)$

$\rightarrow 2x = 2k\pi \pm (\pi - x) \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ یا $x = (2k-1)\pi \Rightarrow$ جوابها $[\pi, 2\pi]$ $= \{\pi, \frac{5\pi}{3}\}$

تست 7: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0$ کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه 1

حل: $2\cos^2 x - 1 - 5\cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

تغییر متغیر $\Rightarrow \cos x = t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$ $\nearrow = 2$ $\searrow = \frac{1}{2}$

$\cos x = 2$ غ ق ق $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

تست 8: جوابهای کلی معادله $1 = 2\cos^2 x + 2\sin x\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

پاسخ: گزینه ۴

حل: $1 - 2\cos^2 x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$ حالت خاص $\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

تست ۹: اگر جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x(\sin x+\cos x)=\cos x(\cos x-\sin x)$ روی دایره مثلثاتی را به هم وصل کنیم. چه شکلی تشکیل می‌شود؟

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث متساوی‌الاضلاع ۴) مثلث متساوی‌الساقین

پاسخ گزینه 1

حل: $\sin^2 x+\sin x\cos x=\cos^2 x-\sin x\cos x$

$\Rightarrow 2\sin x\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x \Rightarrow \sin 2x=\cos 2x$

$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$

ریشه‌ها را به هم وصل کنیم تشکیل حاصل مربع می‌شود.

نکته: اگر جواب معادله مثلثاتی برابر $\frac{k\pi}{n}+\alpha$ $(n\in\mathbb{N})$ باشد آنگاه جواب‌ها روی دایره مثلثاتی را به هم وصل کنیم یک $2n$ ضلعی منتظم به دست می‌آید.

مثلاً: در دسته جواب $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ یک ۴ ضلعی منتظم یا مربع به دست می‌آید.

تست ۱۰: تعداد ریشه‌های معادله $\tan 3x\cdot\tan 2x=1$ در بازه $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ گزینه 2

حل: $\tan 3x=\frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan 3x=\cot 2x \Rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-2x)$

$\Rightarrow 3x=k\pi+(\frac{\pi}{2}-2x) \Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$

k	x
۰	$\frac{\pi}{10}$ ✓
۱	$\frac{3\pi}{10}$ ✓
۲	$\frac{\pi}{2}$ رد
۳	$\frac{7\pi}{10}$ ✓
۴	$\frac{9\pi}{10}$ ✓

$\Leftarrow$ $\frac{\pi}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند زیرا $\tan\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است.

نکته: ریشه معادله باید در دامنه معادله صدق کند. در معادلات مثلثاتی شامل tan و cot یا کسری یا رادیکال (با فرجه زوج) یا لگاریتمی باید دامنه بررسی شود.

توضیح: دام تست بالا در گزینه 1 موجود است که اگر دامنه بررسی نشود این گزینه به اشتباه انتخاب می‌شود.

تست ۱۱) تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{2\sin x + \sqrt{2}} = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

حل:
$$\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\overbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}^{1}}{2\sin x + \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \frac{\cos 2x}{2\sin x + \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x \neq 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \ , \ x \neq 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

k	x	
۰	$\frac{\pi}{4}$	✓
۱	$\frac{3\pi}{4}$	✓
۲	$\frac{5\pi}{4}$	غ ق ق
۳	$\frac{7\pi}{4}$	غ ق ق

توضیح: دام تست در گزینه ۴ قرار داشت و اگر دامنه را بررسی نمی‌کردیم این گزینه را به غلط انتخاب می‌کردیم.

تست ۱۲) دسته جواب کلی معادله مثلثاتی $\log_3 \sin x - \log_3 \cos x = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

جواب: گزینه ۳

حل: $\log_3 \sin x - \log_3 \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_3 \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_3 \tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = 3^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

دامنه: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ جواب در ناحیه اول مثلثاتی $\Rightarrow$ دسته جواب کلی $= 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

توضیح: دام تست در گزینه ۴ است که در صورت بررسی نکردن دامنه به این گزینه می‌رسیم.

تست 13) تعداد جواب‌های معادله $\log_{\cos x}^{\sin x} + \log_{\sin x}^{\cos x} = 2$ در $[0, 2\pi]$ کدام است؟

1) ۰ 2) ۱ 3) ۲ 4) ۴

پاسخ: گزینه ۲

نکته: $\log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}$

حل: $\log_{\cos x}^{\sin x} + \dfrac{1}{\log_{\sin x}^{\cos x}} = 2 \xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{\log_{\cos x}^{\sin x} = t} t + \dfrac{1}{t} = 2$

$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_{\cos x}^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

دامنه، $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x, \cos x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ x واقع در ناحیه اول مثلثاتی

K	x
۰	$\frac{\pi}{4}$ ✓
۱	$\frac{5\pi}{4}$ غ ق ق

توضیح: دام تست در گزینه ۳ موجود است.

نکته: ۴ معادله مثلثاتی زیر به یک دسته جواب می‌رسند

$\sin^2 x = \sin^2\alpha$, $\cos^2 x = \cos^2\alpha$, $\tan^2 x = \tan^2\alpha$, $\cot^2 x = \cot^2\alpha$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = k\pi \pm \alpha}$

مثال: $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

مثال: $\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \cos^2\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

مثال: $\tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan^2 x = \tan^2\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

تست ۱۴) تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

حل: $\sin^2 x+\sin^2 2x=1 \Rightarrow \sin^2 2x=1-\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 2x=\cos^2 x$

$\Rightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x=\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

یا $\sin^2 x=\frac{1}{4}=\sin^2\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

K	0	1	2
x	$\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$

توضیح: اگر $\cos x$ را از طرفین معادله حذف کنیم به ۴ جواب می‌رسیم که غلط است و گزینه ۳ می‌تواند دام تست باشد.

تست ۱۵) تعداد جواب‌های معادله‌ی $8\cos x\cdot\cos(\frac{5\pi}{2}-x)\cdot\cos(21\pi-2x)=1$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

حل: $8\cos x\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot\cos(\pi-2x)=1 \Rightarrow 8\cos x\cdot\sin x\cdot(-\cos 2x)=1$

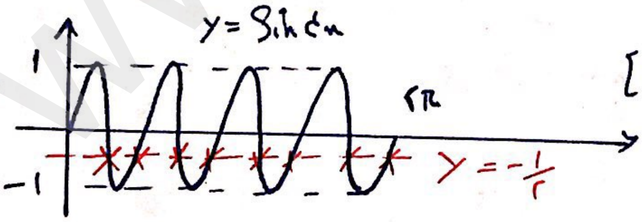
$\Rightarrow -4\sin 2x\cos 2x=1 \Rightarrow -2\sin 4x=1 \Rightarrow \sin 4x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$

$4x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{24} \Rightarrow$ ۴ جواب بین ۰ و 2π

$4x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{24} \Rightarrow$ ۴ جواب بین ۰ و 2π

$\Rightarrow$ مجموعاً ۸ جواب در $[0,2\pi]$ دارد

روش رسم:



دو تابع ۸ نقطه تلاقی دارند در $[0,2\pi]$ $\Rightarrow$ و معادله ۸ ریشه در این بازه دارد.

نکته: معادلات به فرم $\sin nx=a$ و $\cos nx=a$ $(n\in\mathbb{N})$ که $a\in(-1,1)-\{0\}$ می‌باشند در بازه‌ی $[0,2\pi]$ دارای $2n$ جواب می‌باشند.

تست 16) معادله $\sin 3x + \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

راه حل ۱) روش تحلیلی: طرفین توان ۲: $\underbrace{\sin^2 3x + \cos^2 3x}_{1} + \underbrace{2\sin 3x \cos 3x}_{\sin 6x} = \frac{1}{2}$

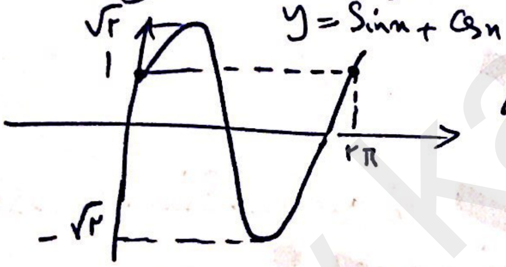
$\Rightarrow \sin 6x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \to 6x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \to x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{36}$

$\to 6x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{7\pi}{36}$

K	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x	$\frac{7\pi}{36}$	$\frac{11\pi}{36}$, $\frac{19\pi}{36}$	$\frac{23\pi}{36}$, $\frac{31\pi}{36}$	$\frac{35\pi}{36}$, $\frac{43\pi}{36}$	$\frac{47\pi}{36}$, $\frac{55\pi}{36}$	$\frac{59\pi}{36}$, $\frac{67\pi}{36}$	$\frac{71\pi}{36}$
	✓	غ ق ق , غ ق ق	✓ , ✓	غ ق ق , غ ق ق	✓ , ✓	غ ق ق , غ ق ق	✓

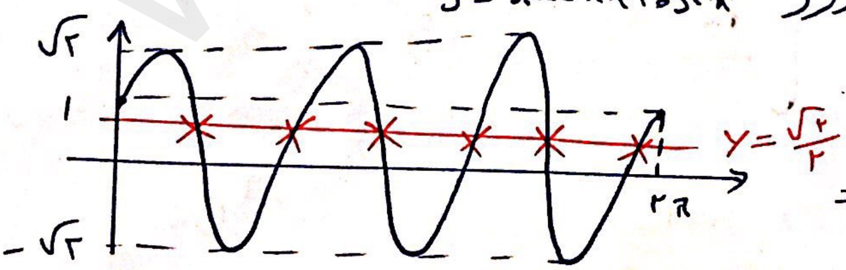
توضیح: ۶ جواب قابل قبول و ۶ جواب دیگر در معادله صدق نمی‌کنند (جواب اضافی تولید شد)

روش ۲) رسم:



تابع $y = \sin x + \cos x$ دارای برد $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ است و دوره تناوب 2π رادیان و در $[0, 2\pi]$ دو مرتبه برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌گردد.

تابع $y = \sin 3x + \cos 3x$ دارای دوره تناوب $\frac{2\pi}{3}$ است. یعنی در $[0, 2\pi]$ سه مرتبه تکرار می‌شود و در هر مرتبه ۲ بار برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود یعنی در مجموع ۶ جواب در $[0, 2\pi]$ دارد $y = \sin 3x + \cos 3x$



$\Rightarrow$ دو تابع ۶ نقطه تلاقی در بازه $[0, 2\pi]$ دارند و معادله ۶ ریشه در این بازه دارد.

تست ۱۷) مجموع جواب‌های معادله $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\cos\frac{x}{2}}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

جواب: گزینهٔ 2

حل: $\dfrac{1-\cos x}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x}$ ، $\cos\frac{x}{2}\neq 0$ ، $\cos x\neq -1$ $\Rightarrow (1-\cos x)(1+\cos x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

$\Rightarrow 1-\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin x \Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2}\sin x$

$\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$, $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

K	x
0	0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ ✓
1	π غ ق ق
2	2π ✓

$\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+2\pi=3\pi$

توضیح: اگر دامنه را بررسی نکردیم و π را نیز به اشتباه ریشه معادله در نظر می‌گرفتیم، آنگاه به گزینه ۴ می‌رسیدیم که غلط است و دام تست می‌باشد.

تست 18) اگر معادله $m^2\sin x+m\cos x=1$ دارای دو ریشه متمم باشد، مقدار m کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) -1 ۴) 1

جواب: گزینه ۴

حل: ریشه‌های معادله را α و β فرض می‌کنیم: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha=\cos\beta$ ، $\cos\alpha=\sin\beta$

α و β در معادله صدق می‌کنند: $\boxed{m^2\sin\alpha+m\cos\alpha=1}$ (1)

$m^2\sin\beta+m\cos\beta=1 \Rightarrow \boxed{m^2\cos\alpha+m\sin\alpha=1}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow m^2\sin\alpha+m\cos\alpha=m^2\cos\alpha+m\sin\alpha$

$\Rightarrow m^2(\sin\alpha-\cos\alpha)=m(\sin\alpha-\cos\alpha) \Rightarrow m^2=m$ ، $m=0$ غ ق ق ، $\boxed{m=1}$

تست ۱۹) اگر معادله $2\tan x+(k^2-3)\cot x=2k-2$ دو ریشه قرینه داشته باشد. مقدار k کدام است؟

۱) ۲   ۲) -2 ۳) -1 ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

حل: ریشه‌های معادله را α و $-\alpha$ در نظر می‌گیریم ⇐ در معادله صدق می‌کنند

α: $2\tan\alpha+(k^2-3)\cot\alpha=2k-2$

$-\alpha$: $-2\tan\alpha-(k^2-3)\cot\alpha=2k-2$

$+$: $0=4k-4 \Rightarrow k=1$

$\Rightarrow 2\tan x-2\cot x=0 \Rightarrow \tan x=\cot x \Rightarrow -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ دو ریشه قرینه

تست ۲۰) در معادله مثلثاتی $\cos x\cdot\cos 3x=\cos 2x$ فاصله بین هر دو ریشه متوالی کدام است؟ (مخصوص رشته ریاضی)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

حل: $\cos x\cdot\cos 3x=\cos(3x-x) \Rightarrow \cos x\cdot\cos 3x=\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x$

$\Rightarrow \sin x\cdot\sin 3x=0$ ⇐ $\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$ ①   یا $\sin 3x=0 \Rightarrow 3x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}$ ②

دسته جواب کلی: ① $\cup$ ② : $\frac{k\pi}{3}$

تست ۲۱) جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin x\cos 2x=\sin 3x$ کدام است؟ (مخصوص رشته ریاضی)

۱) $2k\pi$ ۲) $k\pi$ ۳) $(2k+1)\pi$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

حل: $2\sin x\cos 2x=\sin(x+2x) \Rightarrow 2\sin x\cos 2x=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$

$\Rightarrow \sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x=0 \Rightarrow \sin(x-2x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow \boxed{x=k\pi}$

تست 22) دسته جواب کلی معادله‌ی $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2$ کدام است؟ (رشته ریاضی)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{6}$　　۲) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$　　۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$　　۴) $k\pi+\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

حل: $\cos x+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\sin x=2 \Rightarrow \cos x+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\sin x=2$

$$\Rightarrow \frac{\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=2 \Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{3}=2k\pi \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

تست 23) یکی از جواب‌های معادله‌ی $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ به کدام صورت زیر است؟ (مخصوص رشته ریاضی)

۱) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$　　۲) $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$　　۳) $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$　　۴) $2k\pi+\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۴

حل: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$\Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}}=1$$

$$\Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{12}=2k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}}$$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{12}=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}}$$

تست 24) کدامیک از دسته جوابهای زیر، در معادله $3\sin^2x+\sin x\cos x-2\cos^2x=1$ صدق می‌کنند؟

1) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ 3) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

حل: دو طرف $\div\cos^2x$ $\Rightarrow 3\tan^2x+\tan x-2=\frac{1}{\cos^2x}$

$\Rightarrow 3\tan^2x+\tan x-2=1+\tan^2x \Rightarrow 2\tan^2x+\tan x-3=0$

تغییر متغیر: $\tan x=t \Rightarrow 2t^2+t-3=0 \to t_1=1 \Rightarrow \tan x=1 \to x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ ، $t_2=-\frac{3}{2}$

یکی از دسته جوابها

تست 25) معادلهٔ $\sin x-\cos x=\sqrt{\sin 2x}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

پاسخ: گزینه ۲

حل: دو طرف به توان ۲: $\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}-2\sin x\cos x=\sin 2x \Rightarrow 1-\sin 2x=\sin 2x$

$\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ ، $2x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \to x=k\pi+\frac{\pi}{12}$ ، $2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$

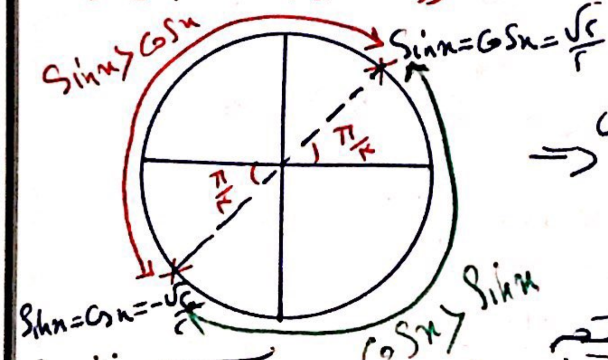
داریم، از طرفی:

$\sin 2x\geq 0 \Rightarrow 0\leq 2x\leq\pi \to 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ ، $2\pi\leq 2x\leq 3\pi \to \pi\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ ناحیه اول و سوم

$\sin x-\cos x\geq 0 \Rightarrow \sin x\geq\cos x$

K	x
0	$\frac{\pi}{12}$ غ ق ق ، $\frac{5\pi}{12}$ ✓
1	$\frac{13\pi}{12}$ ✓ ، $\frac{17\pi}{12}$ غ ق ق

نکته: مرز $\sin$ و $\cos$



$\Rightarrow$ جوابهای مورد قبول در $[0, 2\pi]$ $=\left\{\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right\}$

توضیح: در این تست گزینه ۲ صحیح است
چون طرف دوم معادله رادیکال با فرجه زوج است، رادیکال نامنفی است و باید طرف اول هم نامنفی باشد و دو مقدار از ۴ مقدار به دست آمده حذف شوند